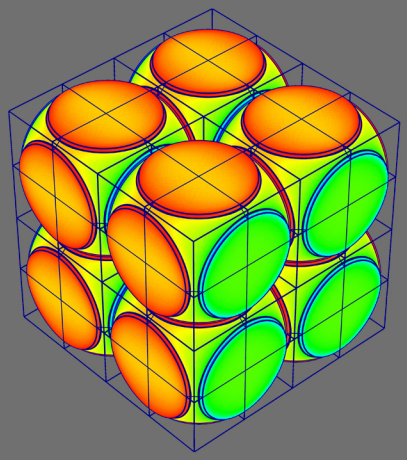
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Малинецкий Г. Г., Фаллер Д. С. Анализ бифуркаций в двухмодовой аппроксимации системы Курамото — Цузуки. Математическое моделирование и численные методы, 2014, №3 (3), с. 111-125

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/24/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.214
28.01.2026 02:19:04

УДК 517.9; 519.6

Анализ бифуркаций в двухмодовой аппроксимации системы Курамото — Цузуки

© Г.Г. Малинецкий, Д.С. Фаллер

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия

Рассмотрено появление хаотических аттракторов в системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в теории моделей «реакция — диффузия». Исследованы динамика соответствующих одномерных и двумерных отображений и ляпуновские показатели возникающих аттракторов. Показано, что переход к хаосу происходит по нетрадиционному сценарию, связанному с многократным рождением и исчезновением хаотических режимов, который изучен для одномерных отображений с острой вершиной и квадратичным минимумом. С помощью численного анализа исследованы характерные особенности системы: наличие областей бистабильности и гиперболичности, кризис хаотических аттракторов.

Ключевые слова: *нелинейная динамика, двухмодовая система, модели «реакция—диффузия», бифуркации, самоподобие, «каскад каскадов», кризис аттрактора, эргодичность, бистабильность.*

Введение. В настоящее время одними из наиболее популярных классов нелинейных математических моделей являются системы «реакция–диффузия» (см., например, [1–3]):

$$\begin{cases} X_t = D_1 \Delta X + f_1(X, Y, \lambda); \\ Y_t = D_2 \Delta Y + f_2(X, Y, \lambda), \end{cases} \tag{1}$$

где $X(\mathbf{r}, t)$ и $Y(\mathbf{r}, t)$ — концентрации реагирующих веществ; $f_1(X, Y, \lambda)$ и $f_2(X, Y, \lambda)$ — нелинейные функции, определяющие кинетику их взаимодействия; D_1 и D_2 — соответствующие коэффициенты диффузии; Δ — оператор Лапласа; $\mathbf{r}$ и t — пространственная и временная координаты. Впервые модель подобного вида была редложена в работе А. Тьюринга [4]; на сегодняшний день этим системам и их многочисленным приложениям посвящено большое число работ.

В соответствии с исследовательской программой А. Пуанкаре одним из наиболее интересных направлений изучения нелинейных систем является анализ бифуркаций и универсальных описаний изучаемых объектов в окрестностях точек бифуркации. Этот подход был применен к системам вида (1), для которых типичными являются бифуркация Андронова — Хопфа (бифуркация рождения предельного цикла) и бифуркация Тьюринга (диффузионная неустойчивость).

Универсальное описание связано с наличием малого параметра $\varepsilon \approx \sqrt{\lambda - \lambda_0}$ и возможностью перехода к медленным переменным $\mathbf{R} = \varepsilon \mathbf{r}$ и $T = \varepsilon^2 t$. В простейшем одномерном (и наиболее типичном) случае это приводит к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} &W_t = (\pm 1 + ic_0)W + (1 + ic_1)W_{rr} - (1 + ic_2)|W|^2 W, \quad r \in [0, l], \quad t \geq 0; \\ &W_r(0, t) = W_r(l, t) = 0, \quad W(r, 0) = W_0(r), \end{aligned} \tag{2}$$

где $W = u(r, t) + iv(r, t)$.

Вывод этого уравнения на физическом уровне строгости и анализ области его применимости был дан И. Курамото и Т. Цузуки [5]. Более строгое обоснование было предложено С.А. Кащенко в построенной им теории квазинормальных форм, в рамках которой можно рассматривать уравнения с малой диффузией, пропорциональной ε [6]. Нетривиальные аттракторы уравнение имеет, когда выбран знак плюс. От коэффициента c_0 можно избавиться заменой переменных. Краевая задача (2) подробно исследована в случае небольших областей $l \leq \pi$ (см., например, [7]).

