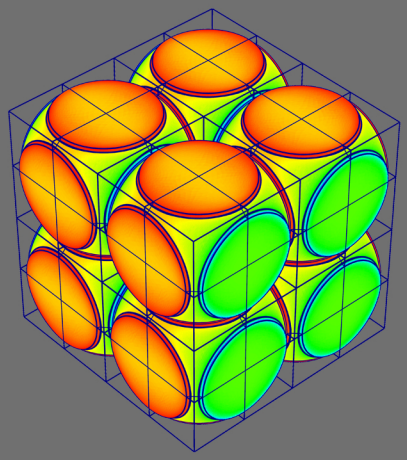
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Галанин М.П., Сорокин Д.Л., Ухова А.Р. Методы численного решения дифференциального уравнения смешанного типа в неограниченной области. Математическое моделирование и численные методы, 2021, № 1, с. 91–109.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/245/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.130
18.11.2026 06:22:29

УДК 519.6 DOI: 10.18698/2309-3684-2021-1-91109

Методы численного решения дифференциального уравнения смешанного типа в неограниченной области

© М.П. Галанин[1,2], Д.Л. Сорокин[1,2], А.Р. Ухова[2]

[1]ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Разработаны методы численного решения задачи для уравнения смешанного типа в неограниченной области в случае, когда решение удовлетворяет уравнению теплопроводности в ограниченной области и уравнению Лапласа в оставшейся части пространства. Предложен способ задания искусственных граничных условий, позволяющий проводить расчёты в ограниченной области. Построен итерационный алгоритм нахождения численного решения в ограниченной области, такой что численное решение сходится к проекции точного решения на ограниченную область. Исследована скорость сходимости итерационного алгоритма. Задача решена в одномерном плоском, в цилиндрически и сферически симметричных случаях. Приведены примеры решений.

Ключевые слова: *уравнения смешанного типа, неограниченная область, итерационный алгоритм*

Введение. Часто при решении реальных задач математическую модель необходимо строить в неограниченной области, например, при моделировании квазистационарного электромагнитного поля в электродинамическом ускорителе рельсового типа. Такие задачи характеризуются тем, что внутри некоторой области процесс описывается параболическим уравнением, а вне — эллиптическим.

Для численного решения задач в неограниченной области разработано множество методов, например, метод замены переменных, метод граничных интегральных уравнений, метод разностных потенциалов [1–3], метод введения бесконечных элементов совместно с конечными элементами [4–5], использование квазиравномерных сеток [6], однако данные методы не всегда позволяют эффективный вычислительный алгоритм.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения смешанного типа во всем пространстве. А именно, искомое решение в некоторой ограниченной области D является решением нестационарного уравнения теплопроводности, а вне области D решение удовлетворяет уравнению Лапласа. На границе области D имеют место условия непрерывности решения и потоков. Чтобы обеспечить единственность, наложим на искомую функцию u условие регулярности на бесконечности [7–8]. В итоге решаемая задача имеет вид:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & \vec{r} \in D, \\ u\,|_{t=0} = u_0(\vec{r}), & \vec{r} \in D, \\ \Delta u = 0, & \vec{r} \in \mathbb{R}^n \setminus D, \\ |\,u\,| < +\infty, & \\ [u] = 0, \quad \left[\dfrac{\partial u}{\partial n}\right] = 0 & \text{на } \partial D. \end{cases} \tag{1}$$

Требуется построить метод нахождения численного решения задачи в ограниченной области, точное решение которой совпадает с проекцией решения исходной задачи в бесконечном пространстве на эту область.

Необходимо рассмотреть задачу в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат в одномерном случае.

Граничное условие. Рассмотрим двумерный случай Пусть область $D_2 : D \subset D_2$ (рис.1). Для нахождения решения задачи вида (1) в этой области необходимо поставить граничное условие на границе D_2 [3, 9, 10]. Форма области D может быть сложной, что не позволяет задать функции Грина решаемых уравнений. Поэтому в [11] рассмотрена дополнительная граница ∂D_1 в области $D_2 \setminus D$, представляющая собой окружность радиуса r_1. Решение внешней краевой задачи для уравнения Лапласа вне круга известно и задается интегралом Пуассона [7–8, 12]. В двумерном случае он имеет вид:

$$u(r,\varphi) = Pu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r_1,\psi)\frac{r^2 - r_1^2}{r^2 - 2rr_1\cos(\varphi-\psi) + r_1^2}d\psi, \quad r > r_1.$$

Если решение на ∂D_1 известно, то вычислением интеграла Пуассона можно получить значения искомой функции, например, на границе области D_2.

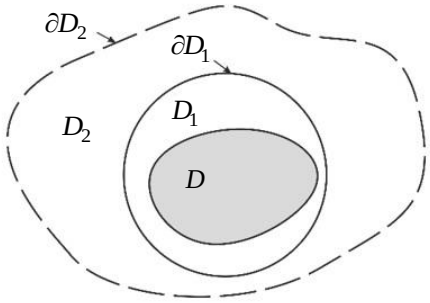


Рис. 1. Структура расчётной области

Тогда исходная задача в части уравнения Лапласа примет вид:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ \vec{r} \in D_2 \setminus D, \\ u\,|_{\partial D_2} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} u(r_1, \psi) \dfrac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi - \psi) + r_1^2} d\psi. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь точка $(r_2, \varphi) \in \partial D_2$.

Одномерный плоский случай. В одномерном случае в декартовых координатах задача (1) имеет вид (3). Во всех рассмотренных далее одномерных плоских задачах считаем $\psi(t) = const$, $u_0(0) = const$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < L, \ t > 0, \\ u\,|_{t=0} = u_0(x), & 0 < x < L, \\ u\,|_{x=0} = \psi(t), & \\ u_{xx} = 0 & L < x < +\infty, \\ |\,u\,| < +\infty, & \\ u\,|_{x=L-0} = u\,|_{x=L+0}, & \\ u_x\,|_{x=L-0} = u_x\,|_{x=L+0}. & \end{cases} \tag{3}$$

Решение будем искать на отрезке $[0, L_2]$, $L < L_1 < L_2$. Условие на границе L_2 в одномерном случае представляет собой равенство значений искомой функции в L_1 и в L_2:

$$u\,|_{x=L_2} = u\,|_{x=L_1}.$$

Оно является следствием постоянства регулярного решения уравнения Лапласа в данном случае.

