УДК 519.8 DOI: 10.18698/2309-3684-2021-1-6676

Вероятностные модели двухсторонних боевых действий. Сравнение результатов

© В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Проведено сравнение результатов вычисления основных показателей боя при использовании разработанных авторами стохастических моделей двухсторонних боевых действий при различных зависимостях эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя. Показано влияние различных факторов на расхождения в вычислениях этих показателей при использовании данных моделей. Установлено, что для решения большинства военно-технических и военно-тактических задач можно использовать любую из разработанных авторами моделей двухсторонних боевых действий.

Ключевые слова: *модель двухсторонних боевых действий, непрерывный марковский процесс, боевая единица, эффективная скорострельность*

Введение. Для оценки работоспособности проектируемых технических систем возникает необходимость разработки математических моделей их функционирования [1–2]. Основой оценки разрабатываемых образцов вооружения и военной техники являются показатели их боевой эффективности, так как они в конечном итоге определяют степень приспособленности конкретного образца к решению поставленных боевых задач [3–4]. Для большей полноты и достоверности такой оценки необходимо использование моделей двухсторонних боевых действий, так как они позволяют значительно точнее учесть все факторы, влияющие на эффективность в реальных боевых условиях, чем модели без учёта ответного огня противника [5]. А так как процесс протекания боя является стохастическим, более предпочтительным оказывается использование вероятностных моделей, поскольку они позволяют исследовать бой со значительно большей степенью точности и полноты, чем детерминированные модели (модели динамики средних) [6–11].

Одним из возможных способов описания боя является применение теории непрерывных марковских процессов [12]. Процесс, протекающий в системе, называется марковским, если в каждый момент времени вероятности всех состояний системы в будущем зависят только от её состояния в настоящий момент и не зависят от того, каким образом система пришла в это состояние [13].

Последовательность выстрелов, производимых каждой участвующей в боевых действиях единицей, представляется в виде пуассоновского потока событий [4]. Используется приём, заключающийся в переходе от потока выстрелов к потоку успешных выстрелов, который также полагается пуассоновским [4]. Выстрел считается успешным, если он поражает боевую единицу противника [3]. При этом полагается, что одним выстрелом можно поразить не более одной боевой единицы.

Пусть в начале боя сторона X имеет m однотипных боевых единиц, а сторона $Y - n$ также однотипных боевых единиц, не обязательно однородных с единицами стороны X.

Введём следующие обозначения: p_x, p_y — вероятности поражения боевой единицы противника одним выстрелом единицы сторон X и Y соответственно, λ_x, λ_y — практические скорострельности боевых единиц сторон X и Y соответственно, величины $v = p_x \lambda_x$ и $u = p_y \lambda_y$ назовём эффективными скорострельностями боевых единиц сторон.

Ранее [14–15] было показано, что принятие их в течение всего боя постоянными может привести к значительным ошибкам при вычислении основных показателей боя и существенно исказить ход его протекания. Ведь при отражении атаки противника происходит сближение сторон, что приводит к заметному увеличению величин p_x, p_y и в меньшей мере величин λ_x и λ_y, как у наступающей, так и у обороняющейся стороны.

Проведённые теоретические исследования, а также экспериментальные данные показали, что возможными аппроксимациями величин $y(t)$ и $u(t)$ являются экспоненциальные функции времени боя, то есть

$$\begin{cases} v(t) = k_x e^{a_x t}, \\ u(t) = k_y e^{a_y t}, \end{cases} \tag{1}$$

а также линейные функции времени боя, то есть

$$\begin{cases} v(t) = k_x (1 + a_x t), \\ u(t) = k_y (1 + a_y t). \end{cases} \tag{2}$$

Настоящая статья посвящена сравнению результатов моделирования боя при использовании вышеуказанных зависимостей эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя.

Описание процесса протекания боя. Основные математические зависимости. Пусть обе противоборствующие стороны имеют полную и не запаздывающую информацию о состоянии боевых единиц противника (поражены или нет) и ведут огонь только по уцелевшим единицам. Тогда при одновременном открытии огня обеими сторонами процесс протекания боя опишется системой уравнений