Полагая, что в решении при небольших $l \leq \pi$ существенны только две первые гармоники

$$W = u + iv = (x_0 + iy_0) + (x_1 + iy_1)\cos(kr), \quad k = \pi / l,$$

и, пренебрегая остальными, получаем так называемую двухмодовую систему. Ее можно существенно упростить, если положить

$$\begin{aligned} &x_0 = \rho_0 \cos\varphi_0; \quad y_0 = \rho_0 \sin\varphi_0; \\ &x_1 = \rho_1 \cos\varphi_1; \quad y_1 = \rho_1 \sin\varphi_1; \\ &\xi = \rho_0^2,; \eta = \rho_1^2; \ \theta = 2(\varphi_0 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Это приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 2\xi - 2\xi(\xi + \eta) - \xi\eta(\cos\theta + c_2 \sin\theta); \\ \dot{\eta} = 2\eta - 2\eta\left(\xi + \dfrac{3}{4}\eta\right) - 2\xi\eta(\cos\theta - c_2 \sin\theta) - 2k^2\eta; \\ \dot{\theta} = c_2\left(2\xi - \dfrac{1}{2}\eta\right) + \sin\theta(2\xi + \eta) + c_2 \cos\theta(2\xi - \eta) + 2c_1 k^2. \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) и будет объектом нашего исследования. Поскольку θ имеет смысл разности фаз, будем для удобства считать, что θ

приведено по модулю 2π. Заметим, что возможность перейти от системы четырех дифференциальных уравнений к трем связана с симметрией исходной задачи $W \to We^{i\alpha}$, $\alpha = \text{const}$, которую сохраняют галеркинские системы.

В работе [7] подробно изучен один хаотический аттрактор, определяющий асимптотику этой системы при $t \to \infty$ со значениями параметров $c_1 = 7$, $c_2 = -6$, $k = 1$ (рис. 1). Оказалось, что это решение обладает многими интересными геометрическими и эргодическими свойствами.

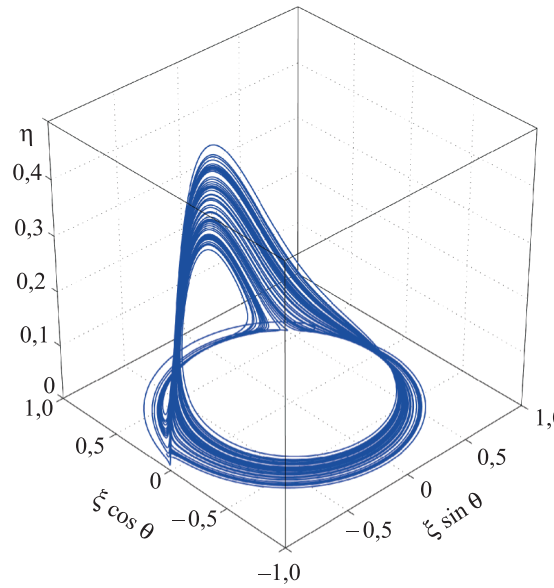


Рис. 1. Хаотический аттрактор системы (3). Траектория получена для начальных данных $(0{,}5;\ 0{,}5;\ \pi)$ при значениях параметров $c_1 = 7$; $c_2 = -6$; $k = 1$

В данной работе на основе результатов численного анализа исследуется, как возникает и исчезает этот хаотический аттрактор при изменении параметров в пространстве (c_1, c_2, k). Будем проводить однопараметрический анализ, фиксируя два параметра и варьируя третий. Для численного решения (3) использован стандартный метод Рунге — Кутта 4-го порядка; шаг интегрирования выбран таким образом, чтобы исключить появление «вычислительных артефактов».

Инструменты анализа и общая картина. Замечательным свойством динамического хаоса является чувствительность по отношению к начальным данным. Это свойство отражает экспоненциальное разбегание бесконечно близких траекторий. Из этого следует, что прогноз состояния системы при типичных начальных данных в среднем может быть дан на время, не превышающее некоторого значения T, называемого горизонтом прогноза. Одним из наиболее удобных

методов количественного исследования динамики близких траекторий является аппарат показателей Ляпунова [7]. Для их вычисления в настоящей работе использован метод Бенеттина [8].

Сумма показателей Ляпунова в соответствии с мультипликативной эргодической теоремой Оселедца [7] равна среднему по времени показателю сжатия или растяжения элемента фазового объема. В частности, изменение бесконечно малого p-мерного фазового объема в динамической системе, заданной в p-мерном фазовом пространстве, определяется уравнением

$$\frac{dV^p}{dt} = \Omega\left(\mathbf{x}(t)\right)V^p;$$

$$\Omega = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_i\left(\mathbf{x}(t)\right)}{\partial x_i}.$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ — траектория, вдоль которой рассматривается изменение фазового объема.

Проведенные расчеты показывают, что за характерное время возврата точки, определяющей состояние системы, на плоскость Пуанкаре фазовый объем V^3 для хаотических аттракторов системы (3) убывает более чем в 800 раз. За это время прямоугольник на плоскости Пуанкаре, в пределах которого находятся точки, принадлежащие аттрактору, с высокой точностью стягивается в отрезок.

