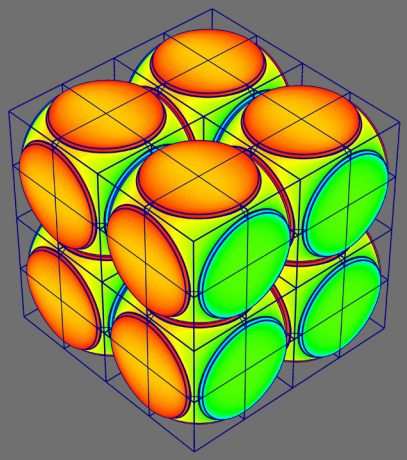
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Каримов С.Б., Кольжанова Д.Ю. Моделирование напряжений в композитной нелинейно упругой панели при цилиндрическом изгибе. Математическое моделирование и численные методы, 2021, № 1, с. 3–30.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/240/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.214
29.01.2026 01:00:28

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2021-1-330

Моделирование напряжений в композитной нелинейно упругой панели при цилиндрическом изгибе

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева С.Б. Каримов, Д.Ю. Кольжанова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена задача о расчете напряженно деформированного состояния композитной слоистой панели при цилиндрическом изгибе в условиях конечных деформаций. Для решения задачи применен метод асимптотического осреднения периодических нелинейно упругих структур с конечными деформациями, подробно разработанный ранее в предшествующих работах авторов. Особенностью данной задачи является использование универсальных моделей определяющих соотношений для изотропных компонентов композита, а также для композита в целом, который является трансверсально изотропной нелинейно упругой средой. Универсальные модели позволяют получать решение задач в рамках единого алгоритма решения одновременно для нескольких классов моделей нелинейно упругих сред, соответствующих различным сопряженным парам тензоров напряжений - деформаций. Для задачи о цилиндрическом изгибе композитной панели получено аналитическое решение. Проведен численный анализ решения на примере композита, ячейка периодичности которого состоит из 2-х слоев: полиуретана и резины. Показано, что для тонких панелей напряжения, как осредненные, так и истинные, практически не зависят от класса модели определяющих соотношений. В тоже время для более толстых панелей напряжения существенно различаются для разных классов моделей слоев композита.

Ключевые слова: *конечные деформации, композиты, цилиндрический изгиб, композитная панель, несжимаемые среды, трансверсально-изотропная среда, асимптотическое осреднение, универсальные модели упругих сред, тензор напряжений Коши*

Введение. Композиционные материалы, способные деформироваться без разрушения при конечных (больших) деформациях, представляют собой важный для различных прикладных задач класс материалов. Эти материалы применяют, например, для создания протекторов автомобильных шин, для различных амортизаторов, звукоизоляторов и других элементов конструкций. Замечательное свойство композиционных материалов — возможность регулирования их характеристик путем изменения сочетания составляющих компонентов — позволяет создавать новые композиты, индивидуальные для каждого элемента конструкции, достигая при этом максимальных эксплуатационных свойств проектируемой конструкции в целом. При этом важную роль играют методы расчета свойств композитов, позволяющие подбирать сочетания компонентов, обеспечивающие требуемые характеристики (эффективные, т.е. осредненные в некотором смысле свойства композитов).

Для композитов с малыми деформациями существует большое

число различных методов прогнозирования эффективных свойств по свойствам составляющих композитов, отметим лишь некоторые работы [1–5]. Отдельно выделим метод асимптотического осреднения (МАО) [6–10], называемый также методом гомогенизации, который в настоящее время является наиболее математически обоснованным и эффективным, с точки зрения возможностей и широты применения для прогнозирования самых различных свойств композитов с произвольными структурами армирования. Этот метод МАО применяют также и для прогнозирования эффективных свойств композитов при конечных деформациях [11–16]. Ввиду нелинейности задачи механики при конечных деформациям [17–20], метод МАО встречает определенные сложности в реализации, в том силе он существенно зависит от используемой модели определяющих соотношений. В работах [13–16] был развит этот метод для так называемых универсальных моделей [21] сред с конечными деформациями. В работах [14–16] был предложен алгоритм построения эффективных нелинейных определяющих соотношений для слоистых композитов с помощью построения упругого потенциала для эффективной трансверсально-изотропной среды и аппроксимации численных решений локальных задач на ячейке периодичности с помощью этого потенциала.

Целью настоящей работы применение предложенного в метода для решения задачи для о цилиндрическом изгибе панели из нелинейно упругого композита. Для изотропных сред для одного класса моделей определяющих соотношений эта задача была решена в работах [13–16]. В данной работе рассматривается цилиндрический изгиб слоистой панели с периодической структурой, которая обладает эффективными трансверсально-изотропными свойствами, при этом используются универсальные модели определяющих соотношений.

Универсальная модель нелинейно упругих изотропных компонентов композита. Рассмотрим неоднородную упругую твердую среду (композит) V с конечными деформациями, которая в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{K}$ обладает периодической структурой и для нее можно выделить повторяющийся элемент — ячейку периодичности (ЯП) $\overset{\circ}{V}_{\xi}$, которая состоит из N — компонент $\overset{\circ}{V}_{\alpha\xi}$, $\alpha = 1,...,N$. Эйлеровы координаты каждой материальной точки в отсчетной и актуальной конфигурациях обозначаются как x^k и $\overset{\circ}{x}{}^k$, им соответствует декартов базис $\overline{\mathbf{e}}_i$ соответственно, а лагранжевы координаты обозначим как X^i. Последние полагаются совпадающими с декартовыми в отсчетной конфигурации, т.е. $X^i = \overset{\circ}{x}{}^i$. Каждый компонент композита будем полагать несжимаемым, подчиняющимся универсальной модели класса B_n, по классификации, предложенной в [21], для него имеют место следующие определяющие соотношения

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-III}\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \\ +\mu\left(n-III\right)^2\left(\left(\frac{1+\beta}{n-III}+\left(1-\beta\right)I_1\left(\overset{(n)}{\mathbf{G}}\right)\right)\mathbf{E}-\left(1-\beta\right)\overset{(n)}{\mathbf{G}}\right), \tag{1}$$

где $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ — энергетический тензор напряжений [22], $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$ — энергетическая мера деформации [22], которая выражается через градиент деформации $\mathbf{F}$

$$\overset{(n)}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n-III}(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F})^{\frac{n-III}{2}}, \quad n = I, II, IV, V, \tag{2}$$

где $\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1}$ — обратный тензор, $I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}})$ — первый главный инвариант (след) тензора $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$, $\mathbf{E}$ — метрический тензор, p —гидростатическое давление, μ и β — упругие константы компонента, n — номер энергетической пары, принимающий следующие значения: $n = I, II, IV, V$.

Тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$ с помощью соотношений (1) вычисляется следующим образом

$$\mathbf{T} = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{T}}, \tag{3}$$

где ${}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}$ — тензор энергетической эквивалентности [22], зависящий только от градиента деформации $\mathbf{F}$.

Универсальная модель нелинейно упругого трансверсально-изотропного композита. Используя результаты работ [13–16], для композита с периодической структурой можно применить метод асимптотического осреднения. Для этого вводим малый параметр $\kappa = (\ell / L) << 1$, как отношение характерного размера ℓ ЯП к характерному размеру L всего композита (размеры определены в $\overset{\circ}{K}$), а также вводим локальные ξ^i лагранжевы координаты в $\overset{\circ}{K}$, которые связаны с X^i следующими соотношениями:

$$\xi^i = \frac{\overline{X}^i}{\kappa}, \quad \overline{X}^i = \frac{X^i}{L}. \tag{4}$$

Тогда все функции $\Omega(\xi^i, X^i)$, описывающие движение компонентов композита, в том числе определяющие соотношения (1), являются

периодическими функциями от ξ^i и зависящими от глобальных лагранжевых координат X^i. Строятся асимптотические разложения функций $\Omega(\xi^i, X^i)$ по малому параметру

$$\Omega(\xi^i, X^i) = \Omega^{(0)}(X^i, \xi) + \kappa\Omega^{(0)}(X^i, \xi) + o(\kappa), \tag{5}$$

где $o(\kappa)$ — величины, имеющие более высокий порядок малости по сравнению с $\kappa\Omega^{(0)}(X^i, \xi)$. Вводятся осреднение таких функций по ЯП

$$\bar{\Omega}(X^i) = \int\limits_{\overset{o}{V}_\xi} \Omega(\xi^i, X^i) d\overset{o}{V}_\xi. \tag{6}$$

Согласно методу МАО для композита в целом формулируются осредненные определяющие соотношения, связывающие осредненные энергетические тензоры напряжений $\overset{(n)}{\bar{\mathbf{T}}}$ и осредненные энергетические меры деформаций $\overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}}$ [14]

$$\overset{(n)}{\bar{\mathbf{T}}} = -\frac{\bar{p}}{n - III}\overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}}^{-1} + \sum_{\gamma=1}^{4} \varphi_\gamma \mathbf{I}_{\gamma\mathbf{G}}, \tag{7}$$

где $\mathbf{I}_{\gamma\mathbf{G}} = \partial I_\gamma(\overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}}) / \partial \overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}}$ — производные от инвариантов меры деформаций $\overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}}$. В [13, 14] показано, что слоистый нелинейно-упругий композит является трансверсально изотропной средой, и для него тензоры производных $I_{\gamma G}$ имеют следующий вид

$$\begin{gathered} \mathbf{I}_{1G} = \mathbf{E} - \mathbf{c}_3^2, \;\; \mathbf{I}_{2G} = \mathbf{c}_3^2, \;\; \mathbf{I}_{3G} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2\right) \cdot\cdot \overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}}, \\ \mathbf{I}_{4\mathbf{G}} = \left(2\mathbf{\Delta} - \left(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2\right) - 2\mathbf{c}_3^2 \otimes \mathbf{c}_3^2\right) \cdot\cdot \overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}}, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\mathbf{c}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$ — базис главных осей анизотропии в отсчетной конфигурации, $\mathbf{c}_\alpha^2 = \mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha$, а $\mathbf{O}_2 = \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_3$ и т.д, $\mathbf{\Delta}$ — единичный тензор 4-го ранга [22], $\mathbf{E}$ — единичный тензор 2-го ранга, $\overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}}$ — осредненная энергетическая мера деформации, выражающаяся через осредненный градиент деформации $\bar{\mathbf{F}}$ композита по формуле, аналогичной (2)

$$\overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}} = \frac{1}{n - III}(\bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}})^{\frac{n - III}{2}}, \;\; n = I, II, IV, V. \tag{9}$$

