ISSN 2309-3684

Математическое моделирование и численные методы

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2020-4-84110

Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 1. Общая теория оболочек

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, А.Е. Пичугина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных оболочек, вывод основных уравнений которой основан на асимптотическом разложении по малому геометрическому параметру трехмерных уравнений термоупругости. Данный метод был ранее разработан авторами для тонких композитных пластин, и в настоящей статье применен для тонкостенных оболочек произвольной формы. Согласно разработанному методу исходная трехмерная задача термоупругости распадается на рекуррентную последователь одномерных локальных задач термоупругости и осредненную двумерную задачу тонких оболочек. Для локальных задач термоупругости получены аналитические решения, которые позволяют замкнуть осредненную постановку задачу теории оболочек относительно 5 неизвестных функций: продольных перемещений, прогиба и двух перерезывающих сил. Показано, что осредненная задача для многослойных оболочек совпадает с классической системой уравнений оболочек Кирхгофа-Лява, однако она является более обоснованной, так как в основе асимптотической теории не содержится никаких допущений относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине. Кроме того, асимптотическая теория позволяет вычислить все напряжения в оболочке, без решения каких-либо дополнительных задач, а только лишь дифференцируя осредненные перемещения.

Ключевые слова: *асимптотическая теория, уравнения термоупругости, многослойные оболочки, композиты, тензор напряжений, оболочки типа Кирхгофа-Лява*

Введение. Расчеты тонкостенных конструкций на прочность в настоящее время чаще всего выполняются на основе двумерных теорий пластин и оболочек, или одномерных теорий стержней [1–8]. Это обусловлено значительной вычислительной эффективностью, которая достигается при использовании теорий этого типа по сравнению с использованием общих 3-мерных уравнений механики деформируемого твердого тела. Однако классические проблемы, которые характерны для двумерных и одномерных уравнений механики тонкостенных конструкций: обоснованность гипотез [9], лежащих в основе этих теорий; точность расчета всех компонент напряжений являются причинами постоянного появления новых теорий пластин и оболочек.

В настоящее время большое внимание уделяется асимптотическим теориям тонких конструкций, в которых содержится минимальное число допущений, и отсутствуют допущения относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине пластин и оболочек [10–13]. В работах [13–20] был разработан оригинальный вариант асимптотических теорий пластин, в которых формулируются специальные последовательности локальных задач механики, с помощью решения которых замыкается общая рекуррентная последовательность асимптотических разложений осредненных задач механики тонкостенных конструкций. В результате обоснованность всех основных уравнений теории тонкостенных конструкций получается существенно боле высокой. В [13] показано, что точность расчета напряжений с помощью предложенного асимптотического метода также очень высокая. В работах [16–18] этот метод применен для построения теории тонких упругих оболочек. Целью настоящей работы является построение асимптотической теории термоупругости многослойных оболочек.

Следует отметить, что для ряда задач, к которым относятся задачи термоупругости многослойных композитных конструкций при нестационарном неравномерном нагреве, важную роль играют межслойные и поперечные напряжения, которые могут приводить к расслоению оболочек. С этой точки зрения необходимость достижения высокой точности при анализе термонапряжений в слоях оболочек является важной задачей и с практической точки зрения.

Геометрическая модель тонкой оболочки. Следуя [21], рассмотрим оболочку, как трехмерное тело, представляющее собой окрестность V_h срединной поверхности Σ_0, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$x^i = x^i(X^I), \quad I = 1,2, \quad i = 1,2,3, \tag{1}$$

где x^i — декартовы координаты точек в ортонормированном (декартов) базисе $\overline{\mathbf{e}}_i$, а X^I — параметрические координаты срединной поверхности. Здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами $I,\ J,\ K,\ L,\ M$, принимают значения 1, 2, а индексы $i,\ j,\ k,\ l$ — значения 1, 2, 3. Все координаты x^i и X^I будем полагать безразмерными, отнесенными к характерной длине L — диаметру поверхности Σ_0.

Радиус-вектор точки M, принадлежащей срединной поверхности оболочки, обозначим как:

$$\boldsymbol{\rho}(X^I) = x^i(X^I)\overline{\mathbf{e}}_i. \tag{2}$$

Векторы локального базиса для срединной поверхности, метрическую матрицу срединной поверхности $\tilde{g}_{IJ}$ и вектор нормали к Σ_0 вводим стандартным образом [21]:

$$\boldsymbol{\rho}_I = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial X^I}, \quad \tilde{g}_{IJ} = \boldsymbol{\rho}_I \cdot \boldsymbol{\rho}_J, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2, \tag{3}$$

где $\tilde{g} = \det\left(\tilde{g}_{IJ}\right)$. Радиус-вектор точек M', принадлежащих оболочке V_h, представим следующим образом [21]:

$$\mathbf{x}(X^i) = \boldsymbol{\rho}(X^I) + X^3 \mathbf{n}(X^I), \tag{4}$$

$$V_h = \{X^i \,|\, -\frac{æ}{2} < X^3 < \frac{æ}{2}, X^I \in \Sigma_0\}, \tag{5}$$

где обозначен малый параметр

$$æ = \frac{h}{L} \ll 1, \tag{6}$$

здесь h — толщина оболочки, а X^3 — нормальная безразмерная координата, по которой отсчитывается толщина оболочки. Оболочку, для которой введено допущение (6), называют тонкой [21].

Вводим локальные базисы и метрическую матрицу оболочки

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^i}, \quad g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j. \tag{7}$$

Криволинейные координаты X^i оболочки полагаем ортогональными, так что метрические матрицы $\tilde{g}_{IJ}$ и g_{ij} являются диагональными и можно ввести

$$A_\alpha = \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\alpha}}, \; \alpha = 1,2; \; H_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}, \; \alpha = 1,2,3 \tag{8}$$

— коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности и коэффициенты Ламе оболочки — все являются безразмерными.

Введем ортонормированный базис [21]

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\mathbf{r}_\alpha}{H_\alpha}, \quad \alpha = 1,2,3, \tag{9}$$

а также введем локальную ξ координату по толщине оболочки:

$$\xi = X^3 / æ, \tag{10}$$

которая, согласно (5) изменяется для оболочки в промежутке $-0,5 < \xi < 0,5$.

Все функции, являющиеся решением задачи термоупругости, будем рассматривать как зависящие от двумерных координат X^I и локальной координаты ξ:

$$\Omega = \Omega(X^I, \xi). \tag{11}$$

Согласно общей концепции асимптотических методов, основанных на введении двух масштабов изменения решений дифференциальных уравнений в частных производных [12, 19], будем полагать выполненным следующее правило дифференцирования функций вида (11), которое вытекает из (10):

$$\frac{\partial u_i}{\partial X^3} = \frac{1}{æ}\frac{\partial u_i}{\partial \xi}. \tag{12}$$

Для тонких оболочек примем следующие допущения [22]:

$$\begin{gathered} H_3, \quad H_\alpha = A_\alpha(1 + æk_\alpha\xi) \approx A_\alpha, \;\; \alpha = 1,2, \\ \frac{\partial H_3}{\partial \xi} = 0, \;\; \frac{\partial H_\alpha}{\partial \xi} = æA_{\alpha 3}, \;\; A_{\alpha 3} = A_\alpha k_\alpha, \;\; \alpha = 1,2, \\ \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} = A_{\alpha,\beta} + æ(A_\alpha k_\alpha)_{,\beta} \approx A_{\alpha,\beta}, \end{gathered} \tag{13}$$

здесь k_α — безразмерные кривизны срединной поверхности Σ_0 оболочки.

