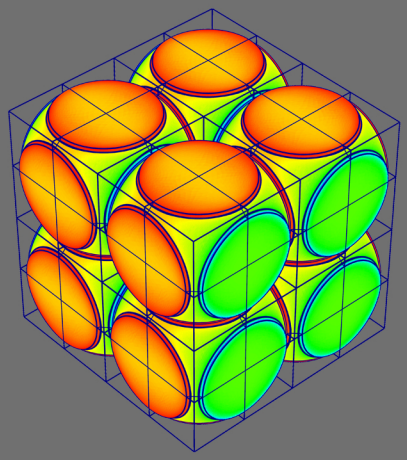
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Белов В.Ф., Гаврюшин С.С., Маркова Ю.Н. Неавтономная система как модель процесса производства технической инновации. Математическое моделирование и численные методы, 2021, № 1, с. 110–131.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/246/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.61
08.11.2026 03:36:18

УДК 004.942 DOI: 10.18698/2309-3684-2021-1-110131

Неавтономная система как модель процесса производства технической инновации

© В.Ф. Белов[1,3], С.С. Гаврюшин[2], Ю.Н. Маркова[3]

[1]МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, 430005, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[3]АУ «Технопарк–Мордовия», Саранск, 430034, Россия

Разработка метода анализа динамики изменений экономических характеристик инновационного процесса, начиная с изобретения или предпринимательской идеи до реализации новшества на рынке, является актуальной задачей, поставленной практикой в связи с необходимостью минимизации рисков и сроков проектирования и внедрения инноваций. Полученные в статье теоретические и экспериментальные результаты доказывают возможность решения этой задачи на основе неавтономных систем дифференциальных уравнений и применения первого метода Ляпунова для анализа устойчивости положений равновесия. Исследована математическая модель движения финансовых средств при производстве и реализации технической инновации, представленная в форме системы дифференциальных уравнений баланса с единичной импульсной функцией в правой части системы. Разработан алгоритм анализа устойчивости положений равновесия производственного процесса, учитывающий влияние внешней среды как «слева» (подготовка производства), так и «справа» (состояние рынка). Выявлены требования к дискретной модели подготовки производства для корректного определения начальных условий решения неавтономной системы, а также к дискретной модели рынка для вычисления зависящих от его состояния коэффициентов системы дифференциальных уравнений. Результаты анализа динамики изменений экономических характеристик инновационного процесса на этапе производства продукта представлены в виде трёхмерных фазовых портретов.

Ключевые слова: *инновационный процесс, уравнения баланса, импульсная функция, неавтономная система, математическая модель, устойчивость, первый метод Ляпунова, фазовый портрет*

Введение. По отношению к техническим (технологическим) инновациям в настоящее время применяются понятия, установленные Руководством Осло и нашедшие отражение в международных стандартах [1].

Инновационный процесс в [1] определяется как деятельность, в которой изобретение или предпринимательская идея получают экономическое содержание, т.е. это совокупность экономических состояний инновации, сменяющих друг друга в процессе преобразования начального состояния (например, предложенной конструкторской или технологической идеи новшества) в конечное состояние (поступившие в потребление новые материалы, изделия, методы, технологии).

Смена экономических состояний инновации это нелинейный

процесс, отдельные свойства которого изучались различными авторами методами математического моделирования. В обзорных работах [2, 3] рассматриваются вопросы математического моделирования, в том числе с помощью дифференциальных уравнений, распространения широкого круга инноваций посредством информационных, социальных и экономических связей между всеми элементами системы производства и потребления.

В [4] математическое моделирование инновационных процессов на этапе научно-исследовательских работ (НИР) осуществляется на основе автономных динамических систем. В работе [5] предложена неавтономная система [6, 7], отражающая экономическое состояние инновации на этапе выполнения опытно-конструкторских работ (ОКР) с использованием аппарата смещённых единичных импульсных функций и уравнений баланса.

Применение дифференциальных уравнений для оптимизации и анализа устойчивости инновационных процессов не является чем-то необычным и не отличается принципиально от их применения при исследовании, например, физических процессов. Вместе с тем, на сегодняшний день в области планирования инновационной деятельности отсутствует математическое и алгоритмическое обеспечение удобных для применения программных приложений с интуитивно понятными интерфейсами. В практике проектирования, производства и рыночной реализации технических инноваций актуален запрос на разработку такого метода (алгоритма) анализа динамики инновационного процесса, который бы на основе обобщённой математической модели, отражающей во взаимосвязи все (или основные) экономические состояния исследуемых инноваций, позволил бы создать такое программное приложение.

Учитывая определение неавтономной системы [6, 7] и зависимость динамики производственного процесса технической инновации от состояний окружающей инвестиционной и рыночной сред, которые в свою очередь являются функциями времени, можно предположить, что подход к моделированию ОКР как неавтономной системы, предложенный в [5], применим и для моделирования экономического состояния инновации на этапе производства.

Целью работы является исследование неавтономной системы, как модели экономического состояния процесса производства технической инновации, и реализация на этой основе алгоритма анализа устойчивости положений равновесия производственного процесса.

Математическая постановка задачи моделирования и принятые допущения. Пусть M — объём оборотных средств предприятия, а P — объём готовых продуктов на складе в денежном выражении. Тогда применив балансовое уравнение, получим

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = L_M - R_M, \\ \dfrac{dP}{dt} = L_P - R_p. \end{cases} \tag{1}$$

Источником L_M являются денежные средства, вкладываемые в процессы производства в момент времени t, а потери R_M — денежные средства, потраченные в процессе производства в момент времени t. В этом случае $\dfrac{dM}{dt}$ описывает скорость изменения (движения) денежных средств предприятия, выполняющего производство продукта.

Введем в рассмотрение величину W, которая показывает объем выручки от реализации продукта и вычисляется по формуле:

$$W = Q_m \frac{P}{P_{\min} + P} \rho, \tag{2}$$

где Q_m — максимальное количество продукта, которое может быть реализовано на рынке; ρ — рыночная цена единицы продукта; $P_{\min}$ — минимальное количество продукта на складе.

Так же введём в рассмотрение смещённую единичную импульсную функцию

$$\delta(t - t_1) = \begin{cases} \infty, \text{ если } t = t_1, \\ 0, \text{ если } t \neq t_1 \end{cases} \tag{3}$$

для скачкообразного изменения значения M на величину M_{ex}, которая показывает объемы внешних заимствований в моменты времени t_1.