Точное решение задачи разыскивается обычным способом в виде разложения по собственным функциям, соответствующим собственным числам

$$\lambda_n = \frac{\pi}{2L} + \frac{\pi n}{L}, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Для численного решения введем сетку в области $\Omega_T = \{0 \leqslant x \leqslant L_2, \ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ по переменным x и t: $\omega_{h_1} = \{x_i = ih_1, \ i = 0, \ 1, \ldots, \ N_{h_1} - 1, \ h_1 = L/(N_{h_1} - 1)\}$ — равномерная сетка с шагом h_1 на отрезке $0 \leqslant x \leqslant L$, N_{h_1} — количество узлов сетки, $\omega_{h_2} = \{x_j = jh_2 + L, \ j = 0, \ 1, \ldots, \ N_{h_2} - 1, \ h_2 = (L_2 - L)/(N_{h_2} - 1)\}$ — равномерная сетка с шагом h_2 на отрезке $L \leqslant x \leqslant L_2$, в итоге сетка по

пространству содержит $(N_{h_1} + N_{h_2} - 1)$ точек, $\omega_\tau = \{t_k = k\tau,\ k = 0,\ 1,...,\ N_\tau,\ \tau = T / N_\tau\}$ — равномерная сетка с шагом τ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$.

Запишем неявную разностную схему для уравнения теплопроводности [13]:

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^k - y_i^{k-1}}{\tau} = \dfrac{y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k}{h_1^2}, \quad i = 1, \ldots, N_{h_1} - 2, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \quad y_0^k = \psi(t_k). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь и далее используем обозначение y для численного аналога точного решения u.

Далее запишем разностную схему для уравнения Лапласа:

$$\frac{y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k}{h_2^2} = 0, \quad i = N_{h_1}, \ldots, N_{h_1} + N_{h_2} - 3.$$

Аппроксимируем условия сопряжения интегро-интерполяционным способом. Для этого проинтегрируем уравнение теплопроводности (3) на отрезке $[L - h_1 / 2, L]$, проинтегрируем уравнение Лапласа на отрезке $[L, L + h_2 / 2]$ и приравняем потоки слева и справа от границы. Далее заменим производные разностными, а интеграл — квадратурой и получим уравнение [13–14]:

$$\frac{1}{h_1} y_{N_{h_1}-2}^k - \left(\frac{h_1}{2\tau} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) y_{N_{h_1}-1}^k + \frac{1}{h_2} y_{N_{h_1}}^k = -\frac{h_1}{2\tau} y_{N_{h_1}-1}^{k-1}. \tag{6}$$

имеет порядок аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau)$.

Полученную систему линейных алгебраических уравнений можно решить, например, методом Гаусса с частичным выбором главного элемента [13]. Более рационально использовать специально созданный вариант метода прогонки [13], поскольку матрица решаемой системы уравнений отличается от трехдиагональной лишь одной последней строкой. Те же алгоритмы можно будет применять при решении других систем алгебраических уравнений, которые возникнут далее в данной работе.

Пример 1. Задача (3) с $u_0(x) = 1 - x$. Ее точным решением является функция:

$$u(x,t) = 1 + \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2} \sin(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 t}, \quad 0 < x < L.$$

Здесь и далее для случаев плоской и цилиндрической геометрий $u(x,t)=u(L,t)$ при $x>L$. В случае плоской геометрии для нахождения ошибки в качестве точного решения взята частичная сумма ряда до 3 члена. Ошибка вычислена в равномерной норме.

Расчеты произведены при значениях $L=1$, $L_2=2$, $T=1$. В таблице 1 приведены результаты вычислений.

Таблица 1

Сравнение численного решения с точным при различных соотношениях шагов сетки в плоском случае при $L_1=1,75$ для примера 1

Количество узлов	Ошибка	Отношение ошибок
$N_{h_1}=N_{h_2}=21,\quad N_\tau=21$	$1,00271\cdot10^{-2}$	—
$N_{h_1}=N_{h_2}=41,\quad N_\tau=84$	$2,51836\cdot10^{-3}$	3,982
$N_{h_1}=N_{h_2}=81,\quad N_\tau=336$	$6,30219\cdot10^{-4}$	3,996
$N_{h_1}=N_{h_2}=161,\quad N_\tau=1344$	$1,57592\cdot10^{-4}$	3,999

Отметим, что при различных положениях дополнительной границы L_2 ошибки остаются одинаковыми.

На рис. 2 показано решение в различные моменты времени.

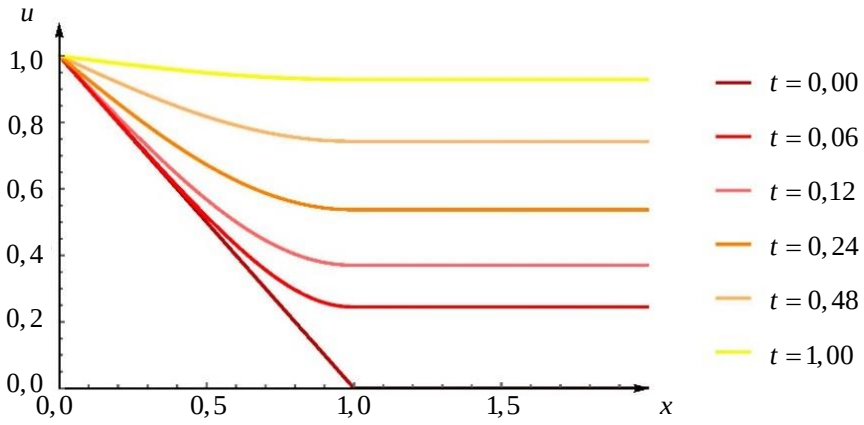


Рис. 2. Эволюция во времени решения из примера 1

Пример 2. Задача (3) с $u_0(x)=\cos x$. Ее точным решением при $0<x<L$ является функция:

$$u(x,t)=1+\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\sin(\lambda_n x)e^{-\lambda_n^2 t}\left[\frac{\lambda_n^2(-1)^n(1-\sin L)-\lambda_n(-1)^n(1+\sin L)+2}{\lambda_n(\lambda_n^2-1)}\right].$$

В табл. 2 приведены результаты вычислений.