Коэффициенты φ_γ в (7) представляют собой производные от упругого потенциала $\varphi_\gamma = \rho\partial\psi / \partial I_\gamma$ и имеют вид [14]

$$\begin{gathered}\varphi_1 = n_1 l_{11}\left(I_1 - k_1\right)^{2n_1-1} + n_1 l_{12}\left(I_1 - k_1\right)^{n_1-1}\left(I_2 - k_2\right)^{n_2},\\ \varphi_2 = n_2 l_{22}\left(I_2 - k_2\right)^{2n_2-1} + n_2 l_{12}\left(I_1 - k_1\right)^{n_1}\left(I_2 - k_2\right)^{n_2-1},\\ \varphi_3 = n_3 l_{33}\left(I_3 - k_3\right)^{n_3-1},\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$k_1 = \frac{2}{n - III},\quad k_2 = \frac{1}{n - III},\quad k_3 = 0,\quad k_4 = \frac{2}{\left(n - III\right)^2}, \tag{11}$$

а l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{44}, n_1, n_2, n_4 — константы модели трансверсально–изотропной среды (композита), методика их определения предложена в [14].

Если $\mathbf{c}_\alpha = \overline{\mathbf{e}}_\alpha$, то соотношения (7) в компонентной форме можно за-писать следующим образом, в матричной форме:

$$\begin{gathered}\left(\overset{(n)}{T}_{ij}\right) = -\frac{p}{n - III}\left(\overset{(n)}{(G^{-1})}^{ij}\right) + \varphi_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \varphi_2\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} +\\ +\varphi_3\begin{pmatrix}0 & 0 & \overset{(n)}{G}_{13}\\ 0 & 0 & \overset{(n)}{G}_{23}\\ \overset{(n)}{G}_{31} & \overset{(n)}{G}_{32} & 0\end{pmatrix} + \varphi_4\begin{pmatrix}\overset{(n)}{G}_{11} & \overset{(n)}{G}_{12} & 0\\ \overset{(n)}{G}_{21} & \overset{(n)}{G}_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\end{gathered} \tag{12}$$

где $\overset{(n)}{\overline{\mathbf{T}}} = \overset{(n)}{T}_{ij}\overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j$, $\overset{(n)}{\overline{\mathbf{G}}} = \overset{(n)}{G}_{ij}\overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j$.

Постановка осредненной задачи теории упругости для универсальных моделей анизотропных сред с конечными деформациями. Для осредненного композита в методе МАО формулируется задача нелинейной теории упругости в Эйлеровом описании, для этого переходим от координат $\overline{X}^i$ к глобальным декартовым координатам $\overline{x}^k = x^k / L$, в которых осредненный композит занимает область $\overline{V}$ с поверхностью $\overline{\Sigma}$, тогда имеем

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{\mathbf{T}} = 0,\quad \overline{x}^k \in \overline{V}, \tag{13}$$

$$\overline{\mathbf{T}} = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}\cdot\cdot\overset{(n)}{\overline{\mathbf{T}}},\quad \overline{x}^k \in \overline{V} \cup \overline{\Sigma}, \tag{14}$$

$$\bar{\mathbf{F}}^{-1} = \mathbf{E} - \bar{\nabla} \otimes \bar{\mathbf{u}}^T, \ \bar{x}^k \in \bar{V} \cup \bar{\Sigma}, \tag{15}$$

$$\det \bar{\mathbf{F}} = 1, \ \bar{x}^k \in \bar{V} \cup \bar{\Sigma}, \tag{16}$$

$$\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{t}_e, \ \bar{x}^k \in \bar{\Sigma}_1, \ \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_e, \ \bar{x}^k \in \bar{\Sigma}_2. \tag{17}$$

Здесь (13) — уравнение равновесия, (14) — соотношение между осредненным тензором напряжений Коши $\bar{\mathbf{T}}$ и энергетическими тензорами $\overset{(n)}{\bar{\mathbf{T}}}$, (15) — кинематическое соотношение, (16) — условие несжимаемости, (17) — граничные условия для эффективной среды, $\bar{\mathbf{u}}$ — осредненный вектор перемещений, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к внешней поверхности композита, $\bar{\nabla} = \bar{\mathbf{e}}_i \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$ — осредненный набла–оператор, $\mathbf{t}_e$ и $\mathbf{u}_e$ — заданные вектор усилий и перемещений. К этой системе (13)–(17) необходимо также присоединить эффективное (осредненное) определяющие соотношения нелинейно–упругой среды (7), (8) и соотношение (9).

В методе МАО также формулируется локальная задача L_0 [13] нелинейной упругости на ЯП, в результате решения которой находим тензорные соотношения между градиентом деформации $\mathbf{F}$ в каждом компоненте композита и осредненным градиентом деформации $\bar{\mathbf{F}}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}(\bar{\mathbf{F}}, \bar{X}^i), \tag{18}$$

где $\mathbf{K}(\bar{\mathbf{F}}, \bar{X}^i)$ — тензор концентрации деформаций в компонентах композита. Подставляя (18) в (1)–(3), получим выражения для напряжений $\mathbf{T}$ в компонентах композита через осредненный градиент деформации $\bar{\mathbf{F}}$.

В работе [13] найдены аналитические выражения для тензорных соотношений (18) для слоистого композита.

Формулировка задачи цилиндрического изгиба слоистой композитной пластины. Рассмотрим частный случай задачи (13)–(17) — расчет напряжений в слоистом композитной пластине при конечных деформациях цилиндрического изгиба. Аналогичная задача, но для однородных изотропных сред с большими деформациями ранее была рассмотрена в работах [23, 24].

Положим, что область $\overset{\circ}{V}$, соответствующая слоистой композитной пластине в $\overset{\circ}{K}$, в декартовых координатах $\overset{\circ}{x}{}^i$, $i = 1, 2, 3$, описывается следующим соотношением:

$$\overset{\circ}{K} : \overset{\circ}{V} = \left\{ \overset{\circ}{x}{}^i \,\middle|\, \overset{\circ}{x}{}_0^3 - \frac{\overset{\circ}{h}_3}{2} < \overset{\circ}{x}{}_0^3 < \overset{\circ}{x}{}_0^3 + \frac{\overset{\circ}{h}_3}{2}, -\frac{\overset{\circ}{h}_2}{2} < \overset{\circ}{x}_2 < \frac{\overset{\circ}{h}_2}{2}, -\frac{\overset{\circ}{h}_1}{2} < \overset{\circ}{x}_1 < \frac{\overset{\circ}{h}_1}{2} \right\}, \tag{19}$$

где $\overset{\circ}{h}_i$ — длины ребер пластины в $\overset{\circ}{K}$.

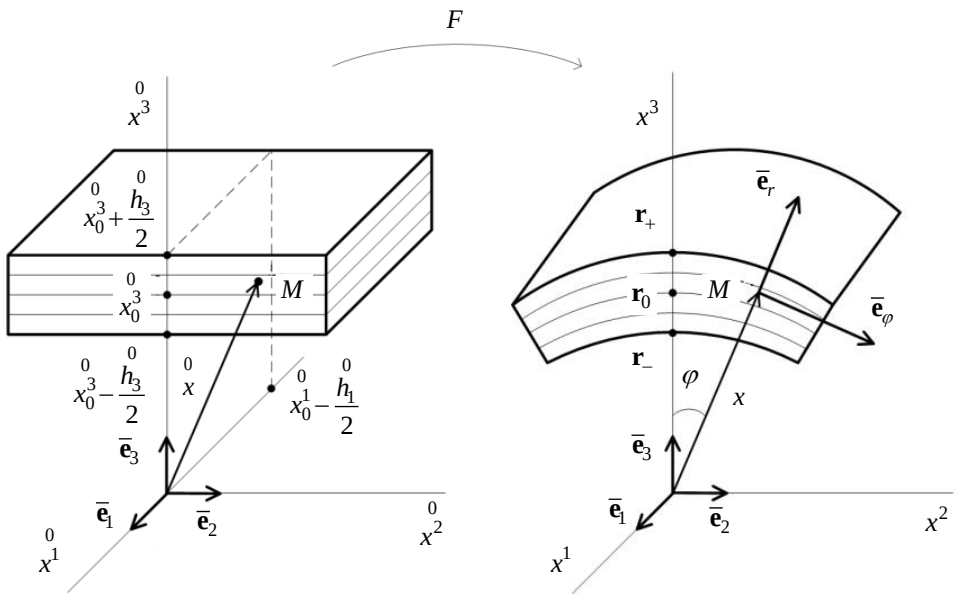


Рис. 1. Цилиндрический изгиб слоистой пластины

Радиус-векторы материальных точек $M \in \overset{\circ}{V}$ в $\overset{\circ}{K}$ и K обозначим

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{x}{}^i\,\bar{\mathbf{e}}_i,\ \ \mathbf{x} = x^i\bar{\mathbf{e}}_i. \tag{20}$$

Имеется соотношение (закон движения) между x^i и $\overset{\circ}{x}{}^i$ для $\forall t \ge 0$

$$x^i = x^i(\overset{\circ}{x}{}^i, t). \tag{21}$$

Введем кроме декартовых координат x^i цилиндрические координаты $r,\ \varphi,\ z$ материальной точки M в физическом базисе цилиндрической системы координат $O\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_z$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_z\\ \mathbf{e}_\varphi\\ \mathbf{e}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{e}}_1\\ \bar{\mathbf{e}}_2\\ \bar{\mathbf{e}}_3\end{pmatrix},$$

тогда радиус-вектор $\mathbf{x}$ (20) можно записать в виде

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z, \tag{22}$$

причем имеют место соотношения, аналогичные (21)

$$r = r(\overset{\circ}{x}{}^i, t),\ \ \varphi = \varphi(\overset{\circ}{x}{}^i, t),\ \ z = z(\overset{\circ}{x}{}^i, t). \tag{23}$$

Рассмотрим закон движения (23), соответствующий цилиндрическому изгибу пластины в цилиндрическую панель [23, 24]

$$z = \overset{\circ}{x}{}^1,\ \ \varphi = B\overset{\circ}{x}{}^2,\ \ r = \sqrt{2A\overset{\circ}{x}{}^3}, \tag{24}$$

где $A,\ B$ — константы.