Таким образом, в системе уравнений (1) математическая модель источника L_M будет иметь вид:

$$L_M = W + M_{ex}\delta(t - t_1). \tag{4}$$

Затраты в момент времени t состоят из производственных издержек M/c (c — время оборота финансовых средств), выплат по кредиту M_{ex}/c_{cr} (c_{cr} — кредитная ставка), амортизации капитальных вложений собственных средств предприятия K/c_{am} ($1/c_{am}$ — норма амортизации), затрат на хранение готового продукта на складе P/c_s ($1/c_s$ — доля оборотных средств, затрачиваемая на хранение единицы готовой продукции в единицу времени), т.е.

$$R_M = \frac{M}{c} + \frac{M_{ex}}{c_{cr}} + \frac{K}{c_{am}} + \frac{P}{c_s}. \tag{5}$$

После подстановки в первое уравнение системы (1) выражений (4) и (5), получим:

$$\frac{dM}{dt} = W + M_{ex}\delta\left(t - t_1\right) - \frac{M}{c} - \frac{M_{ex}}{c_{cr}} - \frac{K}{c_{am}} - \frac{P}{c_s}. \tag{6}$$

Рассмотрим вычисление производной $\frac{dP}{dt}$, характеризующей скорость изменения объема произведённого продукта на складе. Величина L_p равняется объему произведенной продукции в момент времени t:

$$L_P = k\frac{M}{c}, \tag{7}$$

$$k = \frac{\rho}{\rho_n}, \tag{8}$$

где ρ_n — внутренняя цена продукта.

Потерям R_P в этом случае соответствует объем выручки W от реализации продукта.

С учетом (7) второе уравнение системы (1) примет вид:

$$\frac{dP}{dt} = k\frac{M}{c} - W. \tag{9}$$

Объединения (6) и (9) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = W - \dfrac{M}{c} + M_{ex}\delta(t - t_1) - \dfrac{M_{ex}}{c_{cr}} - \dfrac{K}{c_{am}} - \dfrac{P}{c_s}, \\ \dfrac{dP}{dt} = k\dfrac{M}{c} - W, \\ W = Q_m \dfrac{P}{P_{\min} + P}\rho. \end{cases} \tag{10}$$

Рассмотрим систему (10). Она нелинейная и неоднородная по определению [8], является неавтономной, поскольку в правой части системы имеем переменную t в явном виде [6]. Наиболее полно соответствующие виду (10) неавтономные системы с разрывной правой частью исследованы в [9] для решения экологических задач. Заметим

так же, что система (10) — стохастическая система, поскольку её правая часть включает в себя функцию $Q_m(t)$, являющуюся случайным процессом.

Для исследования математической модели (10) требуется определить количественные значения параметров и начальных условий, характеризующих с достаточной точностью текущее состояние среды производства и реализации технологической инновации. В технико-экономических системах это всегда связано с трудностями, преодоление которых представляет собой самостоятельную задачу, которая в данной работе не рассматривается.

Преобразуем неавтономную систему (10) в автономную детерминированную систему, приняв следующие допущения:

- пусть $t_0 = t_1 + \varepsilon$, где ε — бесконечно мало; это позволит исследовать систему (10) в случае, когда $\delta(t - t_1) = 0$, то есть когда её правая часть непрерывна;
- будем анализировать систему (10) в предположении, что $Q_m(t) \equiv Q$; это допустимо, так как в каждый момент времени переменная $Q_m(t)$ принимает неотрицательное целочисленное значение.

При налагаемых ограничениях система (10) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = W - \dfrac{M}{c} - \dfrac{M_{ex}}{c_{cr}} - \dfrac{K}{c_{am}} - \dfrac{P}{c_s}, \\ \dfrac{dP}{dt} = k\dfrac{M}{c} - W. \end{cases} \tag{11}$$

Это автономная неоднородная нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим также, что все параметры, входящие в систему, положительные.

Исследование устойчивости положений равновесия неавтономной системы. При исследовании устойчивости положений равновесия необходимо ответить на следующие вопросы: а) существуют ли в системе положения равновесия и сколько их; б) какова устойчивость положений равновесия и как она зависит от параметров системы; в) как ведет себя система вблизи положений равновесия, возможны ли между ними переходы.

Практические методы исследования устойчивости неавтономных систем рассмотрены, например, в работах [10, 11, 12, 13].

Пусть задана автономная система (11). Обозначим её положения равновесия (M^*, P^*). Приравняв правую часть системы нулю, и подставив второе уравнение в первое уравнение, получим:

$$M^* = \frac{c}{k-1} \cdot \frac{M_{ex} c_{am} c_s + K c_s c_{cr} + P c_{cr} c_{am}}{c_{cr} c_{am} c_s}. \tag{12}$$

Поскольку k — отношение рыночной цены продукта к его внутренней цене, то $k-1>0$. Все параметры, входящие в систему, положительны, следовательно, при $P^*>0$ имеем $M^*>0$.

Подставляя выражение (12) в систему (11) при $\frac{dM}{dt}=\frac{dP}{dt}=0$, составим уравнение для нахождения P^*:

$$\begin{gathered} b_0 P^{*2} + b_1 P^* + b_2 = 0, \\ P^*_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4 b_0 b_2}}{2 b_0}, \end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered} b_0 = -k c_{cr} c_{am}, \\ b_1 = Q_m c_{cr} c_s c_{am} k \rho - P_{\min} c_{am} c_{cr} k - Q_m c_{cr} c_s c_{am} \rho - \\ - M_{ex} c_s c_{am} k - K c_s c_{cr} k, \\ b_2 = -(c_{cr} K + c_{am} M_{ex}) c_s k P_{\min}. \end{gathered} \tag{14}$$

Поскольку переменная P^* может принимать только положительные вещественные значения, то положение равновесия имеет смысл, если:

$$b_1^2 - 4 b_0 b_2 \geq 0, \tag{15}$$

$$P^*_{1,2} > 0. \tag{16}$$

При $b_1^2 - 4 b_0 b_2 > 0$ существуют два различных положения равновесия $\left(M_1^*, P_1^*\right)$ и $\left(M_2^*, P_2^*\right)$, а при $b_1^2 - 4 b_0 b_2 = 0$ — одно положение равновесия $\left(M_0^*, P_0^*\right)$.

Исследуем, какова устойчивость положений равновесия (неустойчивое, устойчивое, не достижимое на практике) и как устойчивость зависит от параметров системы.

Условие (15) означает

$$\left[\begin{array}{l} b_1 \geq 2\sqrt{b_0 b_2}, \\ b_1 \leq -2\sqrt{b_0 b_2}. \end{array}\right. \tag{17}$$

Поскольку $b_0<0$, $b_2<0$, из (13) легко заметить, что

$$b_1 > \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}. \qquad (18)$$

Рассмотрим случаи, когда условия (15), (16) выполняются.

Случай I:

$$\begin{cases} b_1 > \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}, \\ b_1 > 0. \end{cases}$$

Поскольку обе части первого неравенства положительные, то $b_1^2 > b_1^2 - 4b_0b_2$ или $b_0b_2 > 0$, что справедливо при любых допустимых значениях параметров системы (11), т.е. выполняется условие (17).

Случай II:

$$\begin{cases} b_1 > -\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}, \\ b_1 > 0. \end{cases}$$

Решением системы является неравенство $b_1 > 0$. Таким образом, этот случай также приводит к условию (17).