Таблица 2

Сравнение численного решения с точным при различных соотношениях шагов сетки в плоском случае при $L_1 = 1,5$ для примера 1

Количество узлов	Ошибка	Отношение ошибок
$N_{h_1} = N_{h_2} = 21, \quad N_\tau = 21$	$3,47402 \cdot 10^{-3}$	—
$N_{h_1} = N_{h_2} = 41, \quad N_\tau = 84$	$8,72007 \cdot 10^{-4}$	3,984
$N_{h_1} = N_{h_2} = 81, \quad N_\tau = 336$	$2,18188 \cdot 10^{-4}$	3,997
$N_{h_1} = N_{h_2} = 161, \quad N_\tau = 1344$	$5,45582 \cdot 10^{-5}$	3,999

На рис. 3 показано решение в различные моменты времени.

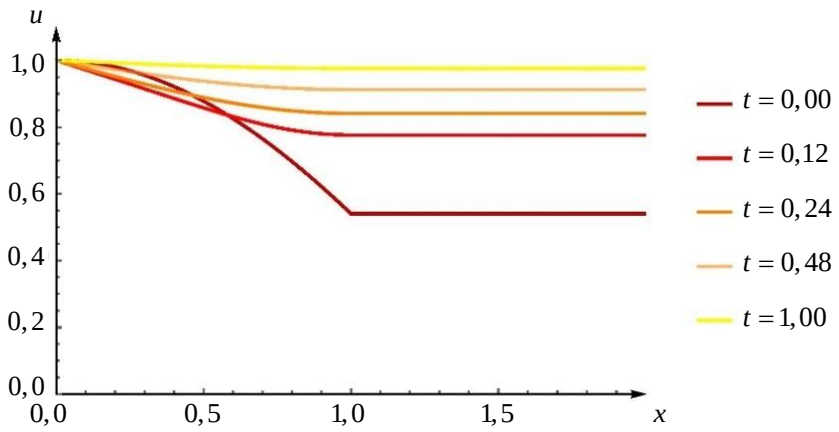


Рис. 3. Эволюция во времени решения из примера 2

Одномерный цилиндрический случай. Исходная задача в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right), & 0 < \rho < R,\ t > 0, \\ u\,|_{t=0} = u_0(\rho), & 0 < \rho < R, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) = 0, & \rho > R, \\ |\,u\,| < +\infty, \\ u\,|_{\rho=R-0} = u\,|_{\rho=R+0}, \\ u_\rho\,|_{\rho=R-0} = u_\rho\,|_{\rho=R+0}. \end{cases} \tag{7}$$

Решение будем искать на отрезке $[0, R_2]$. Условие на внешней границе R_2 такое же, как и в плоском случае:

$$u|_{\rho=R_2} = u|_{\rho=R_1}.$$

Обоснование аналогично таковому для плоского случая.

Точным решением задачи в области $0 < \rho < R$, является функция

$$u(\rho,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{R^2 J_0^2(\lambda_n R)} J_0(\lambda_n \rho) e^{-\lambda_n^2 t} \int_0^R u_0(\tilde{\rho}) J_0(\lambda_n \tilde{\rho}) \tilde{\rho} d\tilde{\rho}.$$

Здесь собственные числа λ_n являются корнями уравнения:

$$\lambda_n J_1(\lambda_n R) = 0,$$

следующего из граничного условия при $\rho = R$, J_0, J_1 — функции Бесселя.

Воспользуемся введенной ранее сеткой на Ω_T. Оператор Лапласа аппроксимируем интегро–интерполяционным методом [14]. Для этого проинтегрируем $Au = \Delta u$ по ячейке размером h с весом ρ. Получим для разностного ператора A_h:

$$V_{h,i} A_{h,i} y = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \rho_{i+1/2} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \rho_{i-1/2}, \tag{8}$$

где $V_{h,i} = \frac{1}{2}\left(\rho_{i+1/2}^2 - \rho_{i-1/2}^2\right)$ — объем ячейки.

В итоге имеем разностную схему для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^k - y_i^{k-1}}{\tau} = \dfrac{1}{\rho_i h_1}\left(\rho_{i+1/2} \dfrac{y_{i+1}^k - y_i^k}{h_1} - \rho_{i-1/2} \dfrac{y_i^k - y_{i-1}^k}{h_1}\right), \\ y_i^0 = u_0(\rho_i). \end{cases} \tag{9}$$

Для аппроксимации условия в нуле проинтегрируем уравнение по ячейке $[0, h_1/2]$ с весом ρ, заменим производные разностными, а интеграл — квадратурой, получим:

$$\frac{y_0^k - y_0^{k-1}}{\tau} = \frac{4}{h_1} \frac{y_1^k - y_0^k}{h_1}.$$

Далее запишем разностную схему для уравнения Лапласа:

$$\frac{1}{\rho_i h_2}\left(\rho_{i+1/2} \frac{y_{i+1}^k - y_i^k}{h_2} - \rho_{i-1/2} \frac{y_i^k - y_{i-1}^k}{h_2}\right) = 0.$$