$$
\begin{gathered}
F_{i0}{}'(t) = iv(t)F_{i1}(t), \quad i = \overline{1;m}, \\
F_{0j}{}'(t) = ju(t)F_{1j}(t), \quad j = \overline{1;n}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F_{ij}{}'(t) = -\big(iv(t) + ju(t)\big)F_{ij}(t) + \\
+iv(t)F_{i,j+1}(t) + ju(t)F_{i+1,j}(t), \\
i = \overline{1;m-1}, \;\; j = \overline{1;n-1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F'_{mj}(t) = -\big(mv(t) + ju(t)\big)F_{mj}(t) + mv(t)F_{\mathrm{m},j+1}(t), \quad j = \overline{1;n-1}, \\
F'_{in}(t) = -\big(iv(t) + nu(t)\big)F_{in}(t) + nu(t)F_{\mathrm{i+1,n}}(t), \quad i = \overline{1;m-1}, \\
F'_{mn}(t) = -\big(mv(t) + nu(t)\big)F_{mn}(t)
\end{gathered}
\tag{3}
$$

с начальными условиями

$$
\begin{cases}
F_{mn}(0) = 1, \\
F_{ij}(0) = 0 \;\text{ при }\; i + j < m + n,
\end{cases}
\tag{4}
$$

где $F_{ij}(t)$ — вероятности того, что в момент t сохранились i единиц стороны X и j единиц стороны Y (вероятности состояний $i:j$), $F'_{ij}(t)$ — их производные по времени.

Если же сторона X в течение времени t_c ведёт по противнику огонь, не испытывая ответного противодействия, то до момента t_c открытия стороной Y ответного огня процесс протекания боя опишется системой уравнений

$$
\begin{cases}
F'_{m0}(t) = mv(t)F_{m1}(t), \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
F'_{mj}(t) = mv(t)\big(F_{\mathrm{m,j+1}}(t) - F_{mj}(t)\big); \quad j = \overline{1;n-1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
F'_{mn}(t) = -mv(t)F_{mn}(t), \\
F'_{ij}(t) = 0; \quad i = \overline{0;m-1}; \; j = \overline{0;n}.
\end{cases}
$$

с начальными условиями (4).

В момент времени t_c получаем отличные от нуля вероятности $F_{mj}\left(t_c\right)$, $j=\overline{0;n}$, вероятности остальных состояний будут равны нулю. Формулы для вычисления вероятностей $F_{mj}\left(t_c\right)$ при условиях (1) и (2) приведены соответственно в [16] и [17]. Дальнейшее протекание боя после открытия стороной Y ответного огня опишется системой уравнений (3). При упреждающем ударе стороны Y процесс протекания боя опишется аналогично.

Анализ результатов расчётов. Введём следующие обозначения:

$$\mu=\frac{\sqrt{k_x k_y}}{a_x+a_y};$$

$$\nu=\frac{a_y}{a_x+a_y};$$

$$æ=\frac{n}{m}\sqrt{\frac{k_y}{k_x}}.$$

Параметр μ характеризует степень роста интенсивности протекания боя (чем меньше μ, тем быстрее она растает). В реальных боевых условиях $\mu \geq 2$. Параметр ν характеризует относительную скорость изменения эффективных скорострельностей боевых единиц одной из противоборствующих сторон относительно другой в процессе боя. Отметим, что $\nu \in \left[0;1\right]$. При $\nu=1$ значение $a_x=0$ (то есть эффективные скорострельности боевых единиц стороны X в течение всего боя постянны), при $\nu=0$ величина $a_y=0$, а при $\nu=0{,}5$ получаем $a_x=a_y$. Параметр æ назовём параметром начального соотношения сил. Отметим, что для модели динамики средних с постоянными эффективными скорострельностями при одновременном открытии огня обеими сторонами значение $æ=1$ является условием равенства сил противоборствующих группировок [18].

Авторами разработаны численные алгоритмы, позволяющие вычислить основные показатели боя при условиях (1) и (2). К ним, в первую очередь, относятся математические ожидания относительных количеств сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя M_x и M_y, а также вероятности победы P_{0x} и P_{0y} сторон X и Y соответственно. Эти величины находятся следующим образом:

$$M_x = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} iF_{io}(\infty),$$

$$M_y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} jF_{oj}(\infty),$$

$$P_{ox} = \sum_{i=1}^{m} F_{io}(\infty),$$

$$P_{oy} = \sum_{j=1}^{n} F_{oj}(\infty),$$

где $F_{ij}(\infty)$ — вероятности того, что к концу боя сохранились i единиц стороны X и j единиц стороны Y.

Полагаем, что бой ведётся до полного уничтожения одной из противоборствующих сторон, поэтому окончательными являются состояния $1:0,...,i:0,...m;\ 0:1,...,0:j,...,0:n$.