Случай III:

$$\begin{cases} b_1 > -\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}, \\ b_1 < 0. \end{cases}$$

Преобразуя первое неравенство системы, получаем неравенство с положительными обеими частями

$$\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2} > -b_1.$$

При возведении его в квадрат и последующем упрощении получим:

$$b_0b_2 < 0,$$

что невозможно при положительных параметрах системы (11).

Таким образом, условия (15), (16) сводятся к выполнению условия (17).

Исследуем устойчивость всех положений равновесия системы (11). Для этого рассмотрим линеаризованную систему уравнений первого приближения.

Матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial M} & \dfrac{\partial u_1}{\partial P} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial M} & \dfrac{\partial u_2}{\partial P} \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

где

$$\frac{\partial u_1}{\partial M} = -\frac{1}{c}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial M} = \frac{k}{c},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial P} = Q_m \frac{P_{\min}}{\left(P_{\min} + P^*\right)^2}\rho - \frac{1}{c_{cs}},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial P} = -Q_m \frac{P_{\min}}{\left(P_{\min} + P^*\right)^2}\rho,$$

т.е.

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} & -q - \frac{1}{c_{cs}} \\ \frac{k}{c} & q \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где

$$q = -Q_m \frac{P_{\min}}{\left(P_{\min} + P^*\right)^2}\rho. \tag{21}$$

Характеристическое уравнение для матрицы J имеет вид:

$$\lambda^2 + \lambda\left(\frac{1}{c} - q\right) + \frac{1}{c}\left(q\left(k-1\right) + \frac{k}{c_{cs}}\right) = 0. \tag{22}$$

Рассмотрим неравенство

$$\frac{1}{c}\left(q\left(k-1\right) + \frac{k}{c_{cs}}\right) > 0.$$

Приведем его к виду

$$q > \frac{k}{\left(1-k\right)c_{cs}}.$$

После подстановки (21), имеем:

$$\frac{1}{\left(P_{\min} + P^*\right)^2} < \frac{k}{\left(k-1\right)c_{cs}Q_m\rho P_{\min}}.$$

Учитывая, что $\frac{1}{\left(P_{\min} + P^*\right)^2}$ убывает при $P_{\min} + P^* > 0$, получим условие

$$P^* > \sqrt{\frac{(k-1)c_{cs}Q_m\rho P_{\min}}{k}} - P_{\min}. \qquad (23)$$

Любое положение равновесия $\left(M^*, P^*\right)$ системы (11) будет асимптотически устойчиво при выполнении условия (23) [14].

Учитывая то, что в системе (10) функция $\delta\left(t-t_1\right)$ играет роль импульсного воздействия на значение $M\left(t\right)$, положения равновесия системы (11) являются положениями равновесия системы (10), что очевидно без доказательства.

Для определения зависимости устойчивости от различных значений Q_m, воспользуемся данными из таблицы 1. Эта таблица составлена на основе данных реального производства, содержащихся, например, в ERP предприятия, преобразованных в параметры модели (10) с помощью дискретной модели производства, рассмотрение которой не является предметом данной статьи. С помощью этой модели определяются и начальные условия $M^0 = 10612{,}5$, $P^0 = 800$, соответствующие параметрам таблицы 1.

Таблица 1

Данные реального производства, преобразованные в параметры модели (10)

Параметр	Практический смысл	Размерность	Значение
c	цикл производства (время оборота финансовых средств)	месяц	3
M_{ex}	объем внешних заимствований в момент времени t_1	тыс. руб.	4000
t_1	момент времени	день	30
K	капитальные вложения собственных средств предприятия	тыс. руб.	10612,25
$1/c_{cr}$	кредитная ставка	–	0,0183
$1/c_{am}$	норма амортизации	–	0,0167
$1/c_s$	доля оборотных средств, затрачиваемая на хранение единицы готовой продукции в единицу времени	–	0,110
k	коэффициент добавленной стоимости	–	1,210
$P_{\min}$	минимальное количество товара на складе	тыс. руб.	2000
ρ	рыночная цена единицы готовой продукции	тыс. руб.	32

В соответствии с (14) имеем:

$$Q_m = \frac{b_1 + Kc_s c_{cr} k + M_{ex} c_s c_{am} k + P_{\min} c_{am} c_{cr} k}{c_{am} c_{cr} c_s \rho (k-1)} = 106,9.$$

Таким образом, для приведённых в таблице 1 параметров системы условие (15) выполняется, если $Q_m \in [107, +\infty)$, т.е. при таких значениях Q_m система (11) имеет два положения равновесия, достижимые на практике.

Условие (23) для одного из положения равновесия верно, если $Q_m \in [107, +\infty)$, а для другого всегда неверно. Это означает, что одно из положений равновесия асимптотически устойчиво, а второе – неустойчиво.

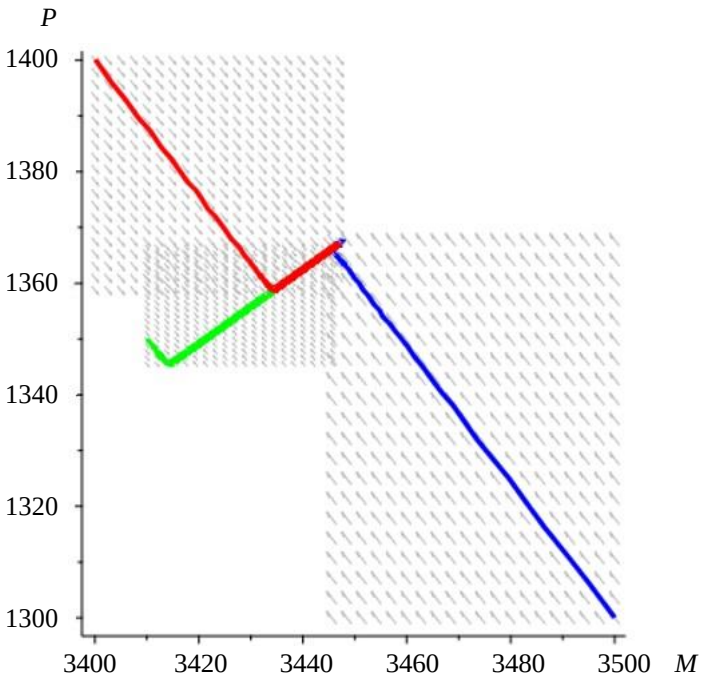
Примеры численного решения задачи. Проведём вычислительный эксперимент для разных значений $Q_m (107, 1500, 100)$ при соответствующих параметрах $c_{cr} = 54,64;\ c_s = 9,091;\ c_{am} = 60,0;\ k = 1,21;$ $K = 1061,25$ и различных начальных условиях. Сводный анализ результатов численных экспериментов приведён в таблице 2.