Аппроксимируем условие сопряжения аналогично плоскому случаю. Для этого проинтегрируем уравнение теплопроводности (7) на

отрезке $[R-h_1/2, R]$ и уравнение Лапласа на отрезке $[R, R+h_2/2]$ с весом ρ. Учтем равенство потоков, заменим производные разностными, интеграл — квадратурой и получим:

$$\frac{2R-h_1}{2h_1}y^k_{N_{h_1}-2}-\left(\frac{h_1}{8\tau}(4R-h_1)+\frac{2R-h_1}{2h_1}+\frac{2R+h_2}{2h_2}\right)y^k_{N_{h_1}-1}+ \\ +\frac{2R+h_2}{2h_2}y^k_{N_{h_1}}=-\frac{h_1(4R-h_1)}{8\tau}y^{k-1}_{N_{h_1}-1}. \qquad (10)$$

Описанная схема имеет порядок аппроксимации $O(h_1^2+h_2^2+\tau)$.

Пример 3. Задача (7) с $u_0(\rho)=\rho^2$. Для нахождения ошибки в качестве точного решения взята частичная сумма ряда до 20 члена. Ошибка вычислена в равномерной норме.

Расчеты произведены при значениях $R=5$, $R_1=7{,}5$, $R_2=10$, $T=10$. В таблице 3 приведены результаты.

Таблица 3

Сравнение численного решения с точным при различных соотношениях шагов сетки в цилиндрическом случае для примера 3

Количество узлов	Ошибка	Отношение ошибок
$N_{h_1}=N_{h_2}=21,\quad N_\tau=21$	$3{,}5508\cdot10^{-2}$	—
$N_{h_1}=N_{h_2}=41,\quad N_\tau=84$	$8{,}17853\cdot10^{-3}$	4,342
$N_{h_1}=N_{h_2}=81,\quad N_\tau=336$	$2{,}00052\cdot10^{-3}$	4,088
$N_{h_1}=N_{h_2}=161,\quad N_\tau=1344$	$4{,}97371\cdot10^{-4}$	4,022

На рис. 4 изображено изменение решения с течением времени.

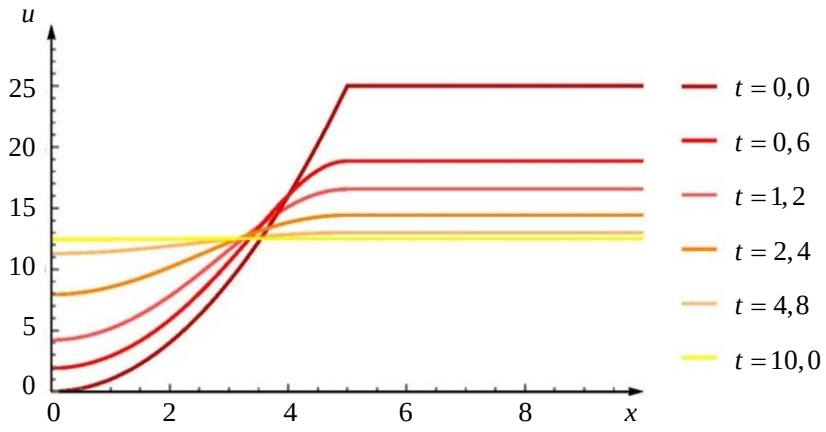


Рис. 4. Эволюция во времени решения из примера 3

Пример 4. Задача (7) с $u_0(\rho) = 1 - \rho^{3/2}$.

В таблице 4 приведены результаты.

Таблица 4

Сравнение численного решения с точным при различных соотношениях шагов сетки в цилиндрическом случае для примера 4

Количество узлов	Ошибка	Отношение ошибок
$N_{h_1} = N_{h_2} = 21, \quad N_\tau = 21$	$1,65663 \cdot 10^{-2}$	—
$N_{h_1} = N_{h_2} = 41, \quad N_\tau = 84$	$3,4009 \cdot 10^{-3}$	4,871
$N_{h_1} = N_{h_2} = 81, \quad N_\tau = 336$	$8,03357 \cdot 10^{-4}$	4,233
$N_{h_1} = N_{h_2} = 161, \quad N_\tau = 1344$	$1,97908 \cdot 10^{-4}$	4,059

На рис. 5 изображено изменение решения с течением времени.

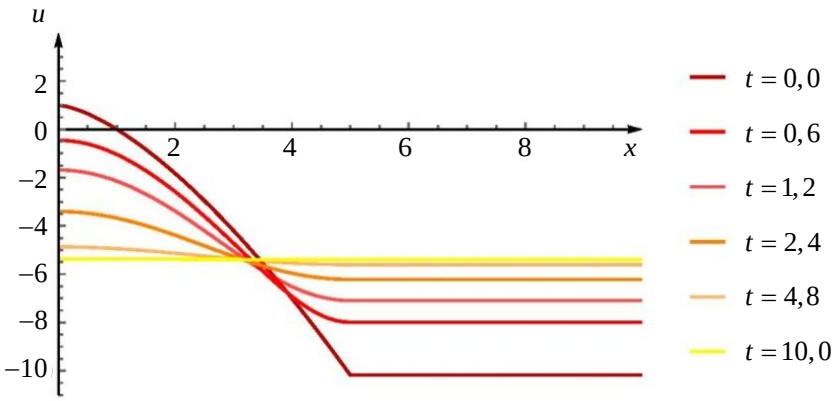


Рис. 5. Эволюция во времени решения из примера 4

Одномерный сферический случай. Исходная задача имеет вид:

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 < r < R, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(r), & 0 < r < R, \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r}\right) = 0, & r > R, \\ |u| < +\infty, \\ u \xrightarrow[r \to \infty]{} 0, \\ u|_{r=R-0} = u|_{r=R+0}, \\ u_r|_{r=R-0} = u_r|_{r=R+0}. \end{cases} \tag{11}$$

Решение будем искать на отрезке $[0, R_2]$. Условие на границе R_2 в данном случае отличается от плоского и цилиндрического:

$$u\,|_{x=R_2} = \frac{R_1}{R_2} u\,|_{x=R_1}\ .$$

Оно следует из (2) для данного случая.