Введем обозначения

$$\Omega_{/3} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \;\; \Omega_{,\alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial X^\alpha}, \;\; O_\alpha = \frac{1}{H_\alpha} = \frac{1}{A_\alpha}, \;\; \alpha = 1,2, \;\; O = O_1 O_2. \tag{14}$$

Система 3-х мерных уравнений термоупругости для многослойной оболочки. Рассмотрим для оболочки V_h квазистатическую задачу 3-х мерной линейной теории термоупругости, состоящую из системы уравнений термоупругости при малых деформациях [22] и уравнений нестационарной теплопроводности [21]. В компонентной форме в криволинейных координатах X^I, ξ с учетом допущений (13) о тонкостенности оболочки и правил дифференцирования (12), эта система может быть записана в следующем виде:

$$\begin{gathered} \frac{1}{æ}A_1A_2\sigma_{\alpha 3/3} + \left(A_\beta\sigma_{\alpha\alpha}\right)_{,\alpha} + \left(A_\alpha\sigma_{\alpha\beta}\right)_{,\beta} + A_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta} - \\ -A_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta} + A_\beta A_{\alpha 3}\sigma_{\alpha 3} + A_1A_2\rho f_\alpha = 0, \;\; \alpha = 1,2, \\ \frac{1}{æ}A_1A_2\sigma_{33/3} + \left(A_2\sigma_{13}\right)_{,1} + \left(A_1\sigma_{23}\right)_{,2} - \\ -A_2A_{13}\sigma_{11} - A_1A_{23}\sigma_{22} + A_1A_2\rho f_3 = 0 \end{gathered} \tag{15}$$

— уравнения равновесия;

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}=O_\alpha u_{\alpha,\alpha}+O_1O_2A_{\alpha,\beta}u_\beta+O_\alpha A_{\alpha 3}u_3,$$
$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{æ}u_{3/3},$$
$$2\varepsilon_{12}=A_1O_2\left(u_1O_1\right)_{,2}+A_2O_1\left(u_2O_2\right)_{,1},\tag{16}$$
$$2\varepsilon_{\alpha 3}=\frac{1}{æ}u_{\alpha/3}+O_\alpha\left(u_{3,\alpha}-A_{\alpha 3}u_\alpha\right)$$

— соотношения Коши;

$$\frac{\rho c_v}{æ^2\mathrm{Fo}_0}\frac{\partial\theta}{\partial t}=-O_1O_2\left(A_2q_{1,1}+A_1q_{2,2}+\frac{A_1A_2}{æ}q_{3/3}\right)\tag{17}$$

— уравнение теплопроводности;

$$\sigma_{IJ}=C_{IJKL}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon^T_{KL})+C_{IJ33}(\varepsilon_{33}-\varepsilon^T_{33}),$$
$$\sigma_{I3}=2C_{I3K3}\varepsilon_{K3},\tag{18}$$
$$\sigma_{33}=C_{33KL}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon^T_{KL})+C_{3333}(\varepsilon_{33}-\varepsilon^T_{33})$$

— соотношения термоупругости;

$$-q_I=\lambda_{IJ}g_J,\ \ -q_3=\lambda_{33}g_3\tag{19}$$

— закон Фурье;

$$g_\alpha=O_\alpha\theta_{,\alpha},\ \ \alpha=1,2,\ \ g_\alpha=\frac{1}{æ}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\tag{20}$$

— выражения для градиента температуры;

$$\Sigma_{3\pm}:\ \ \sigma_{i3}=-\tilde{p}_\pm\delta_{i3},\ \ \ q_3=\pm q_{e\pm},\tag{21}$$
$$\Sigma_{Tu}:\ u_i=u_{ei},\ \ \Sigma_{T\sigma}:\ \sigma_{iJ}n_J=t_{nei},\ \ q_In_I=0,\tag{22}$$
$$\Sigma_S:\left[\sigma_{i3}\right]=0,\ \ \left[u_i\right]=0,\ \ [q_3]=0,\ \ [\theta]=0,\tag{23}$$
$$t=0:\ \ \theta=1\tag{24}$$

— граничные на внешней и внутренней поверхностях $\Sigma_{3\pm}=\{\xi=\pm 0,5\}$, на торцевых поверхностях $\Sigma_T=\{-0,5<\xi<0,5,X^I\in\partial\Sigma_0\}$, и на поверхностях раздела слоев $\Sigma_S=\{\xi=\xi_s\}$, $s=1,...,N-1$, где N — число слоев в оболочке, а также начальное условие.

В (13)–(21) обозначены безразмерные компоненты векторов и тензоров в базисе $\mathbf{e}_i$: σ_{ij} — тензор напряжений (отнесен к характерному значению модуля упругости E_0), ε_{ij} — тензор малых деформаций, $\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij}(\theta - \theta_0)$ — тензор тепловых деформаций, α_{ij} — тензор теплового расширения, C_{ijkl} — тензор модулей упругости (отнесен к E_0), u_i — вектор перемещений (отнесен к L), λ_{ij} — тензор теплопроводности (отнесен к характерному значению теплопроводности λ_0), q_i — вектор теплового потока (отнесен к $\lambda_0\theta_0/L$), g_i — градиент температуры (отнесен к θ_0/L), f_i — вектор плотности массовых сил (отнесен к $E_0/(\rho_0 L)$), u_{ie} — заданный вектор перемещений, t_{nei} — вектор напряжений, заданный на торцевой части $\Sigma_{T\sigma}$ поверхности (отнесенный к E_0), n_i — вектор нормали. Введены также обозначения для: ρ — плотности (отнесена к характерному значению ρ_0), c_v — удельной теплоемкости (отнесена к характерному значению c_0), t — времени (отнесено к характерному времени t_0), θ — температуры (отнесена к начальному значению температуры θ_0), $q_{e\pm}$ — заданного теплового потока на поверхностях $\Sigma_\pm$ оболочки, $\tilde{p}_\pm$ — давления, заданного на внешней и внутренней поверхностях $\Sigma_\pm$ оболочки, $[u_i]$ — скачка функций.

Введен также безразмерный параметр Фурье

$$\mathrm{Fo} = \lambda_0 t_0 / \left(\rho_0 c_0 L^2\right). \tag{25}$$

Основные допущения модели. Кроме допущения (8) о тонкостенности оболочки, введем также допущения об условиях нагрева

$$Fo = æ^2 Fo_0, \ q_{e\pm} = \frac{1}{æ} q_\pm^{(-1)}, \tag{26}$$

где Fo_0 и $q_\pm^{(-1)}$ — величины, порядка 1. Это допущение означает, что нагрев рассматривается на относительно коротких временах, когда распределение температурного поля по толщине оболочки является существенно неравномерным.

Введем также допущение [10,12], которое заключается в том, что давление $\tilde{p}_\pm$ на внутренней и внешней поверхностях имеет порядок малости $O(æ^3)$ т.е.

$$\tilde{p}_\pm = æ^3 p_\pm. \tag{27}$$

Слои оболочки далее полагаем моноклинными материалами [21], с главным базисом осей анизотропии, совпадающим с $\mathbf{e}_\alpha$, тогда определяющие соотношения для тонкой оболочки имеют вид (18), (19).