В этом преобразовании (24) боковые поверхности пластины, имеющие в $\overset{\circ}{K}$ координаты $\overset{\circ}{x}{}^3 = \overset{\circ}{x}{}^3_0 \pm \overset{\circ}{h}_3/2$, при переходе в K, описываются уравнениями постоянного радиуса r, т.е.

$$r_\pm = \sqrt{2A\left(\overset{\circ}{x}{}^3_0 \pm \overset{\circ}{h}_3/2\right)}. \tag{25}$$

Поскольку координата $\overset{\circ}{x}{}^3$ в $\overset{\circ}{K}$ и радиус r в K, согласно (20) и (22), отсчитываются от одной и той же неподвижной точки O (рис. 1), то значения $\overset{\circ}{x}{}^1$ и $r = 0$ должны быть согласованы. Это условие выполняется в (24).

Боковые поверхности пластины $\overset{\circ}{x}{}^2 = \pm\overset{\circ}{h}_3/2$ преобразуются в K в плоские грани с координатами

$$\varphi = \varphi_\pm,\ \ \varphi_\pm = \pm B\overset{\circ}{h}_2/2. \tag{26}$$

Площади внешней и внутренней поверхности $r = r_\pm$ цилиндрической пластины в K равны

$$S_\pm = 2r_\pm\varphi_+\overset{\circ}{h}_1 = Br_\pm\overset{\circ}{h}_2\overset{\circ}{h}_1 \tag{27}$$

Обозначим r_* такой радиус цилиндрической панели в K, при котором площадь соответствующей поверхности $r = r_*$ не изменяется при переходе из $\overset{\circ}{K}$ в K, т.е.

$$S = \overset{\circ}{S},\ \ \overset{\circ}{S} = \overset{\circ}{h}_2\overset{\circ}{h}_1,\ \ S = Br_*\overset{\circ}{h}_2\overset{\circ}{h}_1, \tag{28}$$

очевидно, что

$$r_* = 1/B. \tag{29}$$

Такая поверхность $r = r_*$ называется «нейтральной» [23]. Согласно (24) длина пластины по $\overset{\circ}{x}{}^1$ при переходе из $\overset{\circ}{K}$ в K не изменяется.

Решение осредненной задачи о цилиндрическом изгибе трансверсально-изотропной пластины. Вычислим локальные векторы базиса $\mathbf{r}_i$ [22] в K, используя (22) и (24)

$$\mathbf{r}_1 = \overline{\mathbf{e}}_1,\ \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \overset{\circ}{x}{}^2} = r\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \overset{\circ}{x}{}^2} = r\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \overset{\circ}{x}{}^2} = rB\mathbf{e}_\varphi,$$
$$\mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \overset{\circ}{x}{}^3} = \frac{\partial r}{\partial \overset{\circ}{x}{}^3}\mathbf{e}_r = \frac{A}{r}\mathbf{e}_r. \tag{30}$$

Вычислим метрическую матрицу $g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$ и обратную метрическую матрицу g^{ij} в K

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 B^2 \end{pmatrix},\ \left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A^{-2} r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} B^{-2} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Детерминант метрической матрицы: $g = \det\left(g_{ij}\right) = A^2 B^2$. Поскольку среда (композит) является несжимаемой, то $B = A^{-1}$ и $A > 0$.

Вычислим векторы взаимного базиса $\mathbf{r}^i = g^{ij}\mathbf{r}_j$ в K

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{e}_z,\ \mathbf{r}^2 = r^{-1}A\mathbf{e}_\varphi. \tag{32}$$

Принимая во внимание, что в $\overset{\circ}{K}$: $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = \overline{\mathbf{e}}_i$, $\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i = \overline{\mathbf{e}}^i$, вычислим градиент деформаций

$$\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{r}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}^i = r^{-1}A\mathbf{e}_r \otimes \overline{\mathbf{e}}_3 + rA^{-1}\mathbf{e}_\varphi \otimes \overline{\mathbf{e}}_2 + \overline{\mathbf{e}}_1 \otimes \overline{\mathbf{e}}_1. \tag{33}$$

Вычислим тензор $\overline{\mathbf{U}}^2$

$$\overline{\mathbf{U}}^2 = \overline{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\mathbf{F}} = A^2 r^{-2}\overline{\mathbf{e}}_3 \otimes \overline{\mathbf{e}}_3 + r^2 A^{-2}\overline{\mathbf{e}}_2 \otimes \overline{\mathbf{e}}_2 + \overline{\mathbf{e}}_1 \otimes \overline{\mathbf{e}}_1. \tag{34}$$

Поскольку тензор $\overline{\mathbf{U}}^2$ диагональный, легко находим собственные значения

$$\lambda_3 = \frac{A}{r},\ \lambda_2 = \frac{r}{A},\ \lambda_1 = 1. \tag{35}$$

и собственные векторы тензора $\bar{\mathbf{U}}$: $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i = \bar{\mathbf{e}}_i$. С их помощью вычисляем энергетические меры деформации

$$\overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}} = \frac{1}{n-III}\bar{\mathbf{U}}^{n-III} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(n)}{G}_{\alpha\alpha}\, \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2,\ n = I, II, IV, V,$$

$$\overset{(n)}{\bar{G}}{}_{11}^2 = \frac{1}{n-III},\ \overset{(n)}{\bar{G}}_{22} = \frac{1}{n-III}\left(\frac{r}{A}\right)^{n-III},\ \overset{(n)}{\bar{G}}_{22} = \frac{1}{n-III}\left(\frac{r}{A}\right)^{n-III}, \tag{36}$$

$$\overset{(n)}{\bar{G}}_{13} = \overset{(n)}{\bar{G}}_{23} = \overset{(n)}{\bar{G}}_{12},$$

где $\bar{\mathbf{e}}_i^2 = \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_i$. Вычислим инварианты (8) этих тензоров $\overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}}$ относительно группы трансверсальной изотропии. В базисе $\bar{\mathbf{e}}_i$ эти инварианты имеют вид:

$$I_{1G} = \frac{1}{n-III}\left(1 + \left(\frac{r}{A}\right)^{n-III}\right),$$

$$I_{2G} = \frac{1}{n-III}\left(\frac{A}{r}\right)^{n-III}, \tag{37}$$

$$I_{3G} = \overset{(n)}{\bar{G}}{}_{13}^2 + \overset{(n)}{\bar{G}}{}_{23}^2 = 0,$$

$$I_{4G} = \overset{(n)}{\bar{G}}{}_{11}^2 + 2\overset{(n)}{\bar{G}}{}_{12}^2 + \overset{(n)}{\bar{G}}{}_{22}^2 = \frac{1}{(n-III)^2}\left(1 + \left(\frac{r}{A}\right)^{2(n-III)}\right).$$

Обратный энергетический тензор имеет вид

$$\overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}}{}^{-1} = (n-III)\left(\left(\frac{r}{A}\right)^{n-III} \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \left(\frac{A}{r}\right)^{n-III} \bar{\mathbf{e}}_2^2 + \bar{\mathbf{e}}_1^2\right). \tag{38}$$

Вычислим также тензор поворота $\bar{\mathbf{O}}$, сопровождающий деформацию [22]

$$\bar{\mathbf{O}} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{U}}^{-1} = \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_3. \tag{39}$$

Используя матричную запись определяющих соотношений (12) для трансверсально–изотропного несжимаемого композита находим осредненные энергетические тензоры напряжений

$$\overset{(n)}{\bar{\mathbf{T}}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(n)}{\bar{T}}_{\alpha\alpha}\, \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \tag{40}$$

где

$$\overset{(n)}{\overline{T}}_{11} = -p + \varphi_1 + \frac{2\varphi_4}{n - III},$$

$$\overset{(n)}{\overline{T}}_{33} = -p\left(\frac{r}{A}\right)^{n-III} + \varphi_2, \tag{41}$$

$$\overset{(n)}{\overline{T}}_{22} = -p\left(\frac{A}{r}\right)^{n-III} + \varphi_1 + \frac{2\varphi_4}{n - III}\left(\frac{r}{A}\right)^{n-III}.$$

Здесь φ_γ определяются по формулам (10) и (37).