Точным решением задачи при $0 < r < R$ является функция:

$$u(r,t) = \frac{2}{Rr}\sum_{n=0}^{\infty} \sin(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 t} \int_0^R \tilde{r} u_0(\tilde{r}) \sin(\lambda_n \tilde{r}) d\tilde{r}.$$

Собственные значения λ_n аналогичны таковым для плоского случая.

Решением уравнения Лапласа является функция $u = -\frac{c_1}{r}$, где $c_1 = c_1(t)$. Функцию $c_1(t)$ определим из условия сопряжения $u\,\big|_{r=R} = -\frac{c_1}{R}$.

Аппроксимируем оператор Лапласа так же, как и в (8), с соответствующими изменениями:

$$V_{h,i} A_{h,i} y = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} r_{i+1/2}^2 - \frac{y_i - y_{i-1}}{h} r_{i-1/2}^2, \tag{12}$$

где $V_{h,i} = \frac{1}{3}\left(r_{i+1/2}^3 - r_{i-1/2}^3\right)$ — объем ячейки.

В случае уравнения теплопроводности разностная схема для введенной ранее сетки примет вид:

$$\frac{y_i^k - y_i^{k-1}}{\tau} =$$

$$= \frac{3}{h_1^3\left(3i^2 + 1/4\right)}\left[\frac{y_{i+1}^k - y_i^k}{h_1}\left(i + 1/2\right)^2 h_1^2 - \frac{y_i^k - y_{i-1}^k}{h_1}\left(i - 1/2\right)^2 h_1^2\right].$$

Для уравнения Лапласа получим схему:

$$\frac{3}{h_1^3\left(3i^2 + 1/4\right)}\left[\frac{y_{i+1}^k - y_i^k}{h_1}\left(i + 1/2\right)^2 h_1^2 - \frac{y_i^k - y_{i-1}^k}{h_1}\left(i - 1/2\right)^2 h_1^2\right] = 0.$$

Чтобы аппроксимировать условие в нуле, проинтегрируем уравнение по ячейке $[0, h_1/2]$ с весом r^2, заменим производные разностными, интеграл — квадратурой. Получим:

$$\frac{y_0^k - y_0^{k-1}}{\tau} = \frac{6}{h_1}\frac{y_1^k - y_0^k}{h_1}. \tag{13}$$

Аппроксимируем условие сопряжения $u_r\,|_{r=R-0} = u_r\,|_{r=R+0}$, проинтегрировав уравнения на соответствующих отрезках с весом r^2 и учтя в результатах равенство потоков. Заменим производные разностными, интеграл — квадратурой, получим:

$$\frac{(2R-h_1)^2}{4h_1}\,y^k_{N_{h_1}-2} - \left(\frac{h_1}{24\tau}\left(12R^2-6Rh_1+h_1^2\right)+\frac{(2R-h_1)^2}{4h_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2R+h_2)^2}{4h_2}\right)y^k_{N_{h_1}-1}+\frac{(2R+h_2)^2}{4h_2}\,y^k_{N_{h_1}} = -\frac{h_1\left(12R^2-6Rh_1+h_1^2\right)}{24\tau}\,y^{k-1}_{N_{h_1}-1}. \qquad (14)$$

Пример 5. Задача (11) с $u_0(r) = \dfrac{16R^2(\pi-2)}{\pi^3 r}\sin\dfrac{\pi r}{2R}$.

Для нахождения ошибки в качестве точного решения взята частичная сумма ряда до 3 члена. Ошибка вычислена в равномерной норме.

Расчеты произведены при значениях $R=1$, $R_1=1{,}5$, $R_2=2$, $T=2$. В таблице 5 приведены результаты.

Таблица 5

Сравнение численного решения с точным при различных соотношениях шагов сетки в сферическом случае для примера 5

Количество узлов	Ошибка	Отношение ошибок
$N_{h_1}=N_{h_2}=21,\quad N_\tau=21$	$4{,}32566\cdot10^{-3}$	—
$N_{h_1}=N_{h_2}=41,\quad N_\tau=84$	$9{,}93134\cdot10^{-4}$	4,358
$N_{h_1}=N_{h_2}=81,\quad N_\tau=336$	$2{,}42449\cdot10^{-4}$	4,097
$N_{h_1}=N_{h_2}=161,\quad N_\tau=1344$	$6{,}02426\cdot10^{-5}$	4,025

На рис. 6 изображено изменение решения с течением времени.

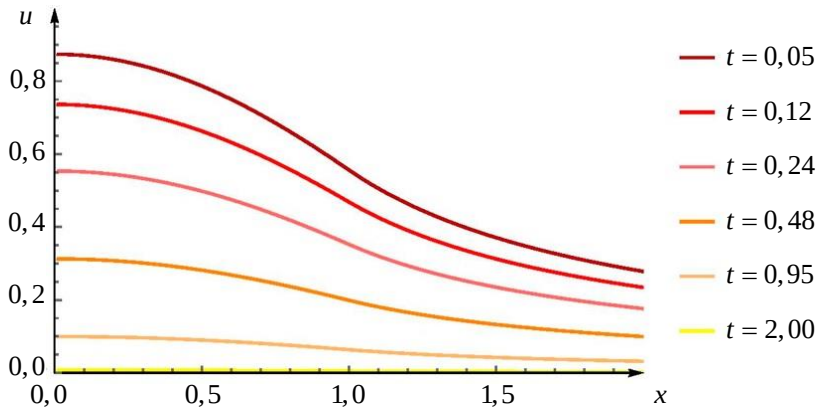


Рис. 6. Эволюция во времени решения из примера 5

Пример 6. Задача (11) с $u_0(r) = r^2$.