Асимптотические разложения решения задачи для тонкой оболочки. Уравнения (15)–(24) содержат малый параметр $æ$, будем искать их решение в виде асимптотических разложений по параметру $æ$ в виде функций (11), зависящих от глобальных и локальной координат:

$$\begin{gathered} u_k = u_k^{(0)}(X^\alpha) + æ u_k^{(1)}(X^\alpha,\xi) + æ^2 u_k^{(2)}(X^\alpha,\xi) + \ldots, \\ \theta = \theta^{(0)}(X^\alpha,\xi,t) + æ\theta^{(1)}(X^\alpha,\xi,t) + æ^2\theta^{(2)}(X^\alpha,\xi,t) + \ldots \end{gathered} \quad (28)$$

Подставим разложения (28) в соотношения Коши (16) и определяющие соотношения (18), (19), тогда получим асимптотические разложения для деформаций, напряжений, градиента температуры и вектора теплового потока

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + æ\varepsilon_{ij}^{(1)} + æ^2\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots, \quad (29)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + æ\sigma_{ij}^{(1)} + æ^2\sigma_{ij}^{(2)} + ..., \quad (30)$$

$$g_i = \frac{1}{æ} g_i^{(-1)} + g_i^{(0)} + æ g_i^{(1)} + æ^2 g_i^{(2)} + ..., \quad (31)$$

$$q_i = \frac{1}{æ} q_i^{(-1)} + q_i^{(0)} + æ q_i^{(1)} + æ^2 q_i^{(2)} + ... \quad (32)$$

Формулировка локальных задач для тонких оболочек. Подставляя разложения (28)–(32) в уравнения (15)–(17) и граничные условия (21), (24), после приравнивания в уравнениях равновесия (15) и в уравнении теплопроводности (17) членов при отрицательных степенях $æ$ к нулю, а при остальных степенях $æ$ — к некоторым величинам $h_i^{(0)}$, $h_i^{(1)}$, $h_i^{(2)}, \ldots$ и $h_0^{(0)}$, $h_0^{(1)}$, $h_0^{(2)}, \ldots$ не зависящим от ξ, получим рекуррентную последовательность локальных задач термоупругости.

Локальная задача термоупругости нулевого приближения при $n = 0$ имеет вид:

$$\frac{\rho c_v}{\mathrm{Fo}_0}\frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial t} = -q_{3/3}^{(-1)}, \quad (33)$$

$$-q_3^{(-1)} = \lambda_{33} g_3^{(-1)}, \;\; g_3^{(-1)} = \theta_{/3}^{(0)}, \quad (34)$$

$$\begin{gathered} \sigma_{i3/3}^{(0)} = 0, \\ \sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{IJ33}\varepsilon_{33}^{(0)} - C_{IJkl}\varepsilon_{kl}^{T(0)}, \end{gathered} \quad (35)$$

$$\sigma_{I3}^{(0)} = 2C_{I3K3}\varepsilon_{K3}^{(0)},$$
$$\sigma_{33}^{(0)} = C_{33KL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{3333}\varepsilon_{33}^{(0)} - C_{33kl}\varepsilon_{kl}^{T(0)}, \tag{36}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(0)} = O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(0)} + A_{\alpha,\beta}O_1O_2u_\beta^{(0)} + A_{\alpha3}O_\alpha u_3^{(0)},$$
$$2\varepsilon_{12}^{(0)} = A_1O_2(u_1^{(0)}O_1)_{,2} + A_2O_1(u_2^{(0)}O_2)_{,1},$$
$$\varepsilon_{33}^{(0)} = u_{3/3}^{(1)}, \tag{37}$$
$$2\varepsilon_{\alpha3}^{(0)} = u_{\alpha/3}^{(1)} + O_\alpha u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha3}O_\alpha u_\alpha^{(0)},$$

$$\Sigma_{3\pm}: \sigma_{i3}^{(0)} = 0, \tag{38}$$

$$\Sigma_S: [\sigma_{i3}^{(0)}] = 0,\ \left[u_i^{(1)}\right] = 0,\ [q_3^{(-1)}] = 0,\ \left[\theta^{(0)}\right] = 0, \tag{39}$$

$$< u_i^{(1)} >= 0, \tag{40}$$

$$\Sigma_{3\pm}: q_3^{(-1)} = \pm q_{e\pm}. \tag{41}$$

Для высших приближений при $n = 1, 2, \ldots$ получаем следующие локальные задачи

$$\frac{\rho c_v}{\mathrm{Fo}_0}\frac{\partial\theta^{(n)}}{\partial t} + O_1O_2\left(A_2q_{1,1}^{(n-2)} + A_1q_{2,2}^{(n-2)}\right) + q_{3/3}^{(n-1)} = h_0^{(n-2)}, \tag{42}$$

$$-q_I^{(n-2)} = \lambda_{IJ}g_J^{(n-2)},\ -q_3^{(n-1)} = \lambda_{33}g_3^{(n-1)},$$
$$g_J^{(n-2)} = \theta_{,J}^{(n-2)},\ g_3^{(n-1)} = \theta_{/3}^{(n)}, \tag{43}$$

$$A_1A_2\sigma_{\alpha3/3}^{(n)} + \left(A_\beta\sigma_{\alpha\alpha}^{(n-1)}\right)_{,\alpha} + \left(A_\alpha\sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)}\right)_{,\beta} + A_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} - A_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(n-1)} +$$
$$+A_\beta A_{\alpha3}\sigma_{\alpha3}^{(n-1)} + A_1A_2f_\alpha^{(n-1)} = h_\alpha^{(n-1)}, \tag{44}$$

$$A_1A_2\sigma_{33/3}^{(n)} + \left(A_2\sigma_{13}^{(n-1)}\right)_{,1} + \left(A_1\sigma_{23}^{(n-1)}\right)_{,2} - A_2A_{13}\sigma_{11}^{(n-1)} - A_1A_{23}\sigma_{22}^{(n-1)} +$$
$$+A_1A_2f_3^{(n-1)} = h_3^{(n-1)}, \tag{45}$$

$$\sigma_{IJ}^{(n)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{IJKL}\varepsilon_{33}^{(n)} - C_{IJkl}\varepsilon_{kl}^{T(n)},$$
$$\sigma_{I3}^{(n)} = 2C_{I3K3}\varepsilon_{K3}^{(n)}, \tag{46}$$
$$\sigma_{33}^{(n)} = C_{33KL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{3333}\varepsilon_{33}^{(n)} - C_{33kl}\varepsilon_{kl}^{T(n)},$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(n)} = O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(n)} + A_{\alpha,\beta}O_1O_2u_\beta^{(n)} + A_{\alpha3}O_\alpha u_3^{(n)},$$
$$2\varepsilon_{12}^{(n)} = O_2u_{1,2}^{(n)} + O_1u_{2,1}^{(n)} - O_1O_2(A_{1,2}u_1^{(n)} + A_{2,1}u_2^{(n)}),$$
$$\varepsilon_{33}^{(n)} = u_{3/3}^{(n+1)}, \tag{47}$$
$$2\varepsilon_{\alpha3}^{(n)} = u_{\alpha/3}^{(n+1)} + O_\alpha u_{3,\alpha}^{(n)} - A_{\alpha3}O_\alpha u_\alpha^{(n)},$$

$$\Sigma_{3\pm}: \sigma_{i3}^{(n)} = S_{i\pm}^{(n)}, \tag{48}$$

$$\Sigma_S: [\sigma_{i3}^{(n)}] = 0,\ \left[u_i^{(n+1)}\right] = 0,\ [q_3^{(n-1)}] = 0,\ \left[\theta^{(n)}\right] = 0, \tag{49}$$

$$< u_i^{(n+1)} >= 0, \quad < \theta^{(n)} >= 0, \tag{50}$$

$$\Sigma_{3\pm} : q_3^{(n-1)} = 0, \tag{51}$$

$$\Sigma_T : q_I^{(n-2)} n_I = 0. \tag{52}$$

Здесь обозначена операция осреднения по толщине оболочки

$$< u_i^{(\mathrm{n})} >= \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(\mathrm{n})} d\xi, \tag{53}$$