Найдем тензор истинных напряжений Коши $\overline{\mathbf{T}}$, используя соотношения (3) между $\overline{\mathbf{T}}$ и $\overset{(n)}{\overline{\mathbf{T}}}$. Будем искать $\overline{\mathbf{T}}$ в диагональном виде в базисе $\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_z$:

$$\overline{\mathbf{T}} = \overline{T}_{11}\mathbf{e}_z^2 + \overline{T}_{22}\mathbf{e}_\varphi^2 + \overline{T}_{33}\mathbf{e}_r^2. \tag{42}$$

Используя определение энергетических тензоров напряжений $\overset{(n)}{\overline{\mathbf{T}}}$ [22], с учетом (33), (39) и (40) , получим выражения для $\overset{(n)}{\overline{\mathbf{T}}}$ через компоненты $\overline{T}_{\alpha\alpha}$ тензора $\overline{\mathbf{T}}$

$$\overset{I}{\overline{\mathbf{T}}} = \overline{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\mathbf{T}} \cdot \overline{\mathbf{F}} = \overline{T}_{11}\overline{\mathbf{e}}_1^2 + A^{-2}r^2\overline{T}_{22}\overline{\mathbf{e}}_2^2 + A^2r^{-2}\overline{T}_{33}\overline{\mathbf{e}}_3^2,$$

$$\overset{II}{\overline{\mathbf{T}}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathbf{F}}^T \cdot \overline{\mathbf{T}} \cdot \overline{\mathbf{O}} + \overline{\mathbf{O}}^T \cdot \overline{\mathbf{T}} \cdot \overline{\mathbf{F}}\right) = \overline{T}_{11}\overline{\mathbf{e}}_1^2 + A^{-1}r\overline{T}_{22}\overline{\mathbf{e}}_2^2 + A\, r^{-1}\overline{T}_{33}\overline{\mathbf{e}}_3^2,$$

$$\overset{IV}{\overline{\mathbf{T}}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{T}} \cdot \overline{\mathbf{O}} + \overline{\mathbf{O}}^T \cdot \overline{\mathbf{T}} \cdot \overline{\mathbf{F}}^{-1T}\right) = \overline{T}_{11}\overline{\mathbf{e}}_1^2 + A\, r^{-1}\overline{T}_{22}\overline{\mathbf{e}}_2^2 + A^{-1}r\overline{T}_{33}\overline{\mathbf{e}}_3^2, \tag{43}$$

$$\overset{V}{\overline{\mathbf{T}}} = \overline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{T}} \cdot \overline{\mathbf{F}}^{-1T} = \overline{T}_{11}\overline{\mathbf{e}}_1^2 + A^2r^{-2}\overline{T}_{22}\overline{\mathbf{e}}_2^2 + A^{-2}r^2\overline{T}_{33}\overline{\mathbf{e}}_3^2.$$

Сравнивая представления (41) и (43) для энергетических тензоров $\overset{(n)}{\overline{\mathbf{T}}}$, получаем следующие соотношения между $\overset{(n)}{\overline{T}}_{\alpha\alpha}$ и $\overline{T}_{\alpha\alpha}$ для любого $n = I, II, IV, V$

$$\overset{(n)}{\overline{T}}_{11} = \overline{T}_{11},\ \overset{(n)}{\overline{T}}_{22} = \left(\frac{r}{A}\right)^{III-n}\overline{T}_{22},\ \overset{(n)}{\overline{T}}_{33} = \left(\frac{A}{r}\right)^{III-n}\overline{T}_{33}. \tag{44}$$

Подставляя выражения (44) в (41), получаем формулы для компонент тензора напряжений Коши при заданных n

$$\overline{T}_{\alpha\alpha} = -\overline{p} + \Phi_\alpha,\ \alpha = 1, 2, 3, \tag{45}$$

где обозначены

$$\Phi_1 \equiv \varphi_1 + \frac{2\varphi_4}{n - III},$$

$$\Phi_2 \equiv \varphi_1 \left(\frac{A}{r}\right)^{III-n} + \frac{2\varphi_4}{n - III}\left(\frac{A}{r}\right)^{2(III-n)}, \tag{46}$$

$$\Phi_3 \equiv \varphi_2 \left(\frac{r}{A}\right)^{III-n}, \quad n = I, II, IV, V.$$

Найдем теперь функцию $\overline{p}$. Рассмотрим осредненные уравнения равновесия (13) композитной пластины в K. В цилиндрических координатах эти уравнения, с учетом диагонального вида (42) тензора напряжений сводится к одному тождественно ненулевому уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r\overline{T}_{33}\right) - \overline{T}_{22} = 0. \tag{47}$$

Подставляя выражение (44) для $\overline{T}_{33}$ и $\overline{T}_{22}$, получаем дифференциальное уравнение относительно $\overline{p}(r)$

$$\frac{d\overline{p}}{dr} = \frac{d\Phi_3}{dr} + \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{r}. \tag{48}$$

Интегрируя это уравнение по r, получаем

$$p = p_0 + \Phi_3 + \int_{r_-}^{r} \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{\tilde{r}} d\tilde{r} - \Phi_3\left(r_-\right). \tag{49}$$

Граничные условия на поверхностях $r = r_\pm$ задаем в следующем виде

$$r = r_\pm : \quad \overline{T}_{33}\left(r_\pm\right) = 0.$$

Подставляем в эти уравнения выражение (45) для $\overline{T}_{33}$ с учетом (49), получаем 2 алгебраических уравнения

$$p_0 = \Phi_3\left(r_-\right), \quad \int_{r_-}^{r_+} \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{\tilde{r}} d\tilde{r} = 0. \tag{50}$$

Поскольку функции Φ_2, Φ_3 (46) зависят от константы A, а значение r_- согласно (25), зависит от A и $\overset{\circ}{x}{}_0^3$, то первая формула (50) связывает с p_0 с A, $\overset{\circ}{x}{}_0^3$, а вторая формула (50) позволяет выразить через $\overset{\circ}{x}{}_0^3$.

Подставляя (50) в (48) и (45), находим

$$
\begin{gathered}
p = \Phi_3 + \int_{r_-}^{r} \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{r} dr, \\
\bar{T}_{11} = \Phi_1 - \Phi_3 + \int_{r_-}^{r} \frac{\Phi_2 - \Phi_3}{r} dr, \\
\bar{T}_{22} = \Phi_2 - \Phi_3 + \int_{r_-}^{r} \frac{\Phi_2 - \Phi_3}{r} dr, \\
\bar{T}_{33} = \int_{r_-}^{r} \frac{\Phi_2 - \Phi_3}{r} dr.
\end{gathered}
\tag{51}
$$

Вычислим тангенциальное усилие в цилиндрической панели

$$
N_2 = \int_{r_-}^{r_+} \bar{T}_{22} dr = \int_{r_-}^{r_+} \frac{d}{dr}\left(r\bar{T}_{33}\right) dr = r_+\bar{T}_{33}\left(r_+\right) - r_-\bar{T}_{33}\left(r_-\right) = 0, \tag{52}
$$

а также изгибающий момент, который определим следующим образом

$$
M_2 = \int_{r_-}^{r_+} r\bar{T}_{22} dr. \tag{53}
$$

Подставляя третью формулу (51) в (53), находим

$$
M_2 = \frac{1}{2}\int_{r_-}^{r_+} r\left(\Phi_2 - \Phi_3\right) dr + \frac{r_+^2}{2}\int_{r_-}^{r_+} \frac{\left(\Phi_2 - \Phi_3\right)}{r} dr. \tag{54}
$$

Поскольку функции Φ_2, Φ_3 зависят от A и $\overset{\circ}{x}{}_0^3$, а $\overset{\circ}{x}{}_0^3$ можно выразить через A с помощью соотношения (50), то формула (54) представляет собой соотношение между M_2 и A. По заданному значению момента M_2 соотношение (54) позволяет найти A, т.е. фактически — радиус r изгиба пластины (согласно (24)).

Результаты численного решения осредненной задачи. Для численного решения второго уравнения (50) введем радиус r_0 цилиндрического изгиба пластины в K, соответствующий срединной поверхности $\overset{\circ}{x}{}^3 = \overset{\circ}{x}{}_0^3$ в $\overset{\circ}{K}$. Согласно формуле (24) имеем: $r_0 = \sqrt{2A\overset{\circ}{x}{}_0^3}$, следовательно $\overset{\circ}{x}{}_0^3$ и радиусы $r_\pm$, определенные по (25), можно выразить $\overset{\circ}{x}{}_0^3$ через r_0 и A:

$$\overset{\circ}{x}{}_0^3 = \frac{r_0^2}{2A}, \; r_{\pm} = \sqrt{r_0^2 \pm A\overset{\circ}{h}_3}. \tag{55}$$

Тогда второе уравнение (50) можно рассматривать как неявное заданное соотношение между параметрами r_0 и A. Функции Φ_2, Φ_3, входящие в это уравнение, также можно считать зависящими от r_0 и A. Результаты численного решения второго уравнения (50) в виде зависимости $A = A_n(r_0)$ для различных моделей B_n представлены на рис. 2.

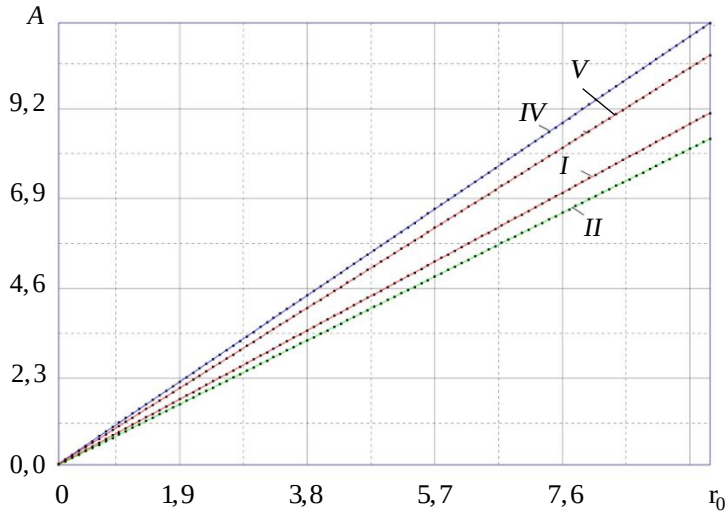
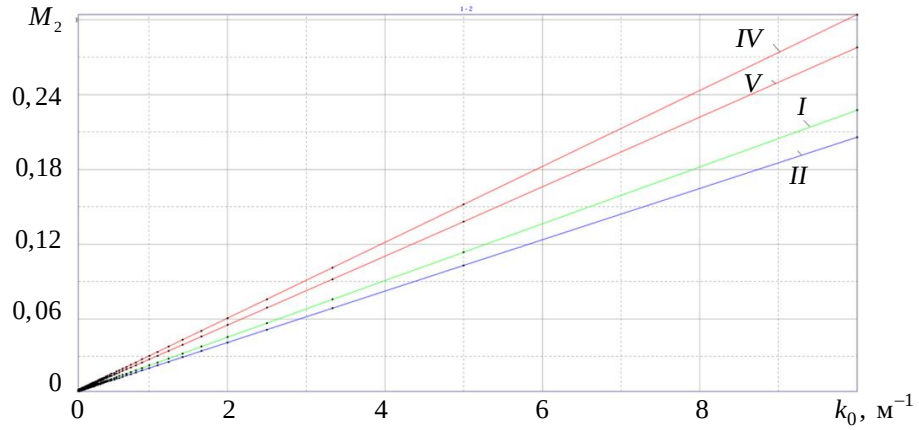