В таблице 6 приведены результаты.

Таблица 6

Сравнение численного решения с точным при различных соотношениях шагов сетки в сферическом случае для примера 6

Количество узлов	Ошибка	Отношение ошибок
$N_{h_1} = N_{h_2} = 21, \quad N_\tau = 21$	$3{,}38884 \cdot 10^{-3}$	—
$N_{h_1} = N_{h_2} = 41, \quad N_\tau = 84$	$7{,}77695 \cdot 10^{-4}$	4,356
$N_{h_1} = N_{h_2} = 81, \quad N_\tau = 336$	$1{,}89834 \cdot 10^{-4}$	4,096
$N_{h_1} = N_{h_2} = 161, \quad N_\tau = 1344$	$4{,}71678 \cdot 10^{-5}$	4,024

На рис. 7 приведено решение в различные моменты времени.

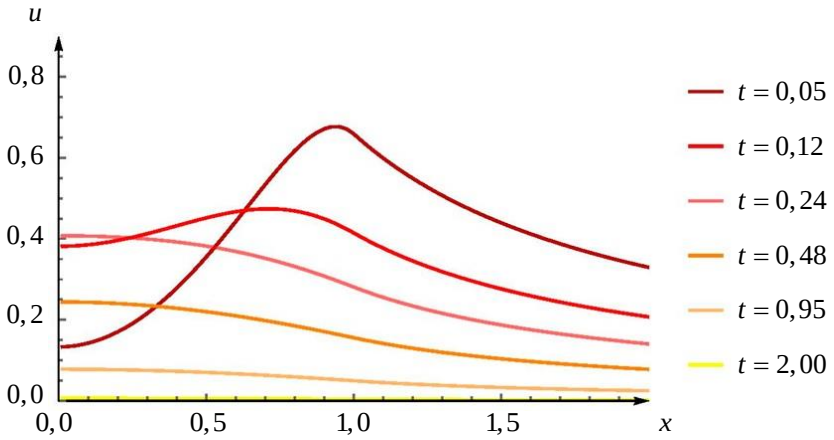


Рис. 7. Эволюция во времени решения из примера 6

Итерационный метод. Для численного решения задачи можно построить итерационный алгоритм [11, 15], в котором на каждой новой итерации решается задача с известным граничным условием. При этом происходит пересчет условия на внешней границе. На каждой новой $s-$ой итерации граничное условие будет вычисляться через значения на предыдущей $(s-1)-$ой, все остальные величины — неизвестные. В двумерном случае вместо (2) получим следующую задачу во внешней области:

$$\begin{cases} \Delta u^s = 0, \qquad \vec{r} \in D_2 \setminus D, \\ u^s\,|_{\partial D_2} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} u^{s-1}(r_1, \psi) \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi - \psi) + r_1^2}\, d\psi = P u^{s-1}. \end{cases}$$

Данный процесс будем применять для нахождения решения на каждом новом временном слое с использованием уже построенных

разностных схем. При таком способе система алгебраических уравнений принимает трехдиагональный вид, ее можно решить методом прогонки [13, 14]. Целью разработки метода является создание алгоритма для решения многомерных задач.

Рассмотрим сходимость [11] итерационного процесса. Ограничимся одномерным случаем. В нём $Pu = u$ для плоской и цилиндрической геометрий, $Pu = \frac{R_1}{R_2} u$ для сферического случая.

Утверждение 1. В одномерном случае итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии с показателем $\tilde{q}_0 = \frac{L_1 - L}{L_2 - L}$ — в плоском случае, $\tilde{q}_0 = \frac{R_1 - R}{R_2 - R}$ — в сферическом случае, $q_0 = \frac{\ln R_1 - \ln R}{\ln R_2 - \ln R}$ — в цилиндрическом случае.

Плоский случай. Изменения разностной схемы для расчета решения на новом k-ом временном слое являются очевидными. При этом у искомого решения добавляется индекс s — номер текущей итерации.

Приведем условие на границе L_2. Оно примет вид:

$$y^{k,s}_{N_{h_1}+N_{h_2}-2} = y^{k,s-1}_m,$$

где m — номер узла, попадающего на L_1.

На рис. 2 приведено решение в различные моменты времени задачи (3) с $u_0(x) = 1 - x$.

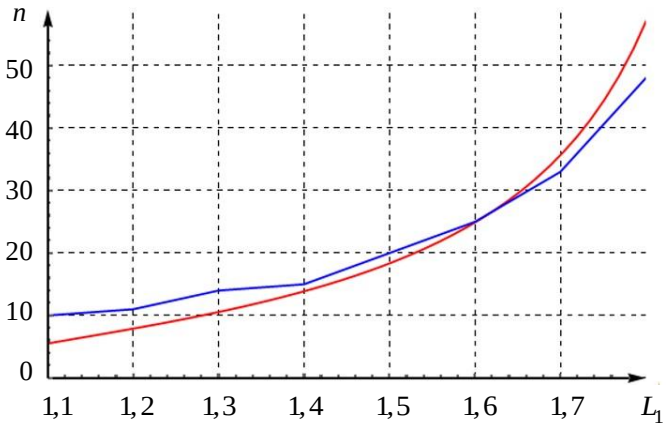


Рис. 8. Зависимость числа итераций от положения границы L_1:
— — результат проведения серии вычислительных экспериментов;
— — теоретическая оценка

Рассмотрим влияние параметров задачи на сходимость итерационного процесса. Исследуем влияние положения дополнительной границы. Для этого зафиксируем границы L, L_2, будем менять положение дополнительной границы L_1. Пусть $L=1$, $L_2=2$, $T=0,05$. На рис. 8 приведены результаты расчетов.

Чем ближе дополнительная граница к границе исходной области D, тем быстрее сходится итерационный процесс.