а также обозначены функции граничных условий и массовых сил

$$\begin{gathered} S_{i\pm}^{(n)} = 0, \text{ если } n = 1, 2, 4, 5, ..., \\ S_{i\pm}^{(n)} = -p_{\pm}\delta_{i3}, \text{ если } n = 3, \\ f_i^{(n)} = 0, \text{ если } n = 1, 2, 3, 4, 5, ..., \\ f_i^{(n)} = \rho f_i, \text{ если } n = 0. \end{gathered} \tag{54}$$

Уравнения равновесия (15) после введения функций $h_i^{(0)},\ h_i^{(1)},\ h_i^{(2)}$, принимают вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} æ^n h_i^{(n)} = h_i^{(0)} + æ h_i^{(1)} + æ^2 h_i^{(2)} + ... = 0. \tag{55}$$

Решением локальной задачи термоупругости в нулевом приближении (33)–(41) являются функции $\theta^{(0)},\ u_j^{(1)},\ \varepsilon_{kl}^{(0)},\ \sigma_{ij}^{(0)}$, они зависят от локальной координаты ξ и входных данных этой задачи — перемещений $u_j^{(0)}(X^\alpha)$. Решением задачи термоупругости $n-$го приближения (42)–(52) являются функции $\theta^{(n)},\ u_j^{(n+1)},\ \varepsilon_{kl}^{(n)},\ \sigma_{ij}^{(n)}$, а $\theta^{(n-1)},\ u_j^{(n)},\ \varepsilon_{kl}^{(n-1)},\ \sigma_{ij}^{(n-1)}$ в этой задаче — входные данные.

Решение локальной задачи нулевого приближения. Решение уравнений равновесия (35) с граничными условиями (38) в локальной задаче нулевого приближения имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(0)} = 0, \ \forall \xi : -0,5 < \xi < 0,5. \tag{56}$$

Подставив (56) во вторую и третью группу определяющих соотношений в системе (36), получаем, что в нулевом приближении деформации межслойного сдвига во всех слоях являются нулевыми, а поперечная деформация — ненулевая

$$\varepsilon_{K3}^{(0)} = 0, \ \varepsilon_{33}^{(0)} = Z_{3kl}\varepsilon_{kl}^{T(0)} - Z_{3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)}, \tag{57}$$

где обозначено

$$Z_{3KL} = C^{-1}_{3333} C_{33KL}, \; Z_{3kl} = C^{-1}_{3333} C_{33kl}. \tag{58}$$

Подставив в (57) выражения для деформаций $\varepsilon^{(0)}_{K3}$, $\varepsilon^{(0)}_{33}$, из (37), с учетом (40), находим перемещения $u^{(1)}_i$:

$$\begin{gathered} u^{(1)}_\alpha = -\xi O_\alpha (u^{(0)}_{3,\alpha} - A_{\alpha 3} u^{(0)}_\alpha), \\ u^{(1)}_3 = U^{(1)}_{3KL} \varepsilon^{(0)}_{KL} + U^{T(1)}_3, \end{gathered} \tag{59}$$

где обозначено

$$U^{(1)}_{3KL} = -< Z_{3KL} >_\xi, \; U^{T(1)}_3 =< Z_{3kl} \varepsilon^{T(0)}_{kl} >_\xi . \tag{60}$$

В (60) введено обозначение для следующей операции:

$$< f >_\xi = \int\limits_{-0,5}^{\xi} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} - < \int\limits_{-0,5}^{\xi} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} >. \tag{61}$$

Подставив выражения (57) в первую группу определяющих соотношений системы (36), находим напряжения $\sigma^{(0)}_{IJ}$:

$$\sigma^{(0)}_{IJ} = C^{(0)}_{IJKL} \varepsilon^{(0)}_{KL} - C^{(0)}_{IJkl} \varepsilon^{T(0)}_{kl}, \tag{62}$$

где обозначено

$$C^{(0)}_{IJkl} = C_{IJkl} - C_{IJ33} Z_{3kl}. \tag{63}$$

Решение локальных задач L_n высших приближений. Решим уравнения равновесия (44), (45) относительно $\sigma^{(n)}_{\alpha 3/3}$ и $\sigma^{(n)}_{33/3}$.

$$\begin{gathered} \sigma^{(n)}_{\alpha 3/3} = -O_1 O_2 (\left(A_\beta \sigma^{(n-1)}_{\alpha\alpha} \right)_{,\alpha} + \left(A_\alpha \sigma^{(n-1)}_{\alpha\beta} \right)_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sigma^{(n-1)}_{\alpha\beta} - \\ - A_{\beta,\alpha} \sigma^{(n-1)}_{\beta\beta} + A_\beta A_{\alpha 3} \sigma^{(n-1)}_{\alpha 3}) + O_1 O_2 \left(h^{(n-1)}_\alpha - A_\beta f^{(n-1)}_\alpha \right), \end{gathered} \tag{64}$$

$$\begin{gathered} \sigma^{(n)}_{33/3} = -O_1 O_2 (\left(A_2 \sigma^{(n-1)}_{13} \right)_{,1} + \left(A_1 \sigma^{(n-1)}_{23} \right)_{,2} - A_2 A_{13} \sigma^{(n-1)}_{11} - \\ - A_1 A_{23} \sigma^{(n-1)}_{22}) + O_1 O_2 \left(h^{(n-1)}_3 - A_1 A_2 f^{(n-1)}_3 \right). \end{gathered} \tag{65}$$

Проинтегрируем обе части этих уравнений по ξ, принимая во внимание, что A_i, O_i, $h^{(n-1)}_\alpha$, $f^{(n-1)}_\alpha$ не зависят от ξ. Подставим полученные выражения в граничные условия (48) на поверхностях Σ_{3-} и Σ_{3+}, находим функции $h^{(n-1)}_\alpha$ и $h^{(n-1)}_3$

$$h_\alpha^{(n-1)} = A_1 A_2 f_\alpha^{(n-1)} + < \left(A_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(n-1)}\right)_{,\alpha} + \left(A_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)}\right)_{,\beta} + \\ + A_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} - A_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(n-1)} + A_\beta A_{\alpha 3}\sigma_{\alpha 3}^{(n-1)} >, \quad (66)$$

$$h_3^{(n-1)} = A_1 A_2 (\Delta S_3^{(n)} + f_3^{(n-1)}) + < \left(A_2 \sigma_{13}^{(n-1)}\right)_{,1} + \\ + \left(A_1 \sigma_{23}^{(n-1)}\right)_{,2} - A_2 A_{13}\sigma_{11}^{(n-1)} - A_1 A_{23}\sigma_{22}^{(n-1)} >, \quad (67)$$

где обозначено $\Delta S_3^{(n)} = S_{3+}^{(n)} - S_{3-}^{(n)}$.