Таблица 2

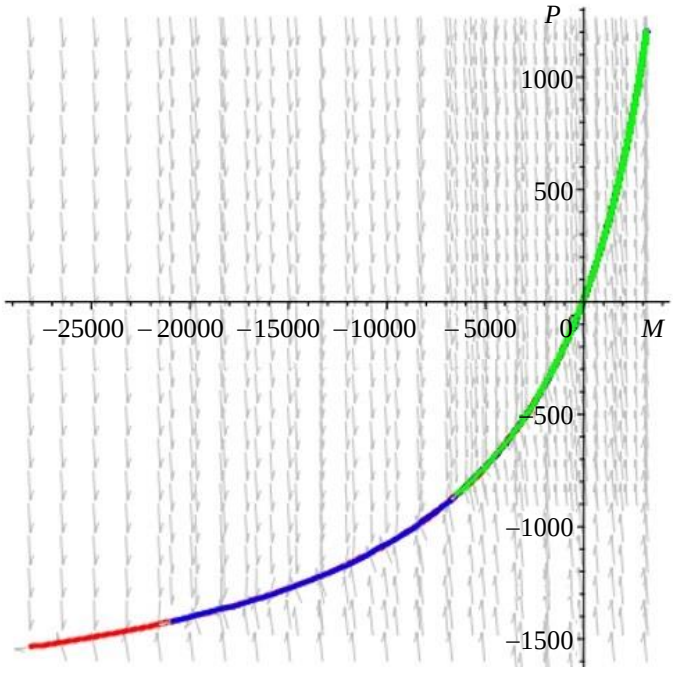
Результаты численных экспериментов

№ Примера	Q_m	Положение равновесия	Характеристика равновесия	Поведение системы
1	107	$(M_1^*, P_1^*) = (3447,243; 1367,361)$	Устойчивое	Стремится к (M_1^*, P_1^*)
		$(M_2^*, P_2^*) = (3197,806; 1208,630)$	Неустойчивое	
2	1500	$(M_1^*, P_1^*) = (115832,130; 72884,300)$	Устойчивое	Стремится к (M_1^*, P_1^*)
		$(M_2^*, P_2^*) = (1334,144; 22,670)$	Неустойчивое	
3	100	$(M_1^*, P_1^*) = \begin{pmatrix} 3044,826 - 1015,596i; \\ 1111,280 + 646,282i \end{pmatrix}$	Не достижимое на практике	Стремится к отрицательному значению
		$(M_2^*, P_2^*) = \begin{pmatrix} 3044,826 - 1015,596i; \\ 1111,280 - 646,282i \end{pmatrix}$	Не достижимое на практике	

Для примера №1 фазовые портреты и графики решения системы (11) при $Q_m = 107$ и различных начальных условиях в окрестностях положений равновесия (M_1^*, P_1^*) и (M_2^*, P_2^*) представлены на рис.1 и 2.



а



б

Рис. 1. Фазовые портреты системы (11) при $Q_m = 107$ и различных начальных условиях в окрестности положения равновесия $\left(M_1^*, P_1^*\right)$ и $\left(M_2^*, P_2^*\right)$ соответственно:

а — — — $M^0 = 3400$, $P^0 = 1400$; — — $M^0 = 3500$, $P^0 = 1300$; — — $M^0 = 3410$, $P^0 = 1350$;

б — — — $M^0 = 3100$, $P^0 = 1200$; — — $M^0 = 3200$, $P^0 = 1200$; — — $M^0 = 3150$, $P^0 = 1210$

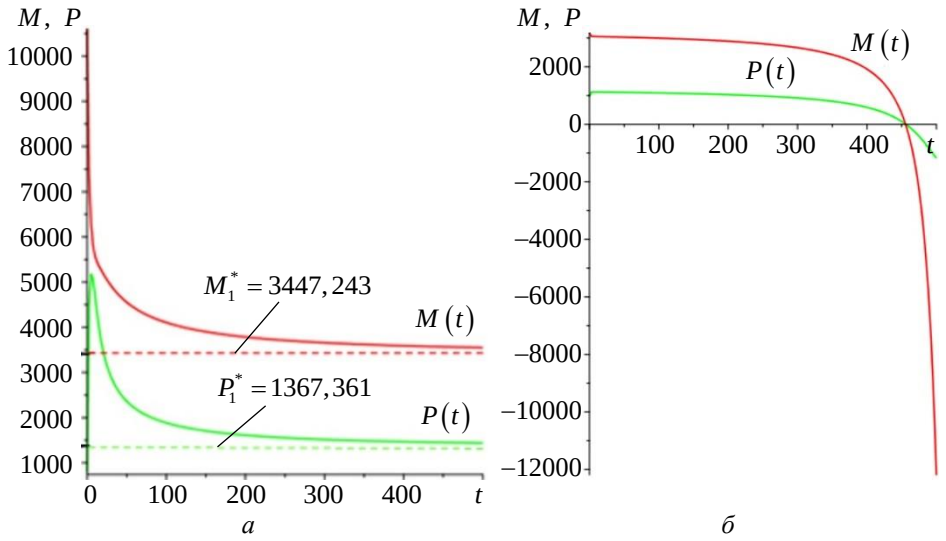


Рис. 2. Графики решения системы (11) при $Q_m = 107$:
а — $M^0 = 10612{,}5$, $P^0 = 800$; *б* — $M^0 = 3190$, $P^0 = 970$

На первых шагах решения системы (11) происходит резкое увеличение объема готовых продуктов на складе. Это объясняется тем, что максимальное количество продуктов, которое может быть реализовано на рынке, значительно меньше объёмов производимой продукции. В связи с этим растет доля оборотных средств, затрачиваемых на хранение готовой продукции на складе, что ведет к уменьшению денежных средств предприятия. Когда объем произведенной продукции становится примерно равным максимальному количеству продукта, которое может быть реализовано на рынке, что определяется значением Q_m, устанавливается стабильный режим производства продукта. Поскольку начальные условия $M^0 = 10612{,}5$ и $P^0 = 800$ не расположены в окрестности неустойчивого положения равновесия $\left(M_2^*, P_2^*\right)$, решение системы стремится к положению равновесия $\left(M_1^*, P_1^*\right)$. Когда начальные условия системы (11) располагаются в непосредственной близости от неустойчивого положения равновесия, можно наблюдать явление скрытого банкротства, заключающееся в том, что динамические переменные, прежде чем перейти в отрицательную область, конечное время «задерживаются» около некоторых положительных значений.

Рассмотрим решение системы (10). При $t = 10$ имеем: $M(30) = 4924{,}74$, $P(30) = 2907{,}54$. Значение $M(30)$ увеличивается на величину $M_{ex} = 4000$ и становится $M(30) = 8924{,}74$. Дальнейшее решение системы (10) выполняется, начиная с точки $M(30) = 8924{,}74$

и $P(30)=2906,54$. Несмотря на изменение значения $M(t)$ на величину M_{ex}, решение системы стремится к положению равновесия (M_1^*, P_1^*) как это показано на рис. 3.