Странный аттрактор системы (3) порождает в сечении Пуанкаре плоскостью $\theta = 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ отображение

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = F\left(\xi_n, \eta_n\right); \\ \eta_{n+1} = G\left(\xi_n, \eta_n\right). \end{cases}$$

У этого отображения есть направление, обеспечивающее сильное сжатие, и направление, вдоль которого происходит растяжение, расположенное под достаточно большим углом к сжимающему направлению во всей области, которой принадлежит этот странный аттрактор (см. схематичное изображение на рис. 2). Это позволило проверить обобщенные условия гиперболичности, гарантирующие ряд характеристик хаоса, связанных с порождаемым им двумерным отображением [7].

В некоторых случаях хаотический аттрактор одномерного отображения занимает весь отрезок, который отображение переводит в себя, — плотность инвариантной меры [7], таким образом, отлична от нуля на всем этом отрезке. Аттракторы такого типа называют шумящими циклами (обозначим их χ^1). Иногда инвариантная мера оказы-

вается сосредоточена на p-островах, которые траектория дискретной динамической системы последовательно обходит — обозначим их χ^p. Как будет показано ниже, для одномерных отображений, соответствующих системе (3), характерно наличие таких шумящих циклов.

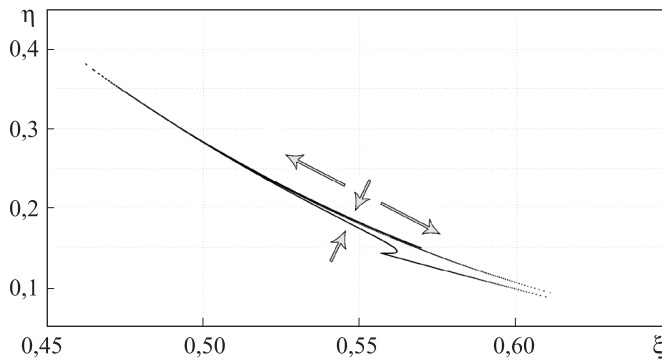


Рис. 2. Сжимающее и растягивающее направления двумерного отображения исходной области $[0,4;\,0,6]\times[0,1;0,4]$, переводящего ее в себя при значениях параметров $c_1 = 7;\ c_2 = -6;\ k = 1$

Одномерные отображения и сценарии возникновения хаоса. Для дальнейшего анализа весьма важна картина бифуркаций для одномерного отображения с острой степенной вершиной

$$x_{n+1} = \frac{1-|x-\lambda|^{\alpha}}{1+|x-\lambda|^{2}}, \quad \alpha < 1. \tag{4}$$

Для логистического отображения после каждой бифуркации удвоения периода ближайший к вершине $(x = 0,5)$ элемент цикла S^{2n} перескакивает с одной ветви $(x < 0,5)$ на другую $(x > 0,5)$ строго поочередно: влево — вправо — влево — … Каждый раз, когда элемент цикла попадает на вершину $\tilde{x} = 0,5$, возникает сверхустойчивый цикл. Эти переходы через вершину не приводят к усложнению устойчивых циклов и появлению устойчивых режимов. В отображении (4) $\partial_x f(x) = \infty$ при $x = \lambda$, поэтому «гладкий» переход элемента устойчивого цикла через вершину невозможен. В связи с изменением топологии циклов (числа элементов соответственно на левой и правой частях отображения) появляется сложная структура, представляющая собой бесконечное количество каскадов бифуркаций удвоения периода. Такая структура, подробно изученной в работе [9], получила название «каскад каскадов». Бифуркационная диаграмма отображения представлена на рис. 3.

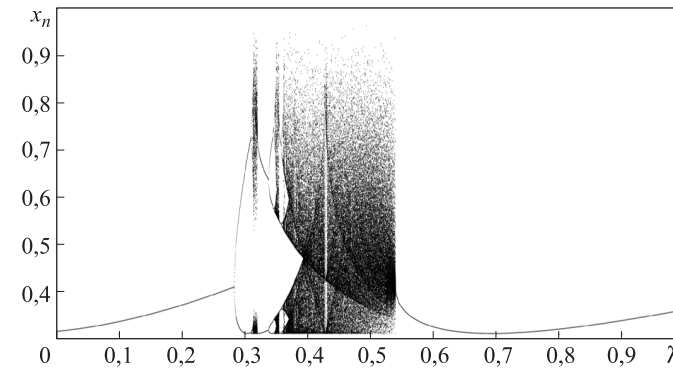


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для отображения с острой степенной вершиной при $\alpha = 0,25$

Качественные особенности бифуркационных диаграмм. Приведенные расчеты для трех бифуркационных диаграмм, возникающих соответственно при изменении параметров c_1, c_2, k и фиксированной паре других параметров системы, показывает их удивительное сходство.