Введем оператор

$$\{f(X^\alpha, \xi)\}_\xi = \int_{-0,5}^{\xi} (f(X^\alpha, \tilde{\xi}) - < f >) d\tilde{\xi}. \quad (68)$$

Тогда, подставляя выражения (66) и (67) в (64) и (65), получим

$$\sigma_{\alpha 3}^{(n)} = -O_1 O_2 \{\left(A_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(n-1)}\right)_{,\alpha} + \left(A_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)}\right)_{,\beta} + A_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} - \\ - A_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(n-1)} + A_\beta A_{\alpha 3}\sigma_{\alpha 3}^{(n-1)}\}_\xi, \quad (69)$$

$$\sigma_{33}^{(n)} = \Delta S_3^{(n)} \left(\xi + 0.5\right) + S_{3-}^{(n)} - O_1 O_2 \{\left(A_2 \sigma_{13}^{(n-1)}\right)_{,1} + \\ + \left(A_1 \sigma_{23}^{(n-1)}\right)_{,2} - A_2 A_{13}\sigma_{11}^{(n-1)} - A_1 A_{23}\sigma_{22}^{(n-1)}\}_\xi, \quad (70) \\ n = 1, 2, \ldots$$

причем

$$\Delta S_3^{(n)} = S_{3+}^{(n)} - S_{3-}^{(n)} = -\Delta p \delta_{i3}\delta_{n3}, \ \Delta p = p_+ - p_-. \quad (71)$$

Из определяющих соотношений системы (46) выразим деформации и $\varepsilon_{K3}^{(n)}$ и $\varepsilon_{33}^{(n)}$ подставим эти выражения в кинематические соотношения системы (47)

$$u_{3/3}^{(n+1)} = C_{3333}^{-1}\sigma_{33}^{(n)} - Z_{3KL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + Z_{3kl}\varepsilon_{kl}^{T(n)}, \quad (72)$$

$$u_{\alpha/3}^{(n+1)} = C_{\alpha 3I3}^{-1}\sigma_{I3}^{(n)} - O_\alpha u_{3,\alpha}^{(n)} + A_{\alpha 3} O_\alpha u_\alpha^{(n)}. \quad (73)$$

Проинтегрируем обе части этих соотношений и используем условие нормировки: $< u_i^{(n+1)} >= 0$, тогда получим

$$u_3^{(n+1)} =< C_{3333}^{-1}\sigma_{33}^{(n)} >_\xi - < Z_{3KL}\varepsilon_{KL}^{(n)} >_\xi + < Z_{3kl}\varepsilon_{kl}^{T(n)} >_\xi, \quad (74)$$

$$u_\alpha^{(n+1)} = 2 < C_{\alpha 3I3}^{-1}\sigma_{I3}^{(n)} >_\xi - O_\alpha < u_{3,\alpha}^{(n)} >_\xi + A_{\alpha 3} O_a < u_\alpha^{(n)} >_\xi, \quad (75) \\ n = 1, 2, \ldots$$

Выражение решения первого приближения через нулевое приближение. Выразим *деформации* $\varepsilon_{KL}^{(1)}$ *первого приближения* через деформации и перемещения нулевого приближения. Для этого запишем выражения для $\varepsilon_{KL}^{(n)}$ из системы (47) при $n=1$:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(1)} = O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(1)} + O_1 O_2 A_{\alpha,\beta} u_\beta^{(1)} + u_3^{(1)} A_{\alpha 3} O_\alpha , \tag{76}$$

$$2\varepsilon_{12}^{(1)} = A_1 O_2 (u_1^{(1)} O_1)_{,2} + A_2 O_1 (u_2^{(1)} O_2)_{,1} \tag{77}$$

Подставим в эти формулы выражения (65) для $u_\alpha^{(1)}$ и $u_3^{(1)}$, тогда получим

$$\varepsilon_{IJ}^{(1)} = \xi \eta_{IJ} + \Phi_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + \Phi_{IJ}^{T(1)} , \tag{78}$$

где обозначены деформации искривлений срединной поверхности оболочки

$$\begin{aligned} -\eta_{\alpha\alpha} &= O_\alpha (O_\alpha (u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}))_{,\alpha} + O_1 O_2 O_\beta A_{\alpha,\beta} (u_{3,\beta}^{(0)} - A_{\beta 3} u_\beta^{(0)}), \\ -2\eta_{12} &= A_1 O_2 (O_1^2 (u_{3,1}^{(0)} - A_{13} u_1^{(0)}))_{,2} + A_2 O_1 (O_2^2 (u_{3,2}^{(0)} - A_{23} u_2^{(0)}))_{,1}, \end{aligned} \tag{79}$$

а также введены обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\alpha KL} &= A_{\alpha 3} O_\alpha U_{3KL}^{(1)} , \ \Phi_{12KL} = 0, \\ \Phi_{\alpha\alpha}^{T(1)} &= U_3^{T(1)} A_{\alpha 3} O_\alpha , \ \Phi_{12}^{T(1)} = 0. \end{aligned} \tag{80}$$

Выразим напряжения первого приближения $\sigma_{i3}^{(1)}$ через деформации нулевого приближения $\varepsilon_{KL}^{(0)}$, используя формулы (69) и (70) при $n=1$ имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{(1)} &= -O\left\{ \left(A_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} \right)_{,\alpha} + \left(A_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \right)_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - A_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(0)} \right\}_\xi , \\ \sigma_{33}^{(1)} &= O\left\{ A_2 A_{13} \sigma_{11}^{(0)} + A_1 A_{23} \sigma_{22}^{(0)} \right\}_\xi . \end{aligned} \tag{81}$$

Здесь учтено, что $\sigma_{i3}^{(0)} = 0$. Подставляя формулы (62) в (81), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{(1)} &= -O\Big(\left\{ C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} \right\}_\xi \left(A_\beta \varepsilon_{KL}^{(0)} \right)_{,\alpha} + \left\{ C_{\alpha\beta KL}^{(0)} \right\}_\xi \left(A_\alpha \varepsilon_{KL}^{(0)} \right)_{,\beta} + \\ &\quad + \left\{ C_{\alpha\beta KL}^{(0)} \right\}_\xi A_{\alpha,\beta} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \left\{ C_{\beta\beta KL}^{(0)} \right\}_\xi A_{\beta,\alpha} \varepsilon_{KL}^{(0)} \Big) + \\ &\quad + O\Big(\left(A_\beta \left\{ C_{\alpha\alpha kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_\xi \right)_{,\alpha} + \left(A_\alpha \left\{ C_{\alpha\beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_\xi \right)_{,\beta} + \\ &\quad + A_{\alpha,\beta} \left\{ C_{\alpha\beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_\xi - A_{\beta,\alpha} \left\{ C_{\beta\beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_\xi \Big), \\ \sigma_{33}^{(1)} &= \left(O_1 A_{13} \left\{ C_{11KL}^{(0)} \right\}_\xi + O_2 A_{23} \left\{ C_{22KL}^{(0)} \right\}_\xi \right) \varepsilon_{KL}^{(0)} - \\ &\quad - \left(O_1 A_{13} \left\{ C_{11kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_\xi + O_2 A_{23} \left\{ C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_\xi \right). \end{aligned} \tag{82}$$