Согласно утверждению 1 должна наблюдаться сходимость со скоростью геометрической прогрессии с коэффициентом $q=\dfrac{L_1-L}{L_2-L}$. Тогда число итераций можно оценить по формуле

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln q}, \tag{15}$$

где ε — относительная ошибка. На рис. 8 приведены два графика. Красным цветом построен график зависимости априорной оценки необходимого числа итераций до сходимости по формуле (15), а синим — результат вычислительных экспериментов. Видим, что качественно и количественно графики близки.

Цилиндрический случай. Изменения разностной схемы для расчета решения на новом $k-$ом временном слое являются очевидными. Они вполне аналогичны плоскому случаю.

На рис. 9 показано решение в различные моменты времени задачи (7) с $u_0(\rho)=\rho^2$.

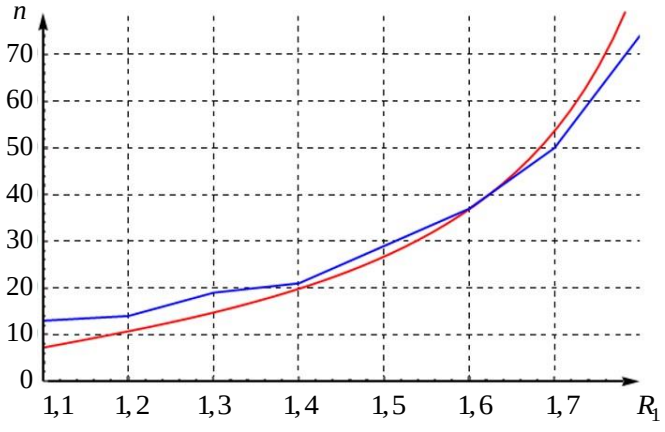


Рис. 9. Зависимость числа итераций от положения границы R_1
в цилиндрическом случае:
— результат проведения серии вычислительных экспериментов,
— теоретическая оценка

Проведем такое же исследование, как и в плоском случае. Зафиксируем границы R, R_2, будем менять положение дополнительной границы R_1. Пусть $R=1$, $R_2=2$, $T=0,05$. На рис. 9 приведены результаты расчетов.

Так же, как и в плоском случае, итерационный процесс сходится быстрее, если дополнительная граница ближе к границе области D.

По формуле из утверждения 1 получена оценка скорости убывания ошибки. График зависимости оценки числа итераций от положения границы изображён на рис. 9 красным цветом. Видно, что результаты априорной оценки хорошо совпадают с результатами расчётов.

Сферический случай. Отличие итерационного процесса данного случая от двух рассмотренных состоит в уравнении, аппроксимирующем условие на границе L_2. Оно примет вид:

$$y^{k,s}_{N_{h_1}+N_{h_2}-2}=\frac{R_1}{R_2}\,y^{k,s-1}_{m},$$

где m — номер узла, попадающего на R_1.

Решение задачи (11) с $u_0(r)=r^2$ приведено на рис. 7.

Зафиксируем границы R, R_2, будем менять положение дополнительной границы R_1. Пусть $R=1$, $R_2=2$, $T=0,05$. На рис. 10 приведены результаты расчетов.

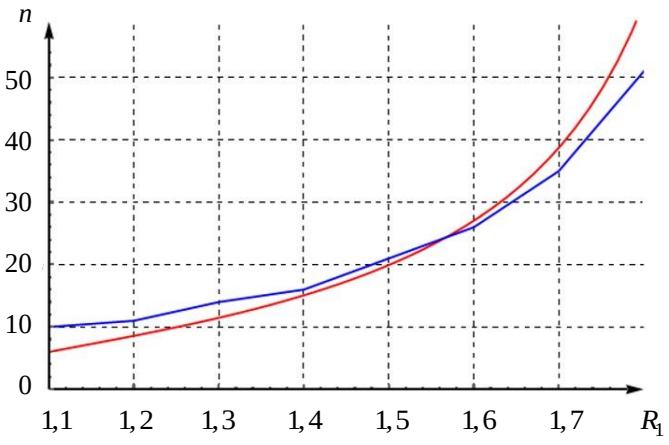


Рис. 10. Зависимость числа итераций от положения границы R_1
в сферическом случае:
— результат проведения серии вычислительных экспериментов;
— теоретическая оценка

По результатам расчётов (рис. 10) можно сделать вывод о хорошем совпадении ожидаемой и наблюдаемой в экспериментах скорости сходимости разработанного алгоритма.

Заключение. В работе построены и реализованы численные алгоритмы решения уравнения смешанного типа в неограниченной области. Рассмотрен одномерный случай в декартовой, в цилиндрической и в сферической системах координат. Алгоритм построен методом конечных разностей. Приведены примеры решения. Показано, что численное решение сходится к проекции точного решения на ограниченную область.

Исследована зависимость решения от положения дополнительной границы. Результаты расчетов показали, что такой зависимости нет.

Построен итерационный алгоритм численного решения задачи в неограниченной области. Проведено исследование зависимости скорости сходимости итерационного процесса от положения дополнительной границы. Получено, что чем ближе эта граница к границе исходной области D, тем меньше итераций требуется для получения решения с заданной точностью. Предложенный итерационный процесс может быть легко обобщён для решения многомерных задач.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Koleva M.N. Numerical solution of the heat equation in unbounded domains using quasi-uniform grids. *Lecture Notes in Computer Science*, 2006, vol. 3743, pp. 509–517.

[2] Рябенький В.С. *Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред*. Москва, Наука, 1987, 391 с.

[3] Брушлинский К.В., Рябенький В.С., Тузова Н.Б. Перенос граничного условия через вакуум в осесимметричных задачах. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1992, т. 32, № 12, с. 1929–1939.

[4] Брушлинский К.В. *Математические и вычислительные задачи магнитной гидродинамики*. Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009, 200 с.

[5] Bettess P. *Infinite Elements*. Paris, Penshaw Press., 1992, 264 p.