Хаотические режимы возникают и исчезают при изменении бифуркационного параметра неоднократно, при этом возникновение зон хаотического поведения является результатом последовательности бифуркаций удвоения периода. Каждый раз появляются области, в которых нет «оконной структуры». Исчезновения аттракторов похожи одно на другое. По этим причинам далее подробно остановимся на исследовании перехода к хаосу при изменении параметра c_1 (рис. 4), считая, что сценарии перехода при вариации параметров c_2 и k идентичны.

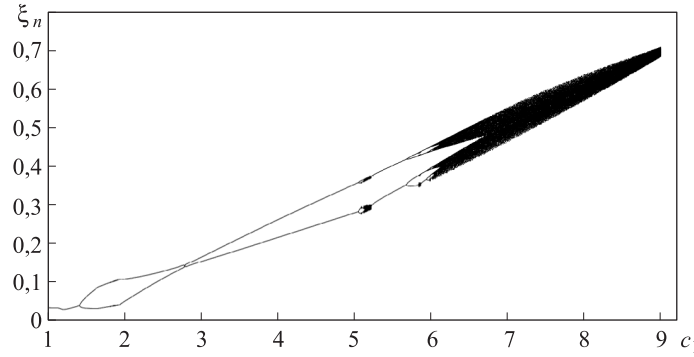


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для системы (3) при вариации параметра c_1 и значениях параметров $c_2 = -6,\ k = 1$

Самоподобие фрагментов бифуркационной диаграммы и наличие «вложенных структур». Для бифуркационной диаграммы, соответствующей логистическому отображению, характерно «двух-

уровневое самоподобие». С одной стороны, существует бесконечное количество каскадов бифуркаций удвоения периода $S^{p\cdot 2^n} \to S^{p\cdot 2^{n+1}}$, $n = 1, 2, \ldots$. С другой — в пределах каждого каскада фрагменты между последовательными бифуркациями $S^{p\cdot 2^n} \to S^{p\cdot 2^{n+1}}$ оказываются подобными друг другу с тем большей точностью, чем больше n, а значения, при которых происходят бифуркации, быстро стремятся к геометрической прогрессии. Это явление стало основой для теории универсальности, построенной М. Фейгенбаумом [10].

Исследование отображений с острой вершиной и квадратичным минимумом показало, что для них характерен еще один уровень самоподобия. В них, как отмечено ранее, оказывается бесконечно много каскадов бифуркаций удвоения периода. В дополнение к этому самих таких каскадов, подобных тем, которые наблюдаются в логистическом отображении, по-видимому, также бесконечно много. Расчеты показывают, что такая вложенная «матрешечная» структура имеет место не только для модельного одномерного отображения, но и для исходной двухмодовой системы.

В самом деле, при взгляде на бифуркационную диаграмму, характеризующую изменение аттракторов при увеличении параметра c_1, становится ясно, что хаос в этой системе возникает и исчезает примерно одинаковым образом многократно на разных по c_1 масштабах (рис. 5–7). Увеличение соответствующих фрагментов показывает, что бифуркационная диаграмма изучаемого объекта действительно носит фрактальный, самоподобный характер с коэффициентом подобия около 10.

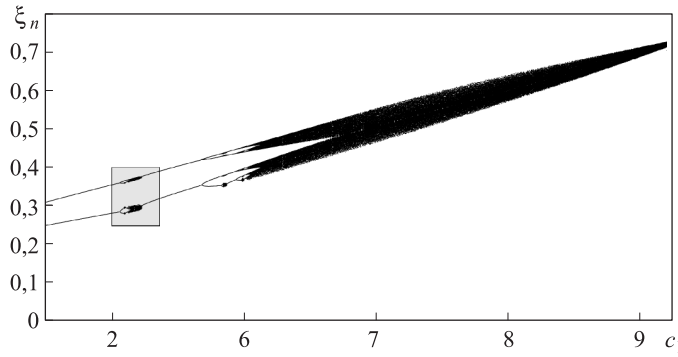


Рис. 5. «Матрешечная» структура в системе (3): $4{,}5 \le c_1 \le 9{,}3$; $c_2 = -6$; $k = 1$. Выделенная область: $5 \le c_1 \le 5{,}3$

Как и во всех реальных, а не модельных или специально сконструированных фрактальных структурах, можно проследить сравнительно небольшое количество уровней, на которых наблюдается самоподобие. В данном случае это ограничено точностью численного

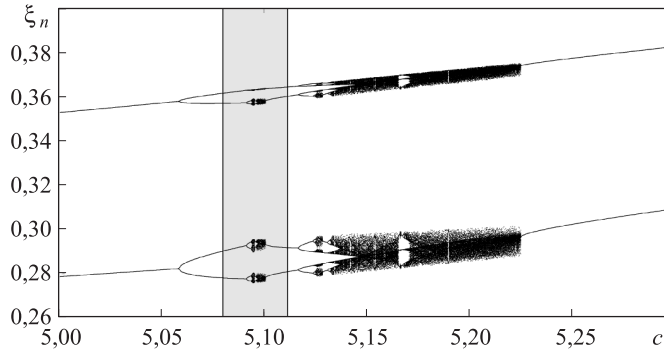


Рис. 6. «Матрешечная» структура в системе (3): $5 \le c_1 \le 5{,}3$; $c_2 = -6$; $k = 1$. Выделенная область: $5{,}08 \le c_1 \le 5{,}11$