Введем обозначения

$$C^{(1)}_{\alpha 3KL}=O\Big(\big\{C^{(0)}_{\alpha\alpha KL}-C^{(0)}_{\beta\beta KL}\big\}_{\xi}A_{\beta,\alpha}+2\big\{C^{(0)}_{\alpha\beta KL}\big\}_{\xi}A_{\alpha,\beta}\Big),$$
$$R^{(1)}_{\alpha KLJ}=O\Big(\big\{C^{(0)}_{\alpha\alpha KL}\big\}_{\xi}A_{\beta}\delta_{\alpha J}+\big\{C^{(0)}_{\alpha\beta KL}\big\}_{\xi}A_{\alpha}\delta_{\beta J}\Big), \tag{83}$$
$$C^{(1)}_{33KL}=O_1A_{13}\big\{C^{(0)}_{11KL}\big\}_{\xi}+O_2A_{23}\big\{C^{(0)}_{22KL}\big\}_{\xi},$$

а также обозначим тепловые напряжения первого приближения

$$\sigma^{T(1)}_{\alpha 3}=-O\Big(\Big(A_{\beta}\big\{C^{(0)}_{\alpha\alpha kl}\varepsilon^{T(0)}_{kl}\big\}_{\xi}\Big)_{,\alpha}+\Big(A_{\alpha}\big\{C^{(0)}_{\alpha\beta kl}\varepsilon^{T(0)}_{kl}\big\}_{\xi}\Big)_{,\beta}+$$
$$+A_{\alpha,\beta}\big\{C^{(0)}_{\alpha\beta kl}\varepsilon^{T(0)}_{kl}\big\}_{\xi}-A_{\beta,\alpha}\big\{C^{(0)}_{\beta\beta kl}\varepsilon^{T(0)}_{kl}\big\}_{\xi}\Big), \tag{84}$$
$$\sigma^{T(1)}_{33}=\Big(O_1A_{13}\big\{C^{(0)}_{11kl}\varepsilon^{T(0)}_{kl}\big\}_{\xi}+O_2A_{23}\big\{C^{(0)}_{22kl}\varepsilon^{T(0)}_{kl}\big\}_{\xi}\Big).$$

Тогда формулы (82) можно записать так

$$\sigma^{(1)}_{\alpha 3}=-C^{(1)}_{\alpha 3KL}\varepsilon^{(0)}_{KL}-R^{(1)}_{\alpha KLJ}\varepsilon^{(0)}_{KL,J}-\sigma^{T(1)}_{\alpha 3},$$
$$\sigma^{(1)}_{33}=C^{(1)}_{33KL}\varepsilon^{(0)}_{KL}-\sigma^{T(1)}_{33}. \tag{85}$$

Выразим напряжения $\sigma^{(1)}_{IJ}$ первого приближения через деформации $\varepsilon^{(0)}_{KL}$ нулевого приближения. Для этого запишем определяющие соотношения из системы (46) при $n=1$:

$$\sigma^{(1)}_{IJ}=C_{IJKL}\varepsilon^{(1)}_{KL}+C_{IJKL}\varepsilon^{(1)}_{33}-C_{IJkl}\varepsilon^{T(1)}_{kl}. \tag{86}$$

Подставим в это выражение для деформаций $\varepsilon^{(1)}_{33}$ из формул (46) для $n=1$. Тогда с учетом обозначений (63) и формул (85), получаем

$$\sigma^{(1)}_{IJ}=C^{(0)}_{IJKL}\varepsilon^{(1)}_{KL}+G^{(1)}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL}-\tilde{\sigma}^{T(1)}_{IJ}, \tag{87}$$

где обозначено

$$G^{(1)}_{IJKL}=Z_{3IJ}C^{(1)}_{33KL},\ \ \tilde{\sigma}^{T(1)}_{IJ}=C^{(0)}_{IJkl}\varepsilon^{T(1)}_{kl}+Z_{3IJ}\sigma^{T(1)}_{33}. \tag{88}$$

Подставим теперь соотношение (83) в (87), тогда получим итоговое выражение для напряжений $\sigma^{(1)}_{IJ}$ первого приближения через деформации $\varepsilon^{(0)}_{KL}$ нулевого приближения:

$$\sigma^{(1)}_{IJ}=C^{(0)}_{IJKL}\xi\eta_{KL}+C^{(1)}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL}-\sigma^{T(1)}_{IJ}, \tag{89}$$

где введены обозначения

$$C^{(1)}_{IJKL}=C^{(0)}_{IJMN}\Phi_{MNKL}+G^{(1)}_{IJKL},\ \ \sigma^{T(1)}_{IJ}=\tilde{\sigma}^{T(1)}_{IJ}-C^{(0)}_{IJKL}\Phi^{T(1)}_{KL}. \tag{90}$$

Найдем перемещения второго приближения $u_i^{(2)}$. Для этого запишем формулы (74), (75) при $n=1$:

$$u_3^{(2)} = < C_{3333}^{-1}\sigma_{33}^{(1)} >_\xi - < Z_{3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)} >_\xi + < Z_{3kl}\varepsilon_{kl}^{T(1)} >_\xi,$$
$$u_\alpha^{(2)} = < C_{\alpha 3K3}^{-1}\sigma_{K3}^{(1)} >_\xi + A_{\alpha 3}O_a < u_\alpha^{(1)} >_\xi - O_a < u_{3,\alpha}^{(1)} >_\xi . \tag{91}$$

Подставим в эти выражения формулы (85), (78) и (59), тогда получим

$$u_3^{(2)} = -J_{3KL}\eta_{KL} + U_{3KL}^{(2)}\varepsilon_{KL}^{(0)} + U_3^{T(2)},$$
$$u_\alpha^{(2)} = -< \xi >_\xi A_{\alpha 3}O_\alpha^2(u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3}u_\alpha^{(0)}) - \tag{92}$$
$$-U_{\alpha KL}^{(2)}\varepsilon_{KL}^{(0)} - K_{\alpha KLJ}\varepsilon_{KL,J}^{(0)} + U_\alpha^{T(2)},$$

где введены обозначения:

$$J_{3KL} = < Z_{3KL}\xi >_\xi,$$
$$U_{3KL}^{(2)} = < C_{3333}^{-1}C_{33KL}^{(1)} >_\xi - < Z_{3IJ}\Phi_{IJKL} >_\xi,\ U_{\alpha KL}^{(2)} = < C_{\alpha 3I3}^{-1}C_{I3KL}^{(1)} >_\xi,$$
$$K_{\alpha KLJ} = < C_{\alpha 3I3}^{-1}R_{IKLJ}^{(1)} >_\xi + O_\alpha < U_{3KL}^{(1)} >_\xi \delta_{\alpha J}, \tag{93}$$
$$U_3^{T(2)} = -< C_{3333}^{-1}\sigma_{33}^{T(1)} >_\xi - < Z_{3KL}\Phi_{IJ}^{T(1)} >_\xi + < Z_{3kl}\varepsilon_{kl}^{T(1)} >_\xi,$$
$$U_\alpha^{T(2)} = -< C_{\alpha 3K3}^{-1}\sigma_{K3}^{T(1)} >_\xi - O_a < U_{3,\alpha}^{T(1)} >_\xi .$$