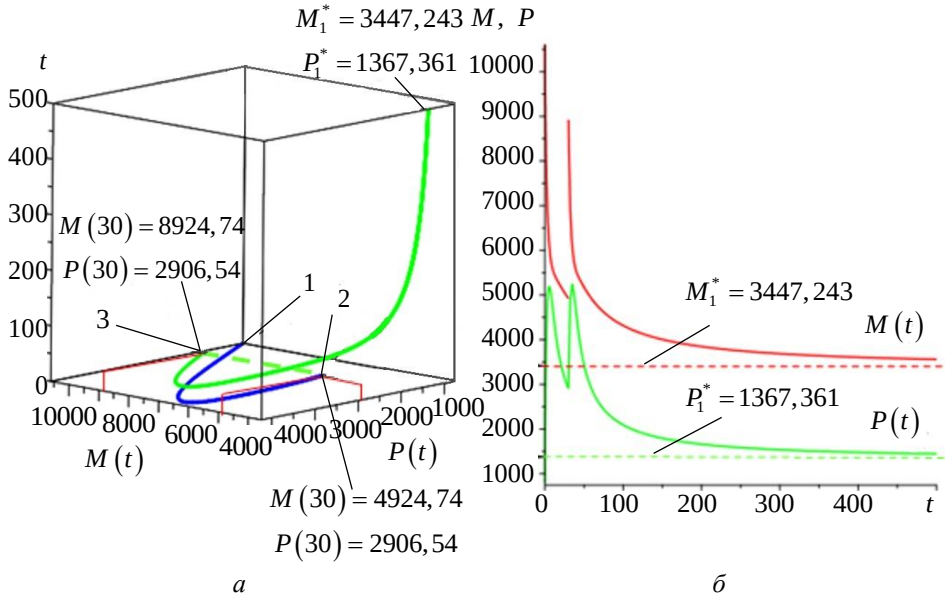
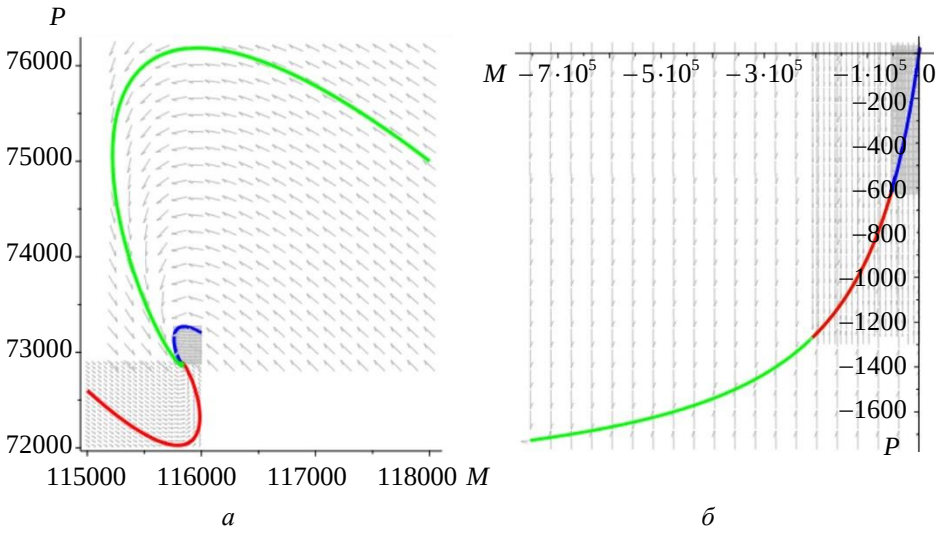


Рис. 3. Трехмерный фазовый портрет (*а*) и графики решения (*б*) системы (10) $Q_m = 107$: $M^0 = 10612,5$; $P^0 = 800$

На рис. 3 по вертикальной оси отложено время. По горизонтальным осям — объём оборотных средств предприятия и объём готовых продуктов на складе в денежном выражении. Решение системы (10) начинается в точке 1 с координатами $(M, P, t) = (10612,5; 800; 0)$. Синим цветом выделена фазовая траектория системы (10) при $t = 0...30$. В точке 2 с координатами $(M, P, t) = (4924,74; 2906,54; 30)$ происходит скачкообразное изменение величины $M(30)$ на величину M_{ex} (выделено пунктирной зеленой линией). Решение системы (10) переходит в точку 3 с координатами $(M, P, t) = (8924,74; 2906,54; 30)$. Дальнейшее решение системы (10), выделенное зеленым цветом, стремится к устойчивому положению равновесия.

Для примера №2 фазовые портреты и графики решения системы (11) при $Q_m = 1500$ и различных начальных условиях в окрестности положения равновесия (M_1^*, P_1^*) и (M_2^*, P_2^*) представлены на рис. 4 и 5.



а *б*

Рис. 4. Фазовые портреты системы (11) при $Q_m = 1500$ и различных начальных условиях в окрестности положения равновесия $\left(M_1^*, P_1^*\right)$ и $\left(M_2^*, P_2^*\right)$ соответственно:

а — — — $M^0 = 115000$, $P^0 = 72600$; — — $M^0 = 116000$, $P^0 = 1300$; — — $M^0 = 118000$, $P^0 = 75000$;

б — — — $M^0 = 1100$, $P^0 = 10$; — — $M^0 = 1270$, $P^0 = 20$; — — $M^0 = 500$, $P^0 = 0$

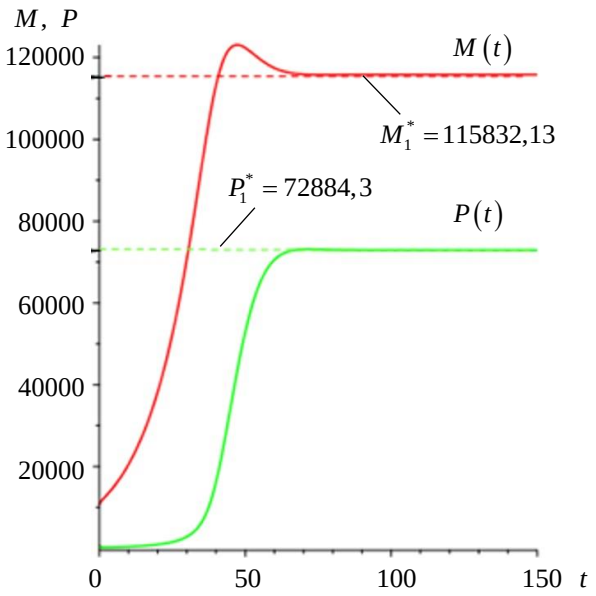
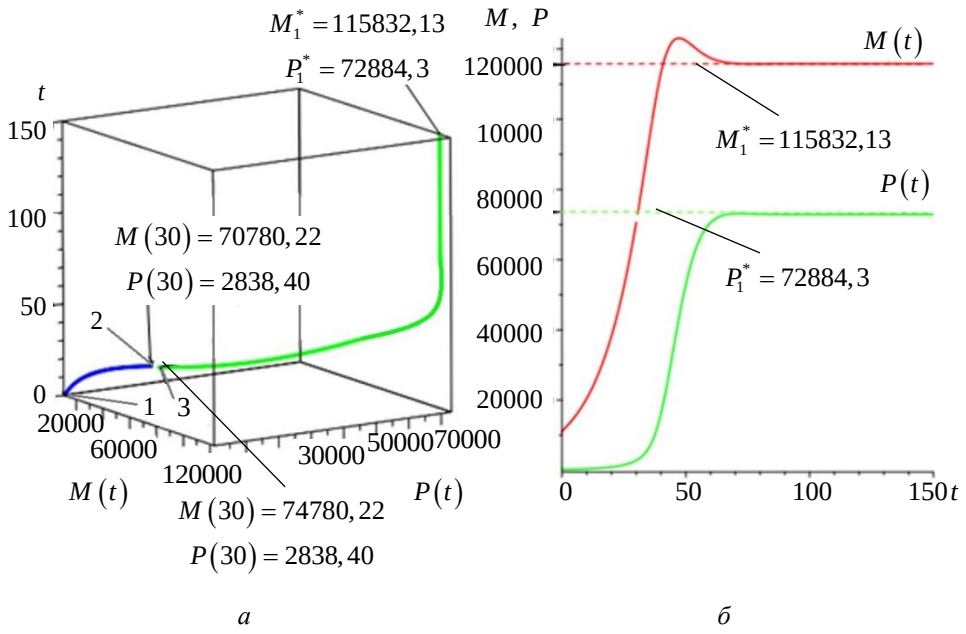