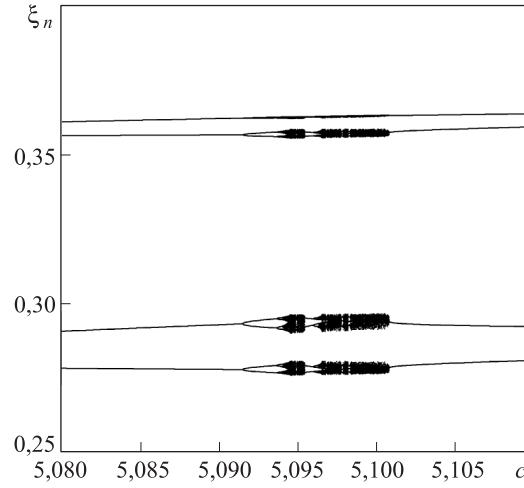


Рис. 7. «Матрешечная» структура в системе (3): $5{,}08 \le c_1 \le 5{,}11$; $c_2 = -6$; $k = 1$

решения изучаемой системы дифференциальных уравнений. Однако прослеженные уровни масштабов, на которых фрагменты бифуркационной диаграммы оказываются подобными себе, показывают отличное качественное соответствие с модельным одномерным отображением, и это дает все основания полагать, что в рассматриваемой двухмодовой системе имеет место «каскад каскадов».

Семейство хаотических аттракторов, порождающих растягивающие одномерные отображения. После обнаружения хаотического аттрактора в двухмодовой системе встал ряд вопросов: насколько типичным он является для исследуемого объекта; в какой мере обладает чувствительностью к параметрам задачи; является ли структура множества параметров, при которой имеет место хаос, сложной, подобной той,

которая наблюдается для логистического отображения, или простой, характерной для всюду растягивающего отображения.

Приведенные расчеты убедительно показывают, что имеет место второй вариант. Зависимость ляпуновских показателей от параметра такова, что старший ляпуновский показатель λ в большом интервале параметров превышает 0,1 (рис. 8). Заметим, что это значение весьма велико по сравнению с системой Лоренца и рядом других исследованных ранее странных аттракторов систем трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Из теории ляпуновских показателей следует, что для странных аттракторов, существующих в ограниченной области фазового пространства в динамических системах с непрерывным временем, один из ляпуновских показателей равен нулю [11]. Точность ε, с которой это выполняется при численно найденных показателях, позволяет судить о точности используемого вычислительного алгоритма. В данном случае нулевой показатель приближает λ_2 с $\varepsilon \approx 10^{-3}$.

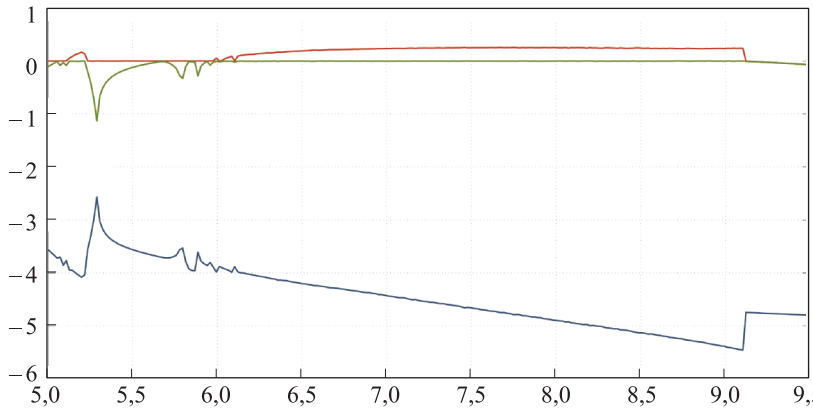


Рис. 8. Зависимость ляпуновских показателей от параметра c_1

Из расчетов следует, что в этой области параметров странные аттракторы порождают семейство растягивающих отображений (см. далее «Возникновение хаоса и эволюция одномерных отображений») с

$$z = \frac{d\xi_{n+k}}{d\xi_n} > 1, \quad k = 1, 2.$$

Иными словами, качественные свойства исследуемого объекта близки к характеристикам простейшего всюду растягивающего одномерного отображения. Поэтому можно ожидать, что и в этом случае количественные характеристики хаоса (моменты распределения ξ_n и η_n, автокорреляционные функции, спектр мощности, инвариантные меры [7]) непрерывно зависят от параметров задачи в тех пределах, в которых можно пренебречь фрактальной структурой странного аттрактора вдоль сжимающего направления.