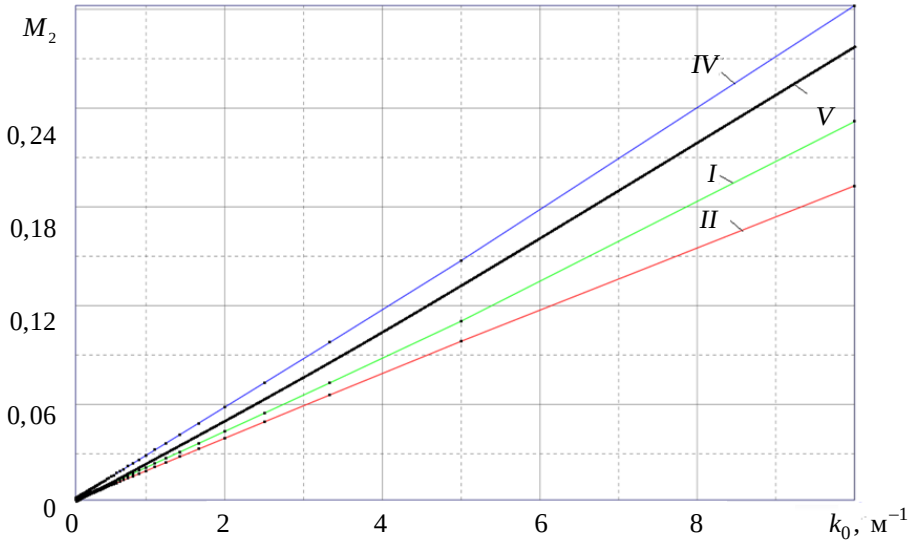
Рис. 2. Решение второго уравнения (50) в виде зависимости константы A от радиуса r_0 цилиндрического изгиба панели (цифры у кривых — номер n модели B_n)

При расчетах были приняты следующие значения констант: $L = 1$ м, $h_3 = 0,01$ м, $l_{11} = 200$ МПа, $l_{12} = 10$ МПа, $l_{44} = 20$ МПа, $s_1 = s_2 = s_4 = 1$.

На рис. 3*а* и 3*б* показаны зависимости момента M_2, вычисленного по формуле (54), от кривизны $k_0 = 1/r_0$ цилиндрического изгиба панели (цифры у кривых — номер n модели B_n), для 2-х различных толщин панели $\overset{\circ}{h}_3 = 0,01$ м, и $\overset{\circ}{h}_3 = 0,05$ м. С увеличением толщины панели в 5 раз, значение момента M_2, возрастает в 125 раз для всех моделей B_n (например, для B_4 — с 0,32 до 40 МПа·м). Таким образом, зависимость момента M_2 от начальной толщина пластины является кубической, как и для изотропных материалов [23].



а



б

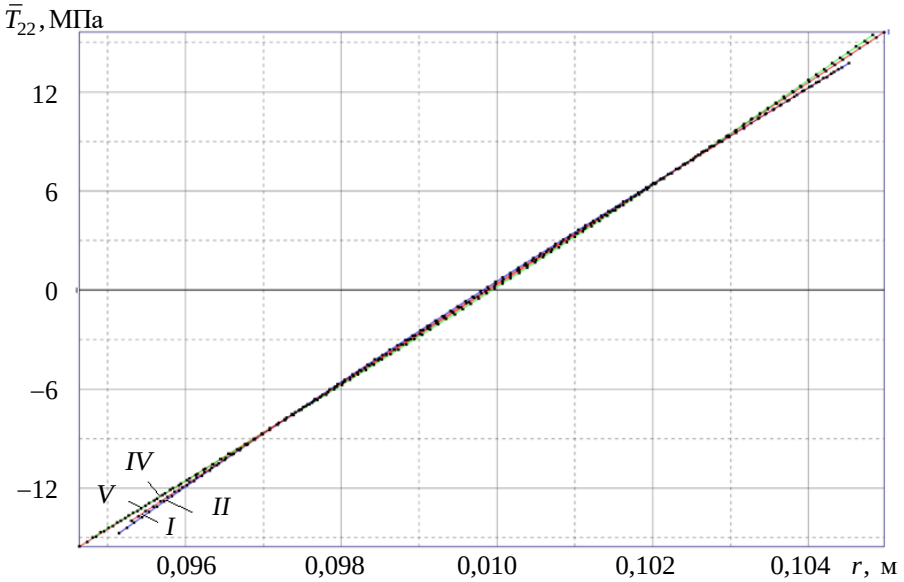
Рис. 3. Зависимость M_2 вычисленного по формуле (54) от кривизны k_0 цилиндрического изгиба панели (цифры у кривых — номер n модели B_n)

а — $\overset{\circ}{h}_3 = 0{,}01$ м ; *б* — $\overset{\circ}{h}_3 = 0{,}05$ м

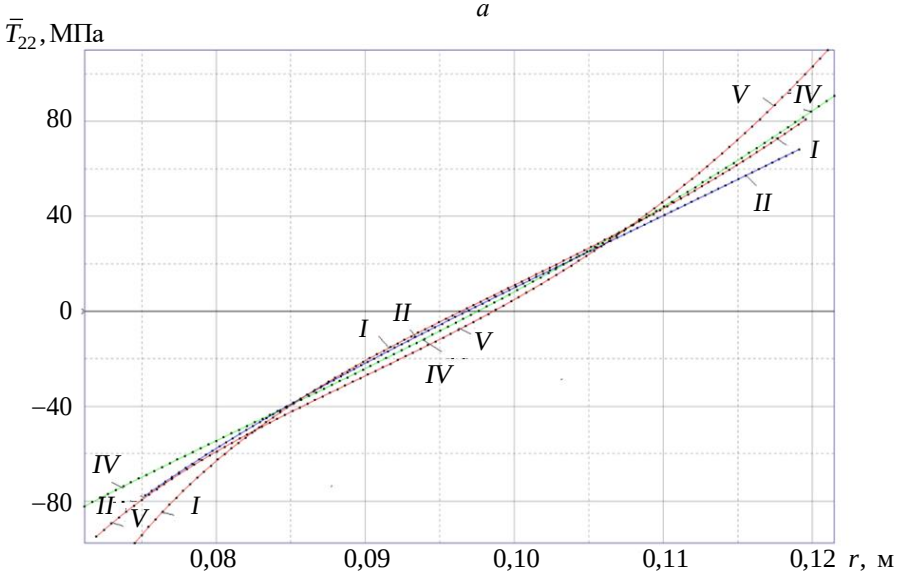
На рис. 4 и 5 показаны осредненные напряжения в трансверсально–изотропной пластине при изгибе, при значении $r_0 = 0{,}1$ м $\left(k_0 = 10 \text{ м}^{-1}\right)$. Показаны распределения компонентов тензора напряжений Коши $\overline{T}_{22}(r)$ и $\overline{T}_{33}(r)$ по радиальной координате в K. Расчеты проведены для 2-х значений толщины пластины: $\overset{\circ}{h}_3 = 0{,}01$ м и $\overset{\circ}{h}_3 = 0{,}05$ м. Для относительно тонкой пластины распределение

компоненты $\bar{T}_{22}(r)$ близко к линейному для всех моделей B_n, что соответствует линейной теории.

Для толстой пластины распределение компоненты напряжений $\bar{T}_{22}(r)$ является нелинейным. Для толстых пластин различие напряжений $\bar{T}_{33}(r)$ для разных моделей B_n — достаточно существенное.



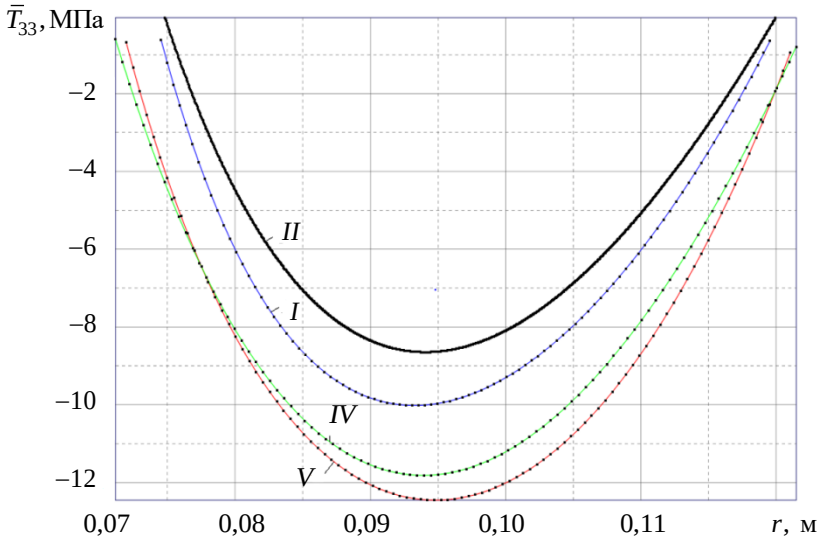
а



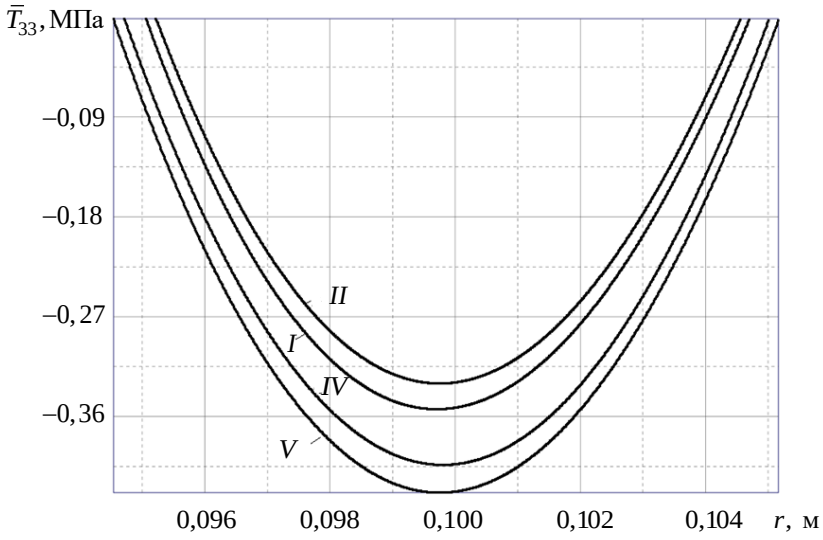
б

Рис. 4. Распределение компоненты $\bar{T}_{22}(r)$ тензора напряжений Коши, вычисленной по формуле (51), по радиусу r панели при цилиндрическом изгибе (цифры у кривых — номер n модели B_n)

а — $\overset{\circ}{h}_3 = 0{,}01$ м ; *б* — $\overset{\circ}{h}_3 = 0{,}05$ м



а



б

Рис. 5. Распределение компоненты $\bar{T}_{33}(r)$ тензора напряжений Коши, вычисленной по формуле (51), по радиусу r панели при цилиндрическом изгибе (цифры у кривых — номер n модели B_n)

а — $\overset{\circ}{h}_3 = 0,05$ м ; *б* — $\overset{\circ}{h}_3 = 0,01$ м

Напряжения в слоях композитной слоистой пластины при цилиндрическом изгибе. После решения осредненной задачи о цилиндрическом изгибе пластины, определены 3 ненулевые компоненты осредненного градиента деформации $\bar{\mathbf{F}}$ (формулы (33) как функции от радиуса r.