Выражение решения второго приближения через нулевое приближение. Выразим напряжения второго приближения $\sigma_{\alpha 3}^{(2)}$ и $\sigma_{33}^{(2)}$ через деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ и искривления η_{IJ} нулевого приближения. Для этого запишем формулы (69) и (70) при $n=2$:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(2)} = -O\Big\{\Big(A_\beta\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}\Big)_{,\alpha} + \Big(A_\alpha\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}\Big)_{,\beta} + A_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} -$$
$$-A_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(1)} + A_\beta A_{\alpha 3}\sigma_{\alpha 3}^{(1)}\Big\}_\xi, \tag{94}$$
$$\sigma_{33}^{(2)} = -O\Big\{\Big(A_2\sigma_{13}^{(1)}\Big)_{,1} + \Big(A_1\sigma_{23}^{(1)}\Big)_{,2} - A_2A_{13}\sigma_{11}^{(1)} - A_1A_{23}\sigma_{22}^{(1)}\Big\}_\xi.$$

Подставим выражения (85) и (89) для напряжений первого приближения $\sigma_{IJ}^{(1)}$ и $\sigma_{\alpha 3}^{(1)}$, $\sigma_{33}^{(1)}$ в формулы (94), и приведем подобные в получившихся выражениях, тогда получим

$$\sigma_{\alpha 3}^{(2)} = -C_{\alpha 3KL}^{(2)}\varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{\alpha 3KLJ}^{(2)}\varepsilon_{KL,J}^{(0)} - N_{\alpha 3KL}\eta_{KL} - V_{\alpha 3KLJ}\eta_{KL,J} - \sigma_{\alpha 3}^{T(2)},$$
$$\sigma_{33}^{(2)} = C_{33KL}^{(2)}\varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{33KLJ}^{(2)}\varepsilon_{KL,J}^{(0)} + E_{33KLJM}^{(2)}\varepsilon_{KL,JM}^{(0)} + N_{33KL}^{(2)}\eta_{KL} - \sigma_{33}^{T(2)}. \tag{95}$$

Здесь введены обозначения

$$C^{(2)}_{\alpha 3KL} = O\Big(\big\{C^{(1)}_{\alpha\alpha KL} - C^{(1)}_{\beta\beta KL}\big\}_\xi A_{\beta,\alpha} + 2\big\{C^{(1)}_{\alpha\beta KL}\big\}_\xi A_{\alpha,\beta} -$$
$$-\big\{C^{(1)}_{\alpha 3KL}\big\}_\xi A_\beta A_{\alpha 3}\Big),$$
$$R^{(2)}_{\alpha 3KLJ} = O\Big(\big\{C^{(1)}_{\alpha\alpha KL}\big\}_\xi A_\beta \delta_{\alpha J} + \big\{C^{(1)}_{\alpha\beta KL}\big\}_\xi A_\alpha \delta_{\beta J} -$$
$$-\big\{R^{(1)}_{\alpha KLJ}\big\}_\xi A_\beta A_{\alpha 3}\Big),$$
$$N_{\alpha 3KL} = O\Big(\big\{(C^{(0)}_{\alpha\alpha KL} - C^{(0)}_{\beta\beta KL})\xi\big\}_\xi A_{\beta,\alpha} + 2\big\{C^{(0)}_{\alpha\beta KL}\xi\big\}_\xi A_{\alpha,\beta}\Big),$$
$$V_{\alpha 3KLJ} = O\Big(\big\{C^{(0)}_{\alpha\alpha KL}\xi\big\}_\xi A_\beta \delta_{\alpha J} + \big\{C^{(0)}_{\alpha\beta KL}\xi\big\}_\xi A_\alpha \delta_{\beta J}\Big),$$
$$C^{(2)}_{33KL} = O\Big(\big\{C^{(1)}_{13KL}\big\}_\xi A_{2,1} + \big\{C^{(1)}_{23KL}\big\}_\xi A_{1,2} + \tag{96}$$
$$+\big\{C^{(1)}_{11KL}\big\}_\xi A_2 A_{13} + \big\{C^{(1)}_{22KL}\big\}_\xi A_1 A_{23}\Big),$$
$$R^{(2)}_{33KLJ} = O\Big(\big\{C^{(1)}_{13KL}\big\}_\xi A_2 \delta_{1J} + \big\{C^{(1)}_{23KL}\big\}_\xi A_1 \delta_{2J} +$$
$$+\big\{R^{(1)}_{1KLJ}\big\}_\xi A_{21} + \big\{R^{(1)}_{2KLJ}\big\}_\xi A_{12}\Big),$$
$$E^{(2)}_{33KLJM} = O\Big(\big\{R^{(1)}_{1KLJ}\big\}_\xi A_2 \delta_{1M} + \big\{R^{(1)}_{2KLJ}\big\}_\xi A_1 \delta_{2M}\Big),$$
$$N^{(2)}_{33KL} = O\Big(\big\{C^{(0)}_{11KL}\xi\big\}_\xi A_2 A_{13} + \big\{C^{(0)}_{22KL}\xi\big\}_\xi A_1 A_{23}\Big),$$

а также обозначения для тепловых напряжений 2-го приближения

$$\sigma^{T(2)}_{\alpha 3} = -O\Big\{\big(A_\beta \sigma^{T(1)}_{\alpha\alpha}\big)_{,\alpha} + (A_\alpha \sigma^{T(1)}_{\alpha\beta})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta}\sigma^{T(1)}_{\alpha\beta} -$$
$$-A_{\beta,\alpha}\sigma^{T(1)}_{\beta\beta} + A_\beta A_{\alpha 3}\sigma^{T(1)}_{\alpha 3}\Big\}_\xi, \tag{97}$$
$$\sigma^{T(2)}_{33} = -O\Big\{\Big(A_2\sigma^{T(1)}_{13}\Big)_{,1} + \Big(A_1\sigma^{T(1)}_{23}\Big)_{,2} - A_2 A_{13}\sigma^{T(1)}_{11} - A_1 A_{23}\sigma^{T(1)}_{22}\Big\}_\xi.$$

Выразим из системы (91) при $n = 2$: деформации $\varepsilon^{(2)}_{KL}$ второго приближения через деформации и перемещения нулевого приближения

$$\varepsilon^{(2)}_{\alpha\alpha} = O_\alpha u^{(2)}_{\alpha,\alpha} + A_{\alpha,\beta} O_1 O_2 u^{(2)}_\beta + A_{\alpha 3} O_\alpha u^{(2)}_3,$$
$$2\varepsilon^{(2)}_{12} = A_1 O_2 (u^{(2)}_1 O_1)_{,2} + A_2 O_1 (u^{(2)}_2 O_2)_{,1}. \tag{98}$$

Подставим сюда выражения (92) для $u^{(2)}_\alpha$ и $u^{(2)}_3$ и приведем подобные, тогда получим

$$\varepsilon^{(2)}_{SP} = <\xi>_\xi \eta^{(2)}_{SP} - L^{(2)}_{SPKL}\eta_{KL} - \Phi^{(2)}_{SPKL}\varepsilon^{(0)}_{KL} - B^{(2)}_{SPKLJ}\varepsilon^{(0)}_{KL,J} -$$
$$-K^{(2)}_{SPKLJM}\varepsilon^{(0)}_{KL,JM} + \varPhi^{T(2)}_{SP}, \tag{99}$$