Рис. 5. Графики решения системы (11) при $Q_m = 1500$; $M^0 = 10612,5$; $P^0 = 800$

На первых шагах решения системы (11) происходит увеличение денежных средств предприятия. Это связано с тем, что количество

продуктов, которые могут быть реализованы на рынке, значительно больше количества производимой продукции. По этой же причине объем готовой продукции на складе растет медленно. При увеличении количества денежных средств предприятия происходит увеличение объёмов производства, насыщение рынка и, как следствие, резкое увеличение количества готовой продукции на складе. Далее устанавливается баланс между максимальными объемами производства и количеством готовой продукции на складе. Поскольку начальные условия не расположены в окрестности неустойчивого положения равновесия, решение системы стремится к положению равновесия $\left(M_1^*, P_1^*\right)$.

Аналогично примеру №1, несмотря на изменение значения $M(t)$ на величину M_{ex}, решение системы (10) стремится к положению равновесия $\left(M_1^*, P_1^*\right)$ как это показано на рис. 6.



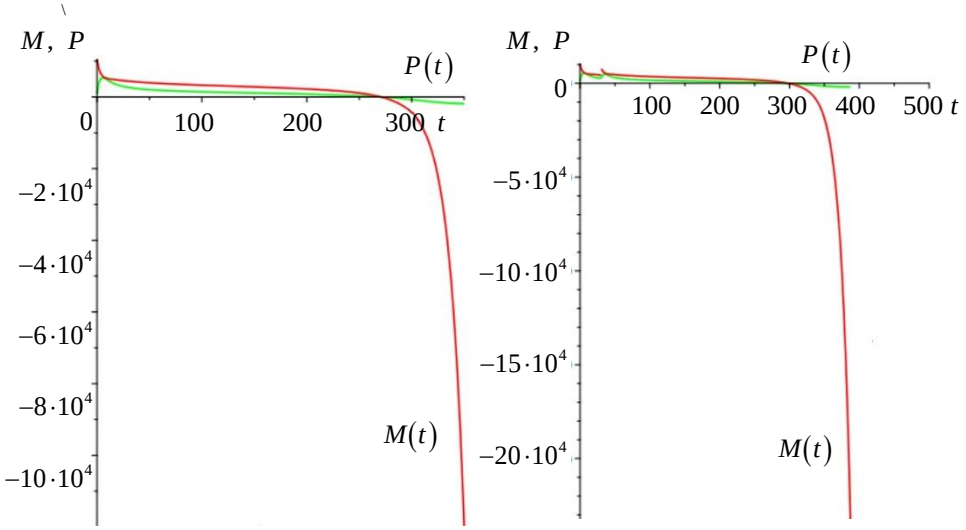
а *б*

Рис. 6. Трехмерный фазовый портрет (*а*) и графики решения (*б*) системы (10) $Q_m = 107$: $M^0 = 10612,5$; $P^0 = 800$

Решение системы (10) начинается в точке 1 с координатами $(M, P, t) = (10612,5; 800; 0)$. Синим цветом выделена фазовая траектория системы (10) при $t = 0...30$. В точке 2 с координатами $(M, P, t) = (70780,22; 2838,40; 30)$ происходит скачкообразное изменение величины $M(30)$ на величину M_{ex}. Решение системы (10) переходит в точку 3 с координатами $(M, P, t) = (74780,22; 2838,40; 30)$.

Дальнейшее решение системы (10), выделенное зеленым цветом, стремится к устойчивому положению равновесию.

Для примера №3 при $Q_m = 100$ система (11) имеет два положения равновесия, которые характеризуются комплексными числами, следовательно, они не имеют практического значения. Графики решения системы (11) и системы (10) при $Q_m = 100$ изображены на рис. 7.



а *б*

Рис. 7. Графики решения систем (11) (*а*) и (10) (*б*) при $Q_m = 100$:
$M^0 = 10612,5;\ \ P^0 = 800$

На начальных этапах происходит небольшое увеличение объема готовой продукции на складе в связи с тем, что максимальное количество продукта, которое может быть реализовано на рынке, меньше количества готовой продукции. Далее происходит насыщение рынка и некоторое время решение системы находится в положительной области, однако одновременно с этим постепенно уменьшаются оборотные средства предприятия. В конечном итоге происходит его банкротство.

Даже при наличии импульсного воздействия при $t = 30$ решение системы (10) остаётся в отрицательной области, поскольку в ней отсутствует устойчивое положение равновесия, как это показано на рис. 7.

Обсуждение полученных результатов. Рассмотрим полученные результаты с позиции достижения цели работы — исследование неавтономной системы как модели экономического состояния процесса производства технической инновации и реализация на этой основе алгоритма (метода) определения количества и положений точек равновесия, анализа их устойчивости, в том числе определение точек бифуркаций.

Принятые допущения позволили преобразовать неавтономную систему (10) в автономную систему (11) и применить качественный анализ устойчивости на основе первого метода Ляпунова [15].

Сравнительные вычислительные эксперименты показали, что устойчивость решений неавтономной системы (10) и автономной системы (11) одинаково зависит от заданных параметров реального производства, соответствующих им начальных условий, от характеристики рынка Q_m.

Бифуркационная диаграмма зависимости состояния равновесия системы от параметра Q_m, отражающая бифуркацию типа «складка», изображена на рис. 8.