[6] Zienkiewicz O.C., Emson C., Bettess P. A novel boundary infinite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, vol. 83, no. 3, pp. 393–404.

[7] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. Москва, Наука, 1972, 735 с.

[8] Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. *Лекции по математической физике*. Москва, Изд-во МГУ, 1993, 352 с.

[9] Галанин М.П., Сорокин Д.Л. Разработка и применение численных методов решения задач в неограниченной области на основе третьей формулы Грина. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2018, № 246, с. 1–24.

[10] Галанин М.П., Низкая Т.В. Разработка и применение численного метода линейных эллиптических уравнений в неограниченной области. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2005, № 2, с. 1–29.

[11] Галанин М.П., Сорокин Д.Л. О решении внешних краевых задач для уравнения Лапласа. *Дифференциальные уравнения*, 2020, т. 56, № 7, с. 918–926.
[12] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. *Дифференциальные уравнения математической физики*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996, 228 с.
[13] Галанин М.П., Савенков Е.Б. *Методы численного анализа математических моделей*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 591 с.
[14] Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем*. Москва, Наука, 1971, 552 с.
[15] Вабищевич П.Н., Пулатов П.А. Численное решение внешней задачи Неймана. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1987, т. 27, № 4, с. 536–543.
[16] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. *Вычислительные методы для инженеров*. Москва, Изд-во МЭИ, 2008, 670 с.

Статья поступила в редакцию 12.01.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Галанин М.П., Сорокин Д.Л., Ухова А.Р. Методы численного решения дифференциального уравнения смешанного типа в неограниченной области. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 1, с. 91–109.

Галанин Михаил Павлович — д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник, и.о. заведующего отделом ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, профессор кафедры «Прикладная математика МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: galan@keldysh.ru

Сорокин Дмитрий Леонидович — младший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, ассистент «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sorokin.dmitr@yandex.ru

Ухова Анна Романовна — студентка кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: anna.r.ukhova@gmail.com

Methods for numerical solution of a mixed type differential equation in an unbounded domain

© M.P. Galanin[1,2], D.L. Sorokin[1,2], A.R. Ukhova[2]

[1]Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 125047, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Methods are developed for the numerical solution of the problem for a mixed–type equation in an unbounded domain in the case when the solution satisfies the heat equation in a bounded domain and the Laplace equation in the rest of the space. A method for set-ting artificial boundary conditions is proposed, which makes it possible to carry out calculations in a limited area. An iterative algorithm for finding a numerical solution in a bounded domain is constructed, such that the numerical solution converges to a projection of the exact solution onto a bounded domain. The rate of convergence of the iterative algorithm is investigated. The problem is solved in one-dimensional plane, in cylindrically and spherically symmetric cases. Examples of solutions are given.

Keywords: *mixed type equations, unbounded domain, iterative algorithm.*

REFERENCES

[1] Koleva M.N. Numerical solution of the heat equation in unbounded domains using quasi-uniform grids. *Lecture Notes in Computer Science*, 2006, vol. 3743, pp. 509–517.

[2] Ryabenky V.S. *Metod raznostnyh potencialov dlya nekotoryh zadach mekhaniki sploshnyh sred* [The method of difference potentials for some problems of continuum mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 391 p.

[3] Brushlinskii, K.V., Ryaben'kii, V.S., Tuzova, N.B. The transfer of boundary conditions across a vacuum in axisymmetric problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1992, vol. 32, no. 12, pp. 1757–1767.

[4] Brushlinsky K.V. *Matematicheskie i vychislitel'nye zadachi magnitnoj gidrodinamiki* [Mathematical and computational problems of magnetic hydrodynamics]. Moscow, BINOM. Laboratory of Knowledge Publ., 2009, 200 p.

[5] Bettess P. *Infinite Elements*. Paris, Penshaw Press., 1992, 264 p.

[6] Zienkiewicz O.C., Emson C., Bettess P. A novel boundary infinite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, vol. 83, no. 3, pp. 393–404.

[7] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 735 p.

[8] Sveshnikov A.G., Bogolyubov A.N., Kravtsov V.V. *Lekcii po matematicheskoj fizike* [Lectures on mathematical physics]. Moscow, MSU Publ., 1993, 352 p.

[9] Galanin M.P., Sorokin D.L. Development and application of numerical methods for solving tasks in unlimited regions based on the third green formula. *Keldysh Institute Preprints*, 2018, no. 246, pp. 1–24.

[10] Galanin M.P., Nizkaya T.V. Development and application of a numerical method for solution of linear elliptic equations in unbounded region. *Keldysh Institute Preprints*, 2005, no. 2, pp. 1–29.

[11] Galanin M.P., Sorokin D.L. Solving exterior boundary value problems for the Laplace equation. *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 7, pp. 890–899.

[12] Martinson L.K., Malov Yu.I. *Differencial'nye uravneniya matematicheskoj fiziki* [Differential equations of mathematical physics]. Moscow, BMSTU Publ., 1996, 228 p.

[13] Galanin M.P., Savenkov E.B. *Metody chislennogo analiza matematicheskih modelej* [Methods of numerical analysis of mathematical models]. Moscow, BMSTU Publ., 2010, 591 p.

[14] Samarskiy A.A. *Vvedenie v teoriyu raznostnyh skhem* [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 552 p.

[15] Vavishchevich P.N., Pulatov P.A. Numerical solution of the Neumann exterior problem. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1987, vol. 27, iss. 2, pp. 141–146.

[16] Amosov A.A., Dubinsky Yu.A., Kopchenova N.V. *Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov* [Computational methods for engineers]. Moscow, MEI Publ., 2008, 670 p.

Galanin M.P., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Chief Researcher, Acting Head of the Department of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Professor of Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: galan@keldysh.ru

Sorokin D.L., Junior researcher of the of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, assistant of Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sorokin.dmitr@yandex.ru

Ukhova A.R., student of Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: anna.r.ukhova@gmail.com