Для вычисления тензора напряжений Коши $\mathbf{T}$ в слоях композитной пластины введем в актуальной конфигурации K эйлеровы локальные цилиндрические координаты ξ_z, ξ_φ, ξ_r, (рис.6), связанные с лагранжевыми локальными декартовыми координатами ξ^i с помощью локального закона движения материальных точек

$$\xi_z = \Xi_z(\xi^i, t),\ \ \xi_\varphi = \Xi_\varphi(\xi^i, t),\ \ \xi_r = \Xi_r(\xi^i, t). \tag{56}$$

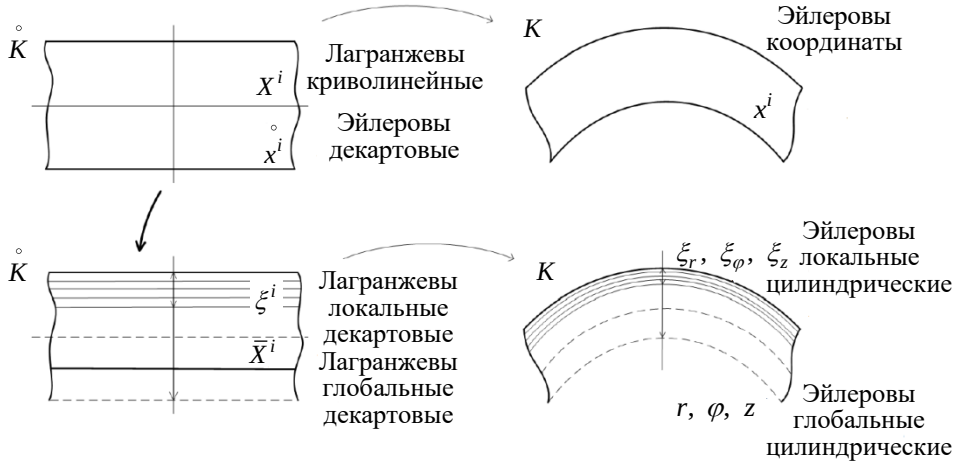


Рис. 6 Различные координаты, используемые в задаче о цилиндрическом изгибе композитной слоистой панели

В силу особенностей рассматриваемой задачи о цилиндрическом изгибе, в соответствии с осредненным законом движения (21), решение локальной задачи L_0 в актуальной конфигурации ищем зависящим только от локальной радиальной координаты ξ_r, а градиент деформации $\mathbf{F}$ в слоях пластины ищем совпадающим с осредненным градиентом $\bar{\mathbf{F}}$ (33). Тогда энергетические меры деформации $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$ в слоях композита также совпадают с осредненными мерами деформации $\overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}}$ (36)

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}},\ \ \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}},\ \ \overset{(n)}{\mathbf{G}} = \overset{(n)}{\bar{\mathbf{G}}},\ \ n = I, II, IV, V. \tag{57}$$

Все эти тензоры в данной задаче являются диагональными. Следует отметить, что в рамках МАО соотношения (57) имеют место только в нулевом приближении.

Определяющие соотношения для изотропных слоев пластины, согласно модели B_n, имеют вид (1), тогда с учетом (57) и диагональности

тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$ получаем, что энергетические тензоры напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ в нулевом приближении также являются диагональными

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(n)}{T}_{\alpha\alpha}\, \bar{\mathbf{e}}_{\alpha}^{2}, \tag{58}$$

где

$$\begin{gathered} \overset{(n)}{T}_{\alpha\alpha} = -\frac{p}{n-III}\overset{(n)}{\mathrm{G}}{}^{-1}_{\alpha\alpha} + \\ +\mu(n-III)^2\left(\left(\frac{1+\beta}{n-III}+(1-\beta)I_1(\overset{(n)}{\mathrm{G}})\right)-(1-\beta)\overset{(n)}{\mathrm{G}}_{\alpha\alpha}\right) \end{gathered} \tag{59}$$

здесь $\overset{(n)}{G}_{ij} = \overset{(n)}{\bar{G}}_{ij}$ — компоненты тензора $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$, а $I_1(\overset{(n)}{\mathrm{G}})$ — след тензора $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$

$$I_1(\overset{(n)}{\mathrm{G}}) = \frac{1}{n-III}\left(\left(\frac{A}{r}\right)^{n-III} + \left(\frac{r}{A}\right)^{n-III} + 1\right). \tag{60}$$

В силу соотношений (3) и (58) тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$ в нулевом приближении также имеет диагональный вид, но в базисе $\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_z$, аналогично тензору $\bar{\mathbf{T}}$ (формула (48))

$$\mathbf{T} = T_{11}\mathbf{e}_z^2 + T_{22}\mathbf{e}_\varphi^2 + T_{33}\mathbf{e}_r^2, \tag{61}$$

где

$$\begin{gathered} T_{\alpha\alpha} = -p + \Phi_\alpha^{(0)}, \quad \alpha = 1,2,3, \\ \Phi_1^{(0)} = a - \frac{b}{n-III}, \\ \Phi_2^{(0)} = \left(a - \frac{b}{n-III}\left(\frac{r}{A}\right)^{n-III}\right)\left(\frac{r}{A}\right)^{n-III}, \\ \Phi_3^{(0)} = \left(a - \frac{b}{n-III}\left(\frac{A}{r}\right)^{n-III}\right)\left(\frac{A}{r}\right)^{n-III}, \\ a = \mu(n-III)^2\left(\frac{1+\beta}{n-III} + (1-\beta)I_1(\overset{(n)}{\mathrm{G}})\right), \\ b = \mu(n-III)^2(1-\beta). \end{gathered} \tag{62}$$

Функции $\Phi_\alpha^{(0)}$ нулевого приближения в цилиндрической системе координат зависят только от глобальной радиальной координаты r, а функция p — от локальной радиальной координаты ξ_r и от r, как

от параметра. Тогда единственное тождественно ненулевое уравнение равновесия в локальной задаче L_0 в K принимает вид, аналогичный уравнению (47)

$$\frac{d}{d\xi_r}\left(\xi_r T_{33}\right) - T_{22} = 0. \tag{63}$$

Подставляя выражение (62) в (63), получаем дифференциальное уравнение относительно p

$$\frac{dp}{d\xi_r} = \frac{\Phi_3^{(0)} - \Phi_2^{(0)}}{\xi_r}. \tag{64}$$

Интегрируя это уравнение по ξ_r на промежутке $[r_, \xi_r]$, получаем

$$p = p_0 + (\Phi_3^{(0)} - \Phi_2^{(0)}) \ln \frac{\xi_r}{r_-} \tag{65}$$

Константу p_0 находим из условия нормировки по ЯП

$$\frac{2}{r_+^2 - r_-^2} \int_{r_-}^{r_+} p \xi_r d\xi_r = \overline{p}. \tag{66}$$

Подставляя (65) в (66), находим

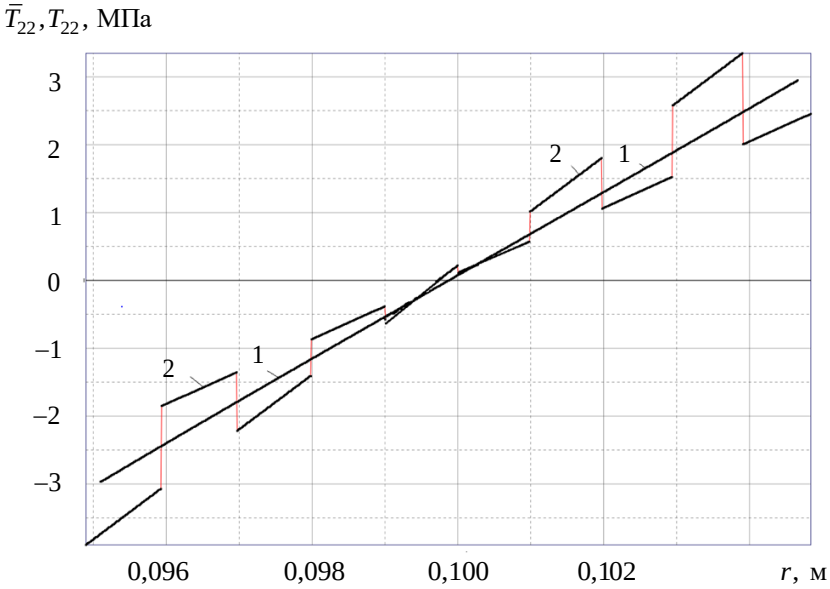
$$p = \overline{p} - \frac{2(\Phi_3^{(0)} - \Phi_2^{(0)})}{r_+^2 - r_-^2} \int_{r_-}^{r_+} \ln \frac{\xi_r}{r_-} \xi_r d\xi_r. \tag{67}$$

В итоге получаем выражения (62), (67) для вычисления компонент тензора напряжений Коши $T_{\alpha\alpha}(r, \xi_r)$ в слоях композита в нулевом приближении, которые являются функциями от радиуса пластины в актуальной конфигурации r (глобальная координата) и от локальной радиальной координаты ξ_r.