На рис. 1–4 представлены результаты расчётов, полученные с использованием разработанных авторами численных алгоритмов вычисления основных показателей боя. Значения M_x и M_y, полученные при условии (1), показаны соответственно красными и зелёными линиями. А значения M_x и M_y, полученные при (2) — соответственно синими и чёрными. Рис. 1–3 соответствуют значению $\mu = 2$, рис. 4 — значению $\mu = 4$. Рис. 1, 2 и 4 соответствуют значению $\nu = 0$, рис. 3 — значению $\nu = 1$, то есть тем значениям ν, которые наиболее существенно влияют на ход протекания боя и его основные показатели. Рис. 1 и 4 соответствуют одновременному открытию огня противоборствующими сторонами, рис. 2 и 3 — упреждающему удару стороны X при $\overline{t_c} = 0,5$, где $\overline{t_c}$ — приведённое время нанесения стороной X упреждающего удара. При условии (1) $\overline{t_c} = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{a_x}\left(e^{a_x t} - 1\right)$, а при (2) $\overline{t_c} = \sqrt{k_x k_y}\left(t_c + \frac{a_x t_c^2}{2}\right)$. Значение $\overline{t_c} = 0,5$ соответствует проведению единицами стороны X по одному–двум выстрелам до открытия стороной Y ответного огня. В реальных боевых условиях после проведения боевой единицей одного–двух выстрелов она будет обнаружена и по ней будет открыт ответный огонь. Все рисунки соответствуют равным начальным численностям группировок. При других соотношениях численностей группировок получаем аналогичную картину.

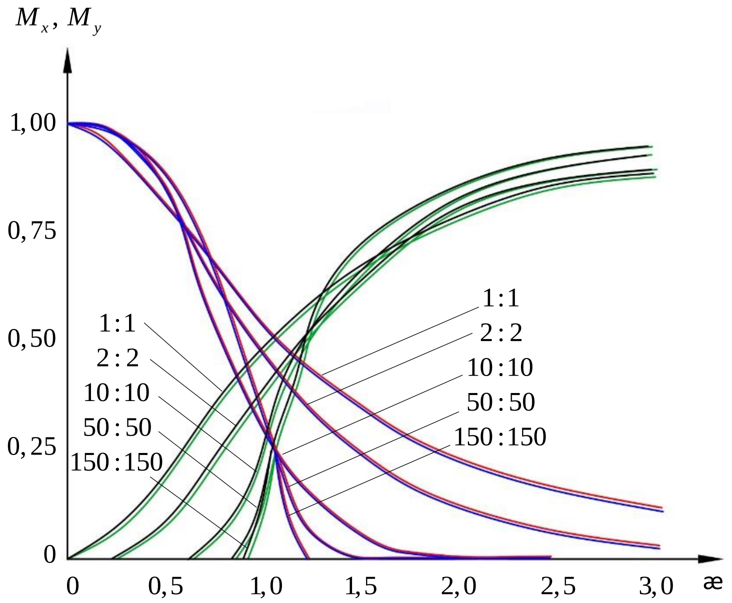

Рис. 1. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся к окончанию боя боевых единиц сторон при одновременном открытии огня обеими сторонами $(\mu = 2,\ \nu = 0)$

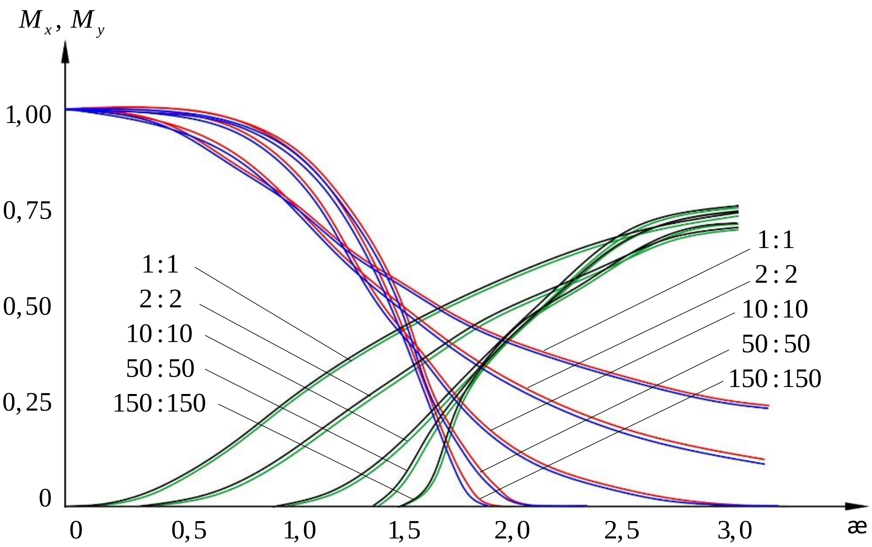

Рис. 2. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся к окончанию боя боевых единиц сторон при упреждающем ударе стороны X $(\mu = 2, \nu = 0, \overline{t_c} = 0,5)$