где обозначены кривизны второго приближения оболочки:

$$
\begin{gathered}
-\eta^{(2)}_{\alpha\alpha} = O_\alpha \left(A_{\alpha 3} O_\alpha^2 (u^{(0)}_{3,\alpha} - A_{\alpha 3} u^{(0)}_\alpha) \right)_{,\alpha} + \\
+ O_1 O_2 A_{\alpha,\beta} A_{\beta 3} O_\beta^2 (u^{(0)}_{3,\beta} - A_{\beta 3} u^{(0)}_\beta), \\
-2\eta^{(2)}_{12} = A_1 O_2 \left(A_{13} O_1^3 (u^{(0)}_{3,1} - A_{13} u^{(0)}_1) \right)_{,2} + \\
+ A_2 O_1 \left(A_{23} O_2^3 (u^{(0)}_{3,2} - A_{23} u^{(0)}_2) \right)_{,1},
\end{gathered}
\tag{100}
$$

а также введены обозначения:

$$
\begin{gathered}
L^{(2)}_{\alpha\alpha KL} = A_{\alpha 3} O_\alpha J_{3KL}, \ L^{(2)}_{12KL} = 0, \\
\Phi^{(2)}_{\alpha\alpha KL} = O_\alpha U^{(2)}_{\alpha KL,\alpha} + O_1 O_2 A_{\alpha,\beta} U^{(2)}_{\beta KL} - A_{\alpha 3} O_\alpha U^{(2)}_{3KL}, \\
B^{(2)}_{\alpha\alpha KLJ} = O_\alpha U^{(2)}_{\alpha KL} \delta_{\alpha J} + O_\alpha K_{\alpha KLJ,\alpha} + O_1 O_2 A_{\alpha,\beta} K_{\beta KLJ}, \\
K^{(2)}_{\alpha\alpha KLJM} = O_\alpha K_{\alpha KLJ} \delta_{\alpha M}, \\
2\Phi^{(2)}_{12KL} = A_1 O_2 (U^{(2)}_{1KL} O_1)_{,2} + A_2 O_1 (U^{(2)}_{2KL} O_2)_{,1}, \\
2B^{(2)}_{12KLJ} = O_2 U^{(2)}_{1KL} \delta_{2J} + A_1 O_2 O_{12} K_{1KLJ} + O_2 K_{1KLJ,2} + \\
+ O_1 U^{(2)}_{2KL} \delta_{1J} + A_2 O_1 O_{21} K_{2KLJ} + O_1 K_{2KLJ,1}, \\
2K^{(2)}_{12KLJM} = O_2 K_{1KLJ} \delta_{2M} + O_1 K_{2KLJ} \delta_{1M}, \\
\varPhi^{T(2)}_{\alpha\alpha} = O_\alpha U^{T(2)}_{\alpha,\alpha} + A_{\alpha,\beta} O_1 O_2 U^{T(2)}_\beta + A_{\alpha 3} O_\alpha U^{T(2)}_3, \\
2\varPhi^{T(2)}_{12} = A_1 O_2 (U^{(2)}_1 O_1)_{,2} + A_2 O_1 (U^{(2)}_2 O_2)_{,1}.
\end{gathered}
\tag{101}
$$

Выразим напряжения $\sigma^{(2)}_{IJ}$ второго приближения через деформации $\varepsilon^{(0)}_{KL}$ нулевого приближения. Из определяющих соотношений системы (46) при $n = 2$ получим

$$2\varepsilon^{(2)}_{K3} = C^{-1}_{I3K3} \sigma^{(2)}_{I3}, \tag{102}$$

$$\varepsilon^{(2)}_{33} = C^{-1}_{3333} \sigma^{(2)}_{33} - Z_{3KL} \varepsilon^{(2)}_{KL} + Z_{3kl} \varepsilon^{T(2)}_{kl}, \tag{103}$$

$$\sigma^{(2)}_{IJ} = C_{IJKL} \varepsilon^{(2)}_{KL} + C_{IJ33} \varepsilon^{(2)}_{33} - C_{IJkl} \varepsilon^{T(2)}_{kl}. \tag{104}$$

Подставляя (103) в (104), получаем:

$$\sigma^{(2)}_{IJ} = C^{(0)}_{IJKL} \varepsilon^{(2)}_{KL} + Z_{3IJ} \sigma^{(2)}_{33} - C^{(0)}_{IJkl} \varepsilon^{T(2)}_{kl}. \tag{105}$$

С учетом формул (99) для $\varepsilon^{(2)}_{SP}$ и (95) для $\sigma^{(2)}_{33}$ формула (105) может быть записана следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\sigma^{(2)}_{IJ} = C^{(0)}_{IJKL} < \xi >_\xi \eta^{(2)}_{KL} - C^{(2)}_{IJKL} \varepsilon^{(0)}_{KL} - \\
- R^{(2)}_{IJKLM} \varepsilon^{(0)}_{KL,M} - E_{IJKLMN} \varepsilon^{(0)}_{KL,MN} - N_{IJKL} \eta_{KL} - \sigma^{T(2)}_{IJ},
\end{gathered}
\tag{106}
$$

где введены обозначения:

$$\begin{gathered}
C_{IJKL}^{(2)}=C_{IJSP}^{(0)}\Phi_{SPKL}^{(2)}-Z_{3IJ}C_{33KL}^{(2)}, \\
R_{IJKLM}^{(2)}=C_{IJSP}^{(0)}B_{SPKLM}^{(2)}-Z_{3IJ}R_{33KLM}^{(2)}, \\
E_{IJKLMN}=C_{IJSP}^{(0)}K_{SPKLMN}^{(2)}-Z_{3IJ}E_{33KLMN}^{(2)}, \\
N_{IJKL}=C_{IJSP}^{(0)}L_{SPKL}^{(2)}-Z_{3IJ}N_{33KL}^{(2)}, \\
\sigma_{IJ}^{T(2)}=-C_{IJKL}^{(0)}\varPhi_{KL}^{T(2)}+Z_{3IJ}\sigma_{33}^{T(2)}+C_{IJkl}^{(0)}\varepsilon_{kl}^{T(2)}.
\end{gathered} \tag{107}$$

Выражение решения третьего приближения через нулевое приближение. Выразим напряжение третьего приближения $\sigma_{33}^{(3)}$ через деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ и искривления η_{IJ} нулевого приближения.

Из выражения (70) при $n=3$ получим:

$$\begin{gathered}
\sigma_{33}^{(3)}=-\Delta p\left(\xi+0,5\right)-p_{-}- \\
-O\left\{\left(A_2\sigma_{13}^{(2)}\right)_{,1}+\left(A_1\sigma_{23}^{(2)}\right)_{,2}-A_2A_{13}\sigma_{11}^{(2)}-A_1A_{23}\sigma_{22}^{(2)}\right\}_{\xi}.
\end{gathered} \tag{108}$$

Подставляя в (108) выражения (106) для $\sigma_{IJ}^{(2)}$ и выражения (95) для $\sigma_{\alpha 3}^{(2)}$, получим:

$$\begin{gathered}
\sigma_{33}^{(3)}=-\left(\Delta p\left(\xi+0,5\right)+p_{-}\right)+C_{33KL}^{(3)}\varepsilon_{KL}^{(0)}+R_{33KLJ}^{(3)}\varepsilon_{KL,J}^{(0)}+ \\
+E_{33KLJM}^{(3)}\varepsilon_{KL,JM}^{(0)}+N_{33KL}^{(3)}\eta_{KL}+V_{33KLM}^{