Возникновение хаоса и эволюция одномерных отображений. Наглядно представить сценарий возникновения хаоса позволяет упомянутое выше семейство одномерных отображений $\xi_{n+1} = f\left(\xi_n, c_1\right)$, порождаемое решениями исходной двухмодовой системы при разных значениях c_1. Видно, что вначале имеет место традиционная последовательностью бифуркаций удвоения периода. Соответствующие точки, порождаемые циклами S^2, S^4 и S^8, прекрасно ложатся на квадратичную параболу. Затем возникают хаотический аттрактор и шумящие циклы.

При увеличении c_1 отображение f «отращивает острую вершину». В этом представлении получаемое отображение, в отличие от модельного, имеет гладкую вершину и острый минимум. Однако замена вида $\xi_n{}' \to c - \xi_n$, где c — подходящая константа, показывает, что они переходят друг в друга.

Появляется вторая ветвь, которая определяет и циклы, и различные типы хаоса. Наличие гладкой вершины, как обсуждалось ранее, приводит к возникновению сложной «оконной структуры», а наличие острого минимума порождает «каскад каскадов».

Наконец при дальнейшем увеличении параметра возникает растягивающее отображение, при этом

$$\frac{d\xi_{n+1}}{d\xi_n} > 1$$

на всем переходящем в себя интервале (рис. 9). Таким отображениям соответствуют бифуркационная диаграмма, лишенная «оконной» или «фрактальной» структуры, «стабильные» ляпуновские показатели и «грубый» хаотический аттрактор. Более подробно эволюция одномерных отображений описана в [12].

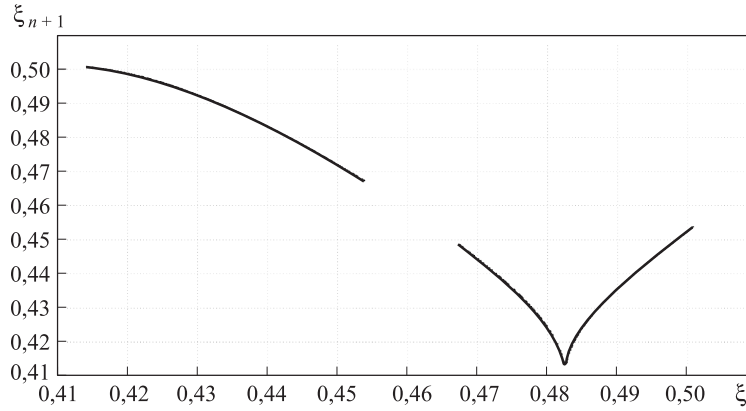


Рис. 9. Одномерное отображение, соответствующее «грубому» хаосу, $c_1 = 6{,}5$

Исчезновение хаотических аттракторов и бистабильность. Анализ двумерного отображения, называемого подковой Смейла, системы Лоренца, логистического отображения, а также многих других объектов нелинейной динамики показал, что хаотические аттракторы могут и появляться, и исчезать скачком. Как отмечалось ранее, в ряде работ это явление называется кризисом аттрактора [7].

Расчеты показывают, что с кризисом аттракторов мы имеем дело при увеличении параметров c_1, c_2 или k при исчезновении хаотического аттрактора системы (3). Соответствующие одномерные отображения $\xi_{n+1} = f\left(\xi_n\right)$ перестают переводить отрезок в себя.

Поскольку все траектории двухмодовой системы ограничены [7], то после кризиса хаотического аттрактора они стремятся к другому предельному множеству. Таковым при увеличении $c_1 > 9{,}25$ является устойчивая особая точка $\left\{\xi^*, \eta^*, \theta^*\right\}$, лежащая на инвариантной прямой $\xi > 0, \eta > 0$.

Результаты вычислительного эксперимента говорят о том, что эта устойчивая точка сосуществует с хаотическим аттрактором в интервале параметров $9{,}11 \le c_1 \le 9{,}25$ (рис. 10). Для расчетов был исполь-