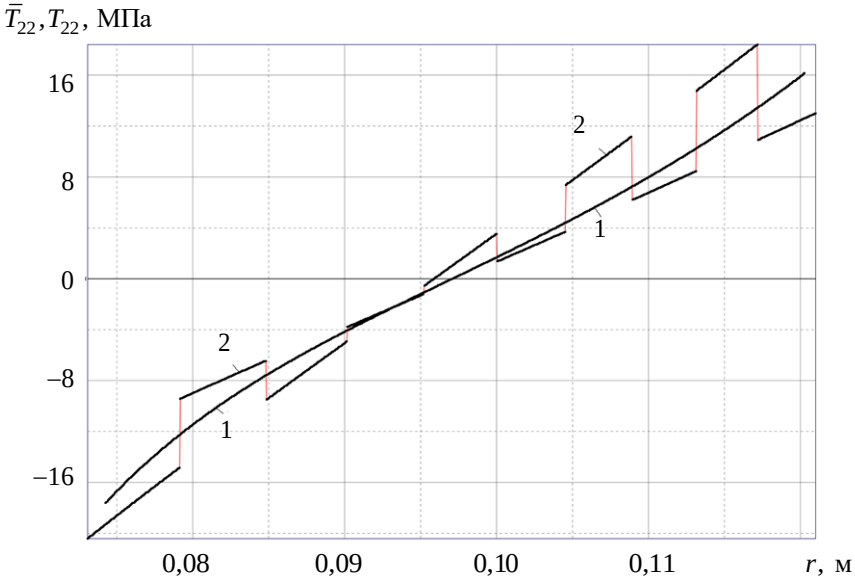
Результаты расчетов напряжений для композитной панели, ЯП которой состоит из 2-х слоев — полиуретана и резины с константами моделей B_n представлены на рис. 7…9. При численных расчетах число ЯП полагалось равным 5. Графики на рисунках соответствуют значениям $r_0 = 0,4$ м $\left(k_0 = 2,5 \text{ м}^{-1}\right)$.

Напряжения T_{22} в слоистой пластине имеют разрыв на границе раздела слоев (рис. 7 и 8), в одном из слоев (в полиуретане) значения T_{22} ниже значений осредненного напряжения $\overline{T}_{22}$, а в другом (резине) — они выше. С увеличением толщины $\overset{\circ}{h}_3$ пластины при одном и том же радиусе изгиба $r_0 = 0,1$ м напряжения T_{22} в слоях

пластины возрастают (рис. 7 и 8). Модели B_I и B_{II} приводят качественно к одинаковым результатам, но численное различие между этими моделями по значениям напряжений $T_{22}^{(0)}$ составляет около 15%.



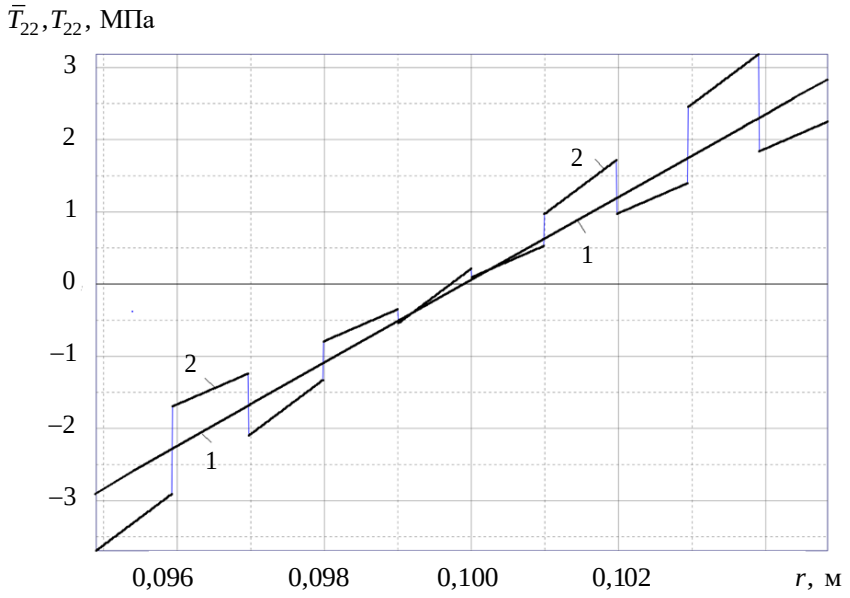
а



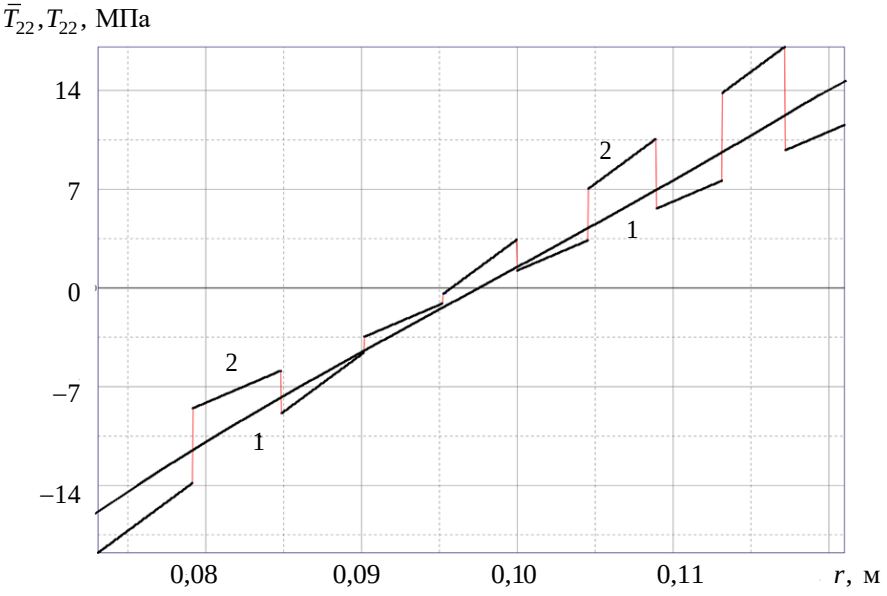
б

Рис. 7. Распределение по радиусу r средних напряжений $\bar{T}_{22}$ (кривая 1) и истинных напряжений T_{22} в слоях (кривая 2) композитной панели при цилиндрическом изгибе (модель B_I)

а — $\overset{\circ}{h}_3 = 0{,}01$ м ; *б* — $\overset{\circ}{h}_3 = 0{,}05$ м



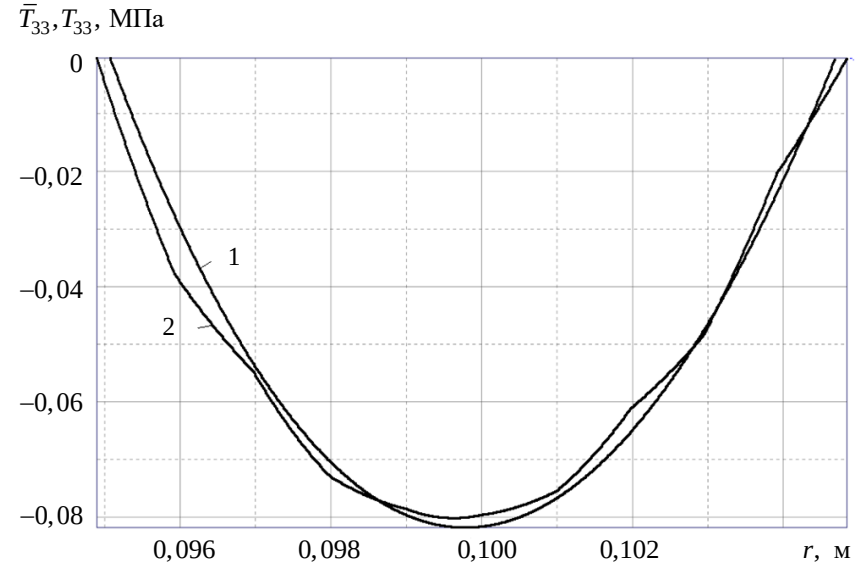
а



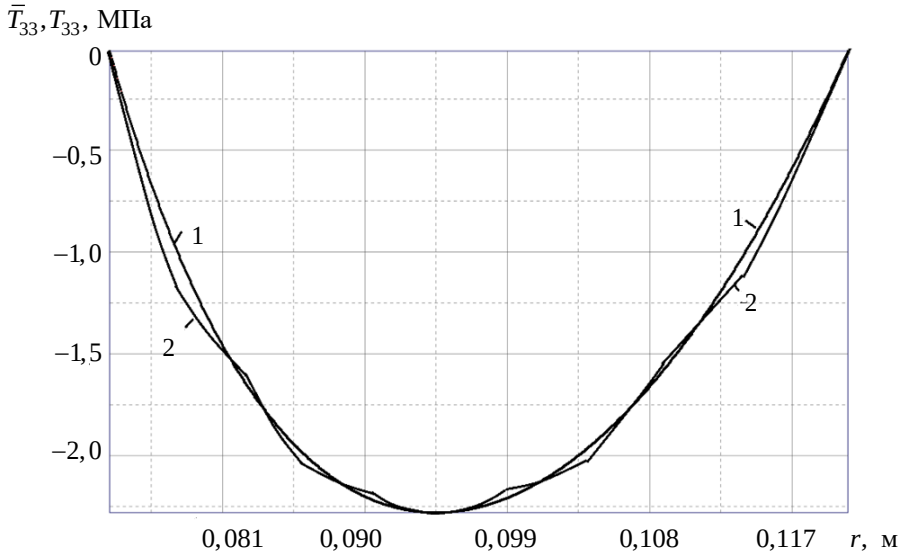
б

Рис. 8. Распределение по радиусу r средних напряжений $\bar{T}_{22}$ (кривая 1) и истинных напряжений T_{22} в слоях (кривая 2) композитной панели при цилиндрическом изгибе (модель B_{II})

а — $\overset{\circ}{h}_3 = 0{,}01$ м ; *б* — $\overset{\circ}{h}_3 = 0{,}05$ м



а



б

Рис. 8. Распределение по радиусу r средних напряжений $\bar{T}_{33}$ (кривая 1) и истинных напряжений T_{33} в слоях (кривая 2) композитной панели при цилиндрическом изгибе (модель B_I)

а — $\overset{\circ}{h}_3 = 0{,}01$ м ; *б* — $\overset{\circ}{h}_3 = 0{,}05$ м

Выводы Решена задача о расчете напряжений в композитной слоистой нелинейно–упругой панели при цилиндрическом изгибе. Задача решена для случая конечных деформаций с использованием универсальных моделей нелинейно упругих сред, позволяющих получать решение одновременно для нескольких классов моделей,

соответствующих различным энергетическим (сопряжённым) парам тензоров напряжений–деформаций.