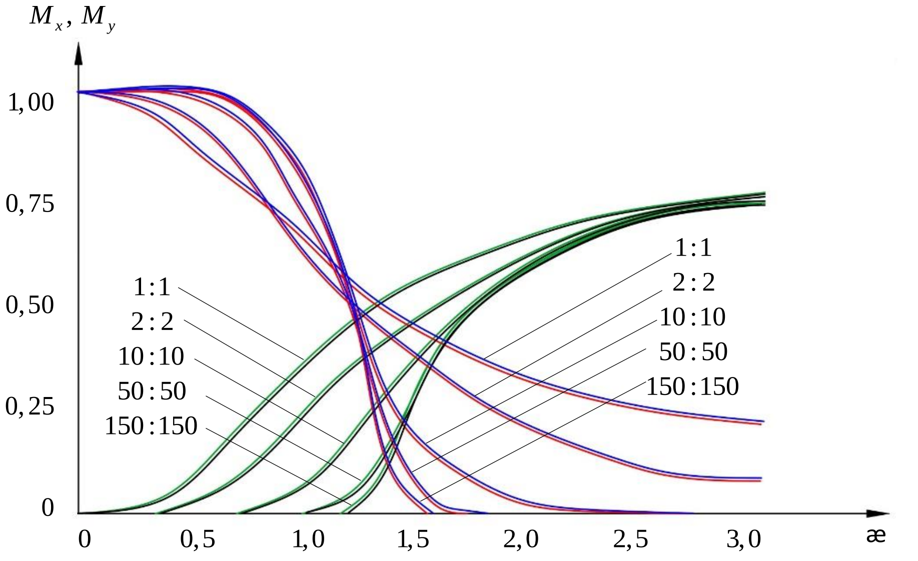

Рис. 3. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся к окончанию боя боевых единиц сторон при упреждающем ударе стороны X $\left(\mu = 2, \nu = 1, \overline{t}_c = 0{,}5\right)$

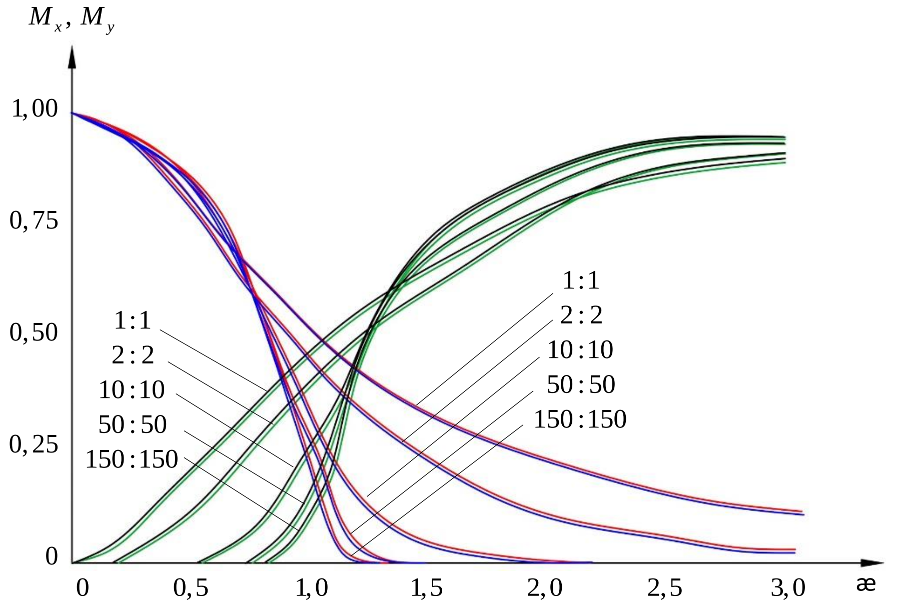

Рис. 4. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся к окончанию боя боевых единиц сторон при одновременном открытии огня обеими сторонами $\left(\mu = 4,\ \nu = 0\right)$