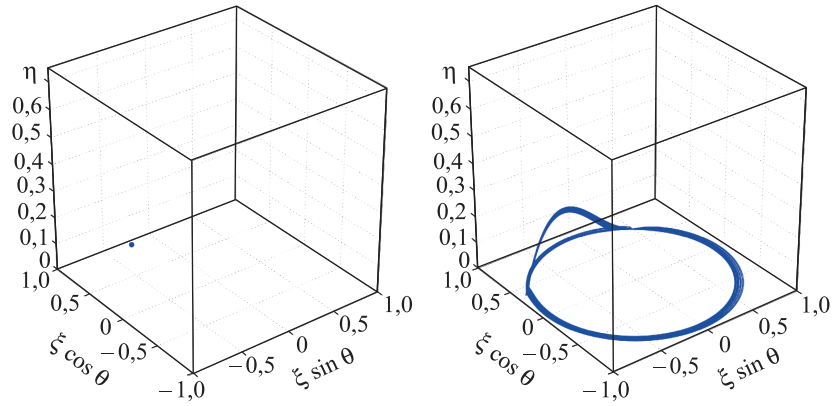


Рис. 10. Бистабильность в системе (3) при $c_1 = 9{,}11$

зован упрощенный вариант метода продолжения по параметру: со значений $\tilde{c}_1 = 9{,}26$, при которых устойчива только одна точка, рассчитывается траектория при $\tilde{c}_1 - \Delta c_1$ с начальными данными, лежащими в окрестности точки $\tilde{c}_1 - \Delta c_1$, что дает точку или другой нехаотический аттрактор, затем описанная процедура повторяется при $c_1 = \tilde{c}_1 - 2\Delta c_1$ и т. д. При $c_1 = 9{,}109$ особая точка претерпевает бифуркацию Хопфа (бифуркацию рождения предельного цикла). В интервале $9{,}107 \le c_1 \le 9{,}109$ вместе с хаотическим аттрактором сосуще-

ствует предельный цикл. Таким образом, в отличие от логистического отображения, других S-унимодальных отображений и системы Лоренца для двухмодовой системы (3) характерна бистабильность — существование двух аттракторов — странного и нехаотического — со своими областями притяжения.

Это явление характерно для рассматриваемого объекта и при других значениях c_1. Были обнаружены зоны бистабильности при $5,224 < c_1 < 5,226$, в которой хаотический аттрактор сосуществует с устойчивым циклом S^2 (рис. 11), а также в диапазоне значений параметра $5,870 < c_1 < 5,872$, при этом устойчив цикл S^4.

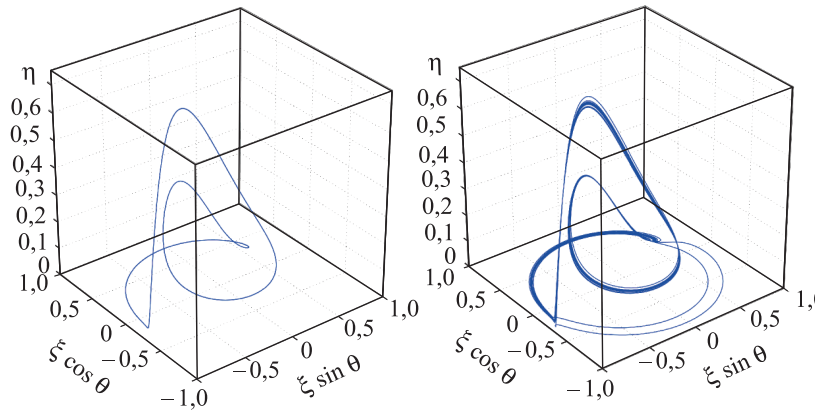


Рис. 11. Бистабильность в системе (4) при $c_1 = 5,225$

Заключение. Приведенный численный анализ позволил установить несколько замечательных особенностей аттракторов двухмодовой системы, которая отражает свойства большого класса систем «реакция–диффузия». Была обнаружена большая область параметров, где аттрактор обладает растягивающим и сжимающим направлениями, расположенными под большим углом, и с высокой точностью может быть приближен растягивающим одномерным отображением. Это делает его идеальным объектом для эргодической и гиперболической теорий.

Показано качественное соответствие между бифуркационными диаграммами, описывающими рождение и уничтожение странных аттракторов при вариации параметров c_1, c_2 и k в различных диапазонах. В частности, исчезновение хаоса во множестве случаев связано с кризисом странного аттрактора и бистабильностью (когда наряду со странным аттрактором существует особая точка или предельный цикл).

Интересные свойства изучаемой модели связаны с самоподобием на нескольких уровнях (структура бифуркационной диаграммы типа «каскад каскадов»). Соответствующие одномерные отображения

имеют гладкую вершину и острый минимум, что приводит к ряду необычных неустойчивостей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 11-01-00887 и № 13-01-00617.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Николис Г., Пригожин И. *Самоорганизация в неравновесных системах*. Москва, Мир, 1979, 512 с.
[2] Хакен Г. *Синергетика.* Москва, Мир, 1980, 406 с.
[3] Курдюмов С.П. *Режимы с обострением: эволюция идеи*. Малинецкий Г.Г., ред. Москва, Наука, 1999.
[4] Turing A. The chemical basis of morphogenesis. *Phil. Trans. Roy. Soc*. London, 1952, vol. 237, pp. 37−72.
[5] Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reacton-diffusion systems. *Prog. Theor. Phys.*, 1975, vol. 54, no. 3, pp. 687−699.
[6] Кащенко С.А. О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией. *ДАН СССР*, 1988, т. 229, № 5, с. 1049−1052.
[7] Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г, Самарский А.А. *Структуры и хаос в нелинейных средах*. Москва, Физматлит, 2007, 488 с.
[8] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Stretcin J.M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1, 2. *Mechanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9−20; 21−30.
[9] Боколишвили И.Б., Малинецкий Г.Г. *О сценариях перехода к хаосу в одномерных отображениях с острой вершиной*. Москва, ИПМ, 1987, 28 с.
[10] Feigenbaum M.J. Universal behavior in nonlinear systems. *Los Alamos Sci.*, 1980, vol.1, no. 1, pp. 4−27.
[11] Хакен Г. *Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах*. Москва, Мир, 1985, 419 с.
[12] Малинецкий Г.Г., Фаллер Д.С. *Сценарии перехода к хаосу в двухмодовой системе для систем «реакция–диффузия»*. ИПМ им. М.В. Келдыша, Препринты, Москва, 2013, № 67, 36 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-67