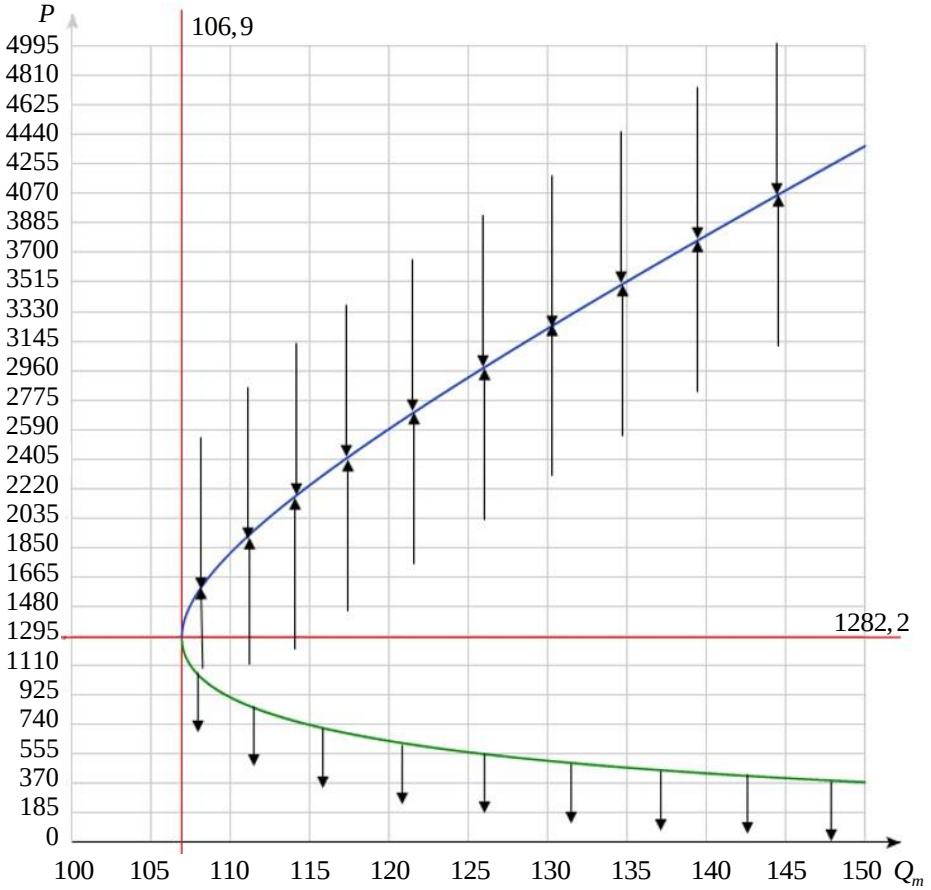


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма зависимости значений P от Q_m

При $Q_m = 106,9$ (пример №1) возникает одно состояние равновесия. Полученная точка называется критической или особой точкой и является параметрической границей, разделяющей два, абсолютно разных режима.

При значениях $Q_m > 106,9$ (пример №2) существуют два положения равновесия. Устойчивое положение равновесия изображено на графике синим цветом, а неустойчивое — зеленым цветом.

При $Q_m < 106,9$ (пример №3) положительные корни уравнения (13) отсутствуют. Поэтому, вместо стремления к некоторому устойчивому положению, решение системы (11) и, соответственно, системы (10), некоторое время находятся в положительной области, однако затем следует резкий переход в отрицательную область.

Таким образом, зная параметры и начальные условия для системы дифференциальных уравнений (10), можно определить, перейдет ли предприятие в состояние благополучия (положение равновесия $\left(M_1^*, P_1^*\right)$) или в состояние банкротства.

Из полученных результатов следуют два сценария банкротства предприятия. Первый сценарий — коэффициенты системы дифференциального уравнения меняются так, что окрестность асимптотически неустойчивого положения равновесия системы захватывает текущие значения динамических переменных.

Второй сценарий — при фиксированных коэффициентах системы дифференциальных уравнений изменяются динамические переменные M , P и система переходит в окрестность неустойчивого положения равновесия.

Если параметры характеризующие состояние предприятия на момент запуска инновационного продукта в производство таковы, что вычисленные на их основе начальные условия попадают в окрестность положения равновесия $\left(M_2^*, P_2^*\right)$, банкротство неизбежно. Разработанный алгоритм позволяет заранее определить, при каких начальных условиях система перейдет в состояние благополучия или состояние банкротства и тем самым скорректировать подготовку производства, используя его дискретную модель.

Если в процессе моделирования в момент времени t происходит изменение коэффициентов системы дифференциальных уравнений, то, соответственно, происходит изменение положений равновесия. При этом начальными условиями для системы с новыми коэффициентами становятся значения, полученные в момент времени t, т.е. $M^0 = M\left(t\right)$, $P^0 = P\left(t\right)$. Сравнив начальные условия с измененными положениями равновесия можно сделать прогноз, в какое положение перейдет система при дальнейшем моделировании.

Выводы и рекомендации. Проведённые в работе исследования и полученные результаты доказывают возможность единообразного представления математической модели движения денежных средств на этапах ОКР и производства. Полученное обобщение математической модели, как неавтономной системы, отражающее во взаимосвязи

основные экономические состояния исследуемых технических инноваций, создаёт условия для разработки программного приложения с интуитивно понятным интерфейсом и информативной системой визуализации выходных данных.

Теоретически и экспериментально обосновано применение первого метода Ляпунова для анализа устойчивости и бифуркаций системы дифференциальных уравнений баланса со смещённой единичной импульсной функцией в правой части.

Для отражения в коэффициентах системы дифференциальных уравнений изменяющейся во времени внешней среды, поставлены задачи разработки дискретной модели подготовки производства для корректного определения начальных условий решения неавтономной системы, а так же дискретной модели рынка для вычисления Q_m.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Oslo Manual 2018: Guidelines for Collecting, Reporting and Using Data on Innovation, 4th Edition*. Paris/Eurostat, Luxembourg, OECD Publ., 2018, 258 p.

[2] Силкина Г.Ю. Естественнонаучные категории в моделировании диффузии инноваций. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Экономика и менеджмент*, 2013, т. 7, № 2, с. 95–103.

[3] Макаров В.Л. Обзор математических моделей экономики с инновациями. *Экономика и математические методы*, 2009, т. 45, № 1, с. 3–14.

[4] Билаль Наваф Елиан Сулейман. *Математическое моделирование инновационных процессов на основе автономных динамических систем: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук*. Белгородский государственный национальный исследовательский университет. Белгород, 2012, 181 с.

[5] Белов В.Ф., Гаврюшин С.С., Маркова Ю.Н. Математическая модель распределенного проектирования прототипов в машиностроении. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2019, № 9, с. 7–19.

[6] Калитин Б.С. *Устойчивость неавтономных дифференциальных уравнений*. Минск, БГУ, 2013, 227 с.

[7] Калитин Б.С., Chabour R. Об устойчивости дискретных неавтономных систем. *XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ–2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*, Москва, 2014, с. 868–881.

[8] Демидович Б.П., Моденов В.П. *Дифференциальные уравнения*. Санкт-Петербург, Лань, 2008, 288 с.

[9] Ильичев В.Г. Локальные и глобальные свойства неавтономных динамических систем и их приложение в моделях конкуренции. *Сибирский математический журнал*, 2003, т. 44, № 3, с. 622–635.