Как показали результаты расчётов, расхождения в значениях M_x и M_y уменьшаются с увеличением μ (уменьшением скорости роста интенсивности протекания боя). Если при одновременном открытии огня обеими сторонами эти расхождения при $\mu = 2$ не превосходят 3%, то при $\mu = 4$ они не превосходят 2%. Вместе с тем, эти расхождения увеличиваются при пропорциональном росте начальных численностей группировок. Так, при упреждающем ударе одной из противоборствующих сторон для боя 1:1 эти расхождения не превосходят 1,2%, для боя 10:10 — 2,5%, А для боя 150:150 — 7%. Также наблюдается некоторое увеличение данных расхождений при упреждающем ударе одной из сторон по сравнению с одновременным открытием огня обеими сторонами.

Также отметим, что наибольшие расхождения в значениях M_x и M_y получаются при исследовании боя близких по силам группировок. Так, если вероятность победы одной из сторон меньше 0,3 (или больше 0,7), то эти расхождения не превосходят 2%. Таким образом, при решении большинства военно-технических и военно–тактических задач можно использовать обе предложенные авторами модели двухстороннего боя.

Выводы. Результаты проведённых исследований позволяют сделать следующие выводы.

- Проведено сравнение результатов вычисления основных показателей боя при использовании разработанных авторами вероятностных моделей боя при различных зависимостях эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени протекания боя
- Эти расхождения уменьшаются при снижении роста интенсивности протекания боя и увеличиваются при пропорциональном росте начальных численностей противоборствующих группировок.
- При упреждающем ударе одной из противоборствующих сторон расхождения в вычислениях основных показателей боя несколько больше, чем при одновременном открытии огня обеими сторонами.
- Наибольшие расхождения в вычислении основных показателей боя получаются при исследовании боя достаточно близких многочисленных группировок при упреждающем ударе одной из них. В этих случаях следует выбрать более подходящую для данной боевой ситуации модель боя.
- При исследовании боя небольших по численности группировок можно использовать обе предложенные модели без достаточно заметных погрешностей в вычислении основных показателей боя.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров А.А., Димитриенко Ю.И. Математическое и компьютерное моделирование — основа современных инженерных наук. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 3–4.

[2] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

[3] Чуев Ю.В. *Исследование операций в военном деле.* Москва, Воениздат, 1970, 270 с.

[4] Вентцель Е.С. *Исследование операций: задачи, принципы и методология*. Москва, УРСС, 2007, 208 с.

[5] Ткаченко П.Н. *Математические модели боевых действий*. Москва, Советское радио, 1969, 240 с.

[6] Глушков И.Н. Выбор математической схемы при построении модели боевых действий. *Программные продукты и системы*, 2010, № 1, с. 1–9.

[7] Ильин В.А. Моделирование боевых действий сил флота. *Программные продукты и системы*, 2006, № 1, с. 23–27.

[8] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to Operations Research*. New York, McGraw-Hill, 2005, 998 p.

[9] Jaiswal N.K. *Military Operations Research: Quantitative Decision Making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, 388 p.

[10] Shamahan L. *Dynamics of Model Battles*. New York, Physics Department, State University of New York, 2005, 43 p.

[11] Winston W.L. *Operations Research: Applications and Algorithms*. Belmont, Duxbury Press, 2001, 128 p.

[12] Алексеев О.Г., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. *Марковские модели боя*. Москва, Министерство обороны СССР, 1985, 85 с.

[13] Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, КноРус, 2016, 658 с.

[14] Дубограй И.В., Рябцев Р.А., Чуев В.Ю. Вероятностные модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок при экспоненциальных зависимостях эффективных скорострельностей боевых единиц от времени боя. *Известия российской академии ракетных и артиллерийских наук*, 2018, № 4 (104), с. 68–75.

[15] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Стохастические модели двухсторонних боевых тдействий многочисленных группировок при линейных зависимостях эффективнх скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 2, с. 122–132.

[16] Дубограй И.В., Рябцев Р.А., Чуев В.Ю. Стохастические модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок с переменными эффективными скорострельностями боевых единиц сторон при упреждающем ударе одной из них. *Вооружение и экономика*, 2018, № 4, с. 21–30.

[17] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Вероятностные модели двухсторонних боевых действий с линейными зависимостями эффективных скорострелностей боевых единиц сторон при упреждающем ударе одной из них. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 2, с. 84–98.