Статья поступила в редакцию 02.09.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Малинецкий Г.Г., Фаллер Д.С. Анализ бифуркаций в двухмодовой аппроксимации системы Курамото — Цузуки. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 111–125.

Малинецкий Георгий Геннадьевич — д-р физ.-мат. наук, заведующий отделом Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор и соавтор более 550 научных публикаций, в том числе 6 монографий. e-mail: GMalin@keldysh.ru

Фаллер Дмитрий Сергеевич родился в 1988 г., окончил МГТУ «Станкин». Мл. научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Автор 5 статей.

Analysis of bifurcations in double-mode approximation for Kuramoto — Tsuzuki system

© G.G. Malinetsky, D.S. Faller

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047, Russia

The article discusses emergence of chaotic attractors in the system of three ordinary differential equations arising in the theory of reaction–diffusion models. We studied the dynamics of the corresponding one- and two-dimensional maps and Lyapunov exponents of such attractors. We have shown that chaos is emerging in an unconventional pattern with chaotic regimes emerging and disappearing repeatedly. We had already studied this unconventional pattern for one-dimensional maps with a sharp apex and a quadratic minimum. We applied numerical analysis to study characteristic properties of the system, such as bistability and hyperbolicity zones, crisis of chaotic attractors.

Keywords: *nonlinear dynamics, double-mode system, reaction–diffusion models, bifurcations, self-similarity, "cascade of cascades", crisis of attractor, ergodicity, bistability.*

REFERENCES

[1] Nikolis G., Prigozhin I. *Samoorganizatsiya v neravnovesnykh sistemakh* [Self-organization in nonequilibrium systems]. Moscow, Mir Publ., 1979, 512 p.

[2] Haken H. *Synergetics.* Berlin, Heidelberg, N.Y., Springer-Velard, 1978. [Russian edition: Haken H. *Sinergetika.* Moscow, Mir Publ., 1980, 406 p.].

[3] Kurdyumov S.P. *Rezhimy s obostreniem: evolutsiya idei* [Sharpening Regimes: Evolution of Ideas]. Malinetskiy G.G., ed. Moscow, Nauka Publ., 1999.

[4] Turing A. The chemical basis of morphogenesis. *Phyl. Trans. Roy. Soc*. London, 1952, vol. 237, pp. 37−72.

[5] Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction–diffusion systems. *Prog. Theor. Phys.*, 1975, vol. 54, no. 3, pp. 687−699.

[6] Kashchenko S.A. O kvazinormal'nykh formakh dlya parabolicheskikh uravneniy [On the quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1998, no. 5, vol. 229, pp.1049–1052.

[7] Akhromeeva T.S., Kurdyumov S.P., Malinetsky G.G., Samarskiy A.A. *Struktury i khaos v nelineinykh sredah* [Structures and chaos in nonlinear media]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 488 p.

[8] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Stretcin J.M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1, 2. *Mechanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9−20; 21−30.

[9] Bokolishvili I.B., Malinetsky G.G. *O stsenariyakh perekhoda k khaosu v odnomernykh otobrazheniyakh s ostroy vershinoy* [About scenarios of transition to chaos in one-dimensional maps with a sharp top]. Moscow, IPM, 1987.

[10] Feigenbaum M.J. Universal behavior in nonlinear systems. *Los Alamos Sci.*, 1980, vol. 1, no. 1, pp. 4−27.

[11] Haken H. *Sinergetika. Ierarkhii neustoychivosti v samoorganizuyushchikhsya sistemakh i ustroystvakh* [Synergetics. The hierarchy of instabilities in self-organizing systems and devices] Moscow, Mir Publ., 1985, 419 p. [in Russian].

[12] Malinetsky G.G., Faller D.S. *Stsenarii perekhoda k khaosu v dvukhmernoy sisteme dlya sistem reaktsiya–diffuziya* [Scenarios of Transition to Chaos in Two-mode System of Systems Reaction–Diffusion]. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Preprints, 2013, no. 67, 36 p. Available at: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-67

Malinetsky G.G., Dr. Sci. (Phys.&Math.), head of the Department of Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, professor of the Applied Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: GMalin@keldysh.ru

Faller D.S. (b. 1988) graduated from Moscow State University of Technology “Stankin”. Junior research fellow at Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences. Author of 5 papers.