Решение задачи получено в аналитическом виде с помощью метода МАО. Установлены некоторые эффекты нелинейного деформирования композитной панели: при относительно малых начальных толщинах панели $\left(\overset{\circ}{h}_3 / L = 0,01\right)$ компоненты тензора напряжений Коши в панели, как осредненные, так и истинные (в нулевом приближении) практически не зависят от класса модели определяющих соотношений. В тоже время уже для более толстых панелей $\left(\overset{\circ}{h}_3 / L = 0,05\right)$ напряжения существенно различаются для разных классов моделей слоев композита.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, John Wiley&Sons Publ., 1979, 324 p.

[2] Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. *Сопротивление полимерных и композитных материалов*. Рига, Зинатне, 1980, 572 с.

[3] Jones R.M. *Mechanics of Composite Materials*. USA, Taylor&Francis Publ., 1999, 520 p.

[4] Васильев В.В., Тарнопольский Ю.М. *Композиционные материалы: справочник*. Москва, Машиностроение, 1989, 510 с.

[5] Ванин Г.А. *Микромеханика композиционных материалов*. Киев, Наукова думка, 1985, 300 с.

[6] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984, 352 с.

[7] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[8] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 324 с.

[9] Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984, 472 с.

[10] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 2, с. 95–108.

[11] Димитриенко Ю.И. Моделирование нелинейно-упругих характеристик композитов с конечными деформациями методом асимптотического осреднения. *Известия ВУЗов. Машиностроение*, 2015, № 11, с. 68–77.

[12] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Кольжанова Д.Ю. Моделирование слоистых композитов с конечными деформациями методом асимптотической гомогенизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, № 5 (41), с. 1–5.

[13] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Кольжанова Д.Ю., Каримов С.Б. Моделирование несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями на основе метода асимптотического осреднения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 1, с. 32–54.

[14] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Каримов С.Б., Кольжанова Д.Ю. Моделирование эффективных характеристик трансверсально–изотропных несжимаемых композитов с конечными деформациями. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 4, с. 72–92.

[15] Dimitrienko Y.I., Karimov S.B., Kolzhanova D.Y. Modeling of the effective universal constitutive relations for elastic laminated composites with finite strains. *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2019, vol. 683, art no. 012006. DOI: 10.1088/1757-899X/683/1/012006

[16] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Karimov S.B., Kolzhanova D.Y. Universal models of the constitutive relations for transversely isotropic compressible composites with finite strains. *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2020, vol. 934, art no. 012012. DOI: 10.1088/1757-899X/934/1/012012

[17] Yang Q., Xu F. Numerical modeling of nonlinear deformation of polymer composites based on hyperelastic constitutive law. *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, 2009, no. 4, pp. 284–288.

[18] Aboudi J. Finite strain micromechanical modeling of multiphase composites. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2008, no. 6, pp. 411–434.

[19] Zhang B., Yu X., Gu B. Micromechanical modeling of large deformation in sepiolite reinforced rubber sealing composites under transverse tension. *Polymer Composites*, 2017, vol. 38, iss. 2, pp. 381–388.

[20] Ge Q., Luo X., Iversen C.B., Nejad H.B., Mather P.T., Dunn M.L., Jerry Qi H. A finite deformation thermomechanical constitutive model for triple shape polymeric composites based on dual thermal transitions. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, iss. 15–16, pp. 2777–2790.

[21] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[22] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.

[23] Черных К.Ф. *Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах*. Ленинград, Машиностроение, 1986, 336 с.

[24] Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. Москва, Наука, 1980, 512 с.

Статья поступила в редакцию 19.01.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Каримов С.Б., Кольжанова Д.Ю. Моделирование напряжений в композитной нелинейно упругой панели при цилиндрическом изгибе. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 1, с. 3–30.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Каримов Суннат Бахтиярович — ассистент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sunnat49@yandex.ru

Кольжанова Дарья Юрьевна — ассистент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: darya.kolzhanova@yandex.ru

Modeling of stresses in a composite nonlinear elastic panel under cylindrical bending

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, S.B. Karimov, D.Yu. Kolzhanova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The problem of calculating the stress–strain state of a composite laminated panel during cylindrical bending under conditions of finite deformations is considered. To solve the problem, the method of asymptotic averaging of periodic nonlinear elastic structures with finite deformations was applied, which was developed in detail earlier in the previous works of the authors. A feature of this problem is the use of universal models of constitutive relations for isotropic components of the composite, as well as for the composite as a whole, which is a transversely isotropic nonlinear elastic medium. Universal models make it possible to obtain solution of problems within the framework of a single solution algorithm simultaneously for several classes of models of nonlinear elastic media corresponding to different conjugate pairs of stress tensors–deformation. An analytical solution is obtained for the problem of cylindrical bending of a composite panel. A numerical analysis of the solution is carried out using the example of a composite, the periodicity cell of which consists of two layers: polyurethane and rubber. It is shown that for thin panels the stresses, both averaged and true, practically do not depend on the class of the model of the constitutive relations. At the same time, for thicker panels, the stresses differ significantly for different classes of models of composite layers.

***Keywords**: finite deformations, composites, cylindrical bending, composite panel, incompressible media, transversely isotropic medium, asymptotic averaging, universal models of elastic media, Cauchy stress tensor*

REFERENCES

[1] Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, John Wiley&Sons Publ., 1979, 324 p.

[2] Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie polimernyh i kompozitnyh materialov* [Resistance of polymer and composite materials]. Riga, Zinatne Publ., 1980, 572 p.

[3] Jones R.M. *Mechanics of Composite Materials*. USA, Taylor&Francis Publ., 1999, 520 p.

[4] Vasiliev V.V., Tarnopolsky Yu.M. *Kompozicionnye materialy: spravochnik* [Composite materials: handbook]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 510 p.

[5] Vanin G.A. *Mikromekhanika kompozicionnyh materialov* [Micromechanics of composite materials]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985, 300 p.

[6] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of the composite material mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.

[7] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[8] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1984, 324 p.

[9] Sanches-Palensiya E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Nonhomogeneous media and vibration theory]. Moscow, Mir Publ., 1984, 472 p.

[10] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. Finite element method for calculating the effective characteristics of spatially reinforced composites. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–108.

[11] Dimitrienko Yu.I. Modelling of nonlinear-elastic properties of composites with finite deformations by asymptotic homogenization method. *Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2015, no. 11, pp. 68–77.

[12] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Kolzhanova D.Yu. Modeling of laminated composites with finite deformations by asymptotic homogenization method. *Engineering Journal: Science and Innovation: Electronic Science and Engineering Publication*, 2015, no. 5 (41), pp. 1–5.

[13] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Kolzhanova D.Y., Karimov S.B. Incompressible layered composites with finite deformations on the basis of the asymptotic averaging method. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 1, pp. 32–54.

[14] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Karimov S.B., Kolzhanova D.Y. Modeling the effective characteristics of transversely isotropic incompressible composites with finite strains. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 4, pp. 72–92.

[15] Dimitrienko Y.I., Karimov S.B., Kolzhanova D.Y. Modeling of the effective universal constitutive relations for elastic laminated composites with finite strains. *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2019, vol. 683, art no. 012006. DOI: 10.1088/1757-899X/683/1/012006

[16] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Karimov S.B., Kolzhanova D.Y. Universal models of the constitutive relations for transversely isotropic compressible composites with finite strains. *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2020, vol. 934, art no. 012012. DOI: 10.1088/1757-899X/934/1/012012

[17] Yang Q., Xu F. Numerical modeling of nonlinear deformation of polymer composites based on hyperelastic constitutive law. *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, 2009, no. 4, pp. 284–288.

[18] Aboudi J. Finite strain micromechanical modeling of multiphase composites. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2008, no. 6, pp. 411–434.

[19] Zhang B., Yu X., Gu B. Micromechanical modeling of large deformation in sepiolite reinforced rubber sealing composites under transverse tension. *Polymer Composites*, 2017, vol. 38, iss. 2, pp. 381–388.

[20] Ge Q., Luo X., Iversen C.B., Nejad H.B., Mather P.T., Dunn M.L., Jerry Qi H. A finite deformation thermomechanical constitutive model for triple shape polymeric composites based on dual thermal transitions. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, iss. 15–16, pp. 2777–2790.

[21] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tver-dogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[22] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 2. Universal'nye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoj* sredy [Continuum Mechanics. Vol. 2. Universal laws of mechanics and electrodynamics of a continuous medium]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.

[23] Chernykh K.F. *Nelinejnaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nyh raschetah* [Nonlinear theory of elasticity in mechanical engineering calculations]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1986, 336 p.
[24] Lurie A.I. *Nelinejnaya teoriya uprugosti* [Nonlinear theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 512 p.

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Gubareva E.A., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor, Deputy Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Karimov S.B., Assistant Prof. of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, engineer of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sunnat49@yandex.ru

Kolzhanova D.Yu., Assistant Prof. of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: darya.kolzhanova@yandex.ru