[10] Ласунский А.В. Методы исследования устойчивости положений равновесия неавтономных систем и некоторые примеры их применения. *Труды карельского научного центра российской академии наук. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии*, 2011, № 5, с. 38–44.

[11] Александров А.Ю., Косов А.А. Анализ устойчивости положения равновесия нелинейных механических систем на основе декомпозиции. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2009, № 1, с. 143–154.

[12] Александров А.Ю., Косов А.А. Устойчивость и стабилизация положения равновесия нелинейных неавтономных механических систем. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*, 2009, № 4, с. 13–23.
[13] Ratnadip Adhikari. *A Treatise on stability of autonomous and non-autonomous systems: theory and illustrative practical applications paperback*. Saarbruecken, LAP LAMBERT Academic Publ., 2013, 84 p.
[14] Жабко А.П., Котина Е.Д., Чижова О.Н. *Дифференциальные уравнения и устойчивость*. Санкт-Петербург, Лань, 2015, 320 с.
[15] Куракин Л.Г., Островская И.В. Элементы теории устойчивости. Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет, 2016, 60 с.

Статья поступила в редакцию 05.12.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Белов В.Ф., Гаврюшин С.С., Маркова Ю.Н. Неавтономная система как модель процесса производства технической инновации. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 1, с. 110–131.

Белов Владимир Федорович — д-р. техн. наук, профессор, директор Центра проектирования инноваций АУ «Технопарк–Мордовия»; профессор кафедры «Системы автоматизированного проектирования». МГУ им. Н.П. Огарева. e-mail: belovvf@mail.ru

Гаврюшин Сергей Сергеевич — д-р. техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Компьютерные системы автоматизации производства» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: gss@bmstu.ru

Маркова Юлия Николаевна — директор по развитию Центра проектирования инноваций АУ «Технопарк–Мордовия». e-mail: ads.t87@mail.ru

Non-autonomous system as a model of the production process of technical innovation

© V.F. Belov[1,3], S.S. Gavriushin[2], Y.N. Markova[3]

[1]Ogarev Mordovia State University, Saransk, 430005, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[3]AI «Technopark–Mordovia», Saransk, 430034, Russia

Development of an analytical method for economic characteristics variation in an innovation process is a challenging task, starting from invention or entrepreneur idea and finishing with market implementation. The practical purpose here is both to minimize the risks and shorten design and implementation time. Theoretical and experimental results presented in the paper show the possibility to solve the mentioned task via applying a non-autonomous differential equation system along with the Lyapunov's First Method for stability analysis. A mathematical model of flow of funds related to the manufacturing and market implementation of the engineering innovation has been studied. It is presented in the form of the system of differential balance equations with unit impulse function in the right-hand side. An algorithm has been developed to analyze the stability of the equilibrium states of the manufacturing process, considering the influence of the external environment "from the right" (preparation of manufacturing) as well as "from the left" (market state).

The requirements are determined regarding both the discrete model of manufacturing preparation to formulate initial conditions for the non-autonomous system and the discrete model of the market to calculate the market state dependent coefficients for the system of differential equations. The results of analysis of the economic characteristics variation in the stage of product manufacturing have been presented as 3D phase images.

Keywords: *innovation process, balance equations, impulse function, non-autonomous system, mathematical model, stability, Lyapunov's First Method, phase image*

REFERENCES

[1] *Oslo Manual 2018: Guidelines for Collecting, Reporting and Using Data on Innovation, 4th Edition*. Paris/Eurostat, Luxembourg, OECD Publ., 2018, 258 p.

[2] Silkina G.Yu. Natural science categories in modelling the diffusion of innovations. *Bulletin of South Ural State University. Series. Economics and Management*, 2013, vol. 7, no. 2, pp. 95–103.

[3] Makarov V.L. Overview of mathematical models of economy with innovation. *Economics and Mathematical Methods*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 3–14.

[4] Bilal Nawaf Elian Suleiman. *Matematicheskoe modelirovanie innova-cionnyh processov na osnove avtonomnyh dinamicheskih sistem: disser-taciya na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskih nauk* [Mathematical modeling of innovative processes based on autonomous dynamic systems: dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences]. Belgorod State University. Belgorod, 2012, 181 p.

[5] Belov V.F., Gavryushin S.S., Markova Y.N. A mathematical model of distributed prototype design in mechanical engineering. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2019, no. 9, pp. 7–19.

[6] Kalitin B.S. *Ustojchivost' neavtonomnyh differencial'nyh uravnenij* [Stability of non-autonomous differential equations]. Minsk, BSU Publ., 2013, 227 p.

[7] Kalitin B. S., Chabour R. Ob ustojchivosti diskretnyh neavtonomnyh sistem [On the stability of discrete non-autonomous systems]. *XII vserossijskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU–2014. Institut problem upravleniya im. V.A. Trapeznikova RAN* [The XII All-Russian meeting on the problems of VSPU management–2014. V.A. Trapeznikov Institute of Management Problems of the Russian Academy of Sciences], Moscow, 2014, pp. 868–881.

[8] Demidovich B.P., Modenov V.P. *Differencial'nye uravneniya* [Differential equations]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2008, 288 p.

[9] Il'ichev V.G. Local and global properties of nonautonomous dynamical systems and their application to competition models. *Siberian Mathematical Journal*, vol. 44, no. 3, pp. 490–499.

[10] Lasunsky A.V. Methods of investigating the stability of equilibrium positions in the nonautonomous systems, and some applications theirof. *Transactions of Karelian Research Centre of Russian Academy of Science. Mathematical Modeling and Information Technologies*, 2011, no. 5, pp. 38–44.

[11] Aleksandrov A.Yu., Kosov A.A. Stability analysis of equilibrium positions of nonlinear mechanical systems by means of decomposition. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2009, no. 1, pp. 143–154.

[12] Aleksandrov A.Y., Kosov A.A. Stability and stabilization of equilibrium positions of nonlinear nonautonomous mechanical systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2009, vol. 48, no. 4, pp. 511–520.

[13] Ratnadip Adhikari. *A Treatise on stability of autonomous and non-autonomous systems: theory and illustrative practical applications paperback*. Saarbruecken, LAP LAMBERT Academic Publ., 2013, 84 p.

[14] Zhabko A.P., Kotina E.D., Chizhova O.N. *Differencial'nye uravneniya i ustojchivost'* [Differential equations and stability]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2015, 320 p.
[15] Kurakin L.G., Ostrovskaya I.V. *Elementy teorii ustojchivosti* [Elements of the stability theory]. Rostov-on-Don, Southern Federal University Publ., 2016, 60 p.

Belov V.F., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Director of the Center for Innovation Design of the AI «Technopark–Mordovia», Professor of the Department of Computer Aided Design Systems, Ogarev Mordovia State University. e-mail: belovvf@mail.ru

Gavriushin S.S., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of Department of Computer Systems of Industrial Automation, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: gss@bmstu.ru

Markova Y.N., Director of the Center for Innovation Design of the AI «Technopark–Mordovia». e-mail: 1002maps@mail.ru