[18] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. *Модели динамики средних двусторонних боевых действий многочисленных группировок*. LAP LAMBERT Academie Publishing, 2014, 80 с.

Статья поступила в редакцию 21.12.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Вероятностные модели двухсторонних боевых действий. Сравнение результатов. *Математическое моделирование и численные методы,* 2021, № 1, с. 66–76.

Чуев Василий Юрьевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: vacilious@mail.ru

Дубограй Ирина Валерьевна — доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

Probabilistic models of bilateral fighting. Comparison of results

© V.Yu. Chuev, I.V. Dubograi

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

It is made a comparison of the results of calculating of the main indicators of the battle with the use of stochastic models developed by the authors with different dependences of the effective rate of fire of the combat units of the parties on the time of the battle. The influence of various factors on the differences in the calculations of these indicators when using these models is shown. It is established that for the solution of the majority of military -technical and military-tactical tasks it is possible to use any of the models of bilateral military operations developed by authors.

Keywords*: model of bilateral military operations, continuous Markov process, combat unit, effective rate of fire*

REFERENCES

[1] Alexandrov A.A., Dimitrienko Yu.I. Mathematical and computer modeling-the basis of modern engineering sciences. *Mathematical modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 3–4.

[2] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Special features of mathematical modeling of technical instruments. *Mathematical modeling and Computational Methods,* 2014, no. 1, pp. 5–17.

[3] Chuev Yu.V. *Issledovanie operatsiy v voennom dele* [Operations research in military arts]. Moscow, Voenizdat Publ., 1970, 270 p.

[4] Venttsel E.S. *Issledovanie operatsiy: zadachi, printsipy, metodologiya* [Operations research: objectives, principles, methodology]. Moscow, URSS Publ., 2007, 208 p.

[5] Tkachenko P.N. *Matematicheskie modeli boevykh deistviy* [Mathematical models of combat operations]. Moscow, Sovetskoe radio, 1969, 240 p.

[6] Glushkov I.N. Vybor matematicheskoj skhemy pri postroenii modeli boe-vyh dejstvij [The choice of a mathematical scheme when constructing a model of combat operations]. *Software & Systems*, 2010, no. 1, pp. 1-9.

[7] Ilyin V.A. Modelirovanie boevyh dejstvij sil flota [Modeling of combat operations of fleet forces]. *Software & Systems*, 2006, no. 1, pp. 23–27.

[8] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to Operations Research*. New York, McGraw-Hill, 2005, 998 p.

[9] Jaiswal N.K. *Military Operations Research: Quantitative Decision Making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, 388 p.

[10] Shamahan L. *Dynamics of Model Battles*. New York, Physics Department, State University of New York, 2005, 43 p.

[11] Winston W.L. *Operations Research: Applications and Algorithms*. Belmont, Duxbury Press, 2001, 128 p.

[12] Alekseev O.G., Anisimov V.G., Anisimov E.G. *Markovskie modeli boya* [Markov's battle models]. Moscow, the USSR Ministry of Defense Publ., 1985, 85 p.

[13] Venttsel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, KnoRus Publ., 2016, 658 p.

[14] Dubogray I.V., Ryabtsev R.A., Chuev V.Yu. Probabilistic models of many groups bilateral hostilities with exponential dependencies of the effective firing rate of military units from the time of the battle. *Proceedings of the RARAS*, 2018, no. 4 (104), pp. 68–75.

[15] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. Stochastic models of bilateral hostilities of numerous groups while linear dependence of military units' effective firing rate on the duration of the battle. *Mathematical modeling and Computational Methods*, 2018, no. 2, pp. 122–132.

[16] Chuev V.Yu., Dubograi I.V., Ryabtsev R.A. Tochastic models of bilateral hostilities of numerous groups with variable effective rate of fire of combat units of the parties with a pre-emptive strike of one of them. Armament and Economics, 2018, no. 4, pp. 21–30.

[17] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. Probabilistic models of bilateral combat operations with linear dependencies of effective rates of fire of combat units of the parties on the time of the battle with a preemptive strike of one of them. *Mathematical modeling and Computational Methods*, 2019, no. 2, pp. 84–98.

[18] Chuev V.Yu., Dubograi I.V. *Modeli dinamiki srednih dvustoronnih boevyh dejstvij mnogochislennyh gruppirovok* [Models of dynamics of average bilateral military operations of numerous groups]. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 80 p.

Chuev V.Yu., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: vacilious@mail.ru

Dubogray I.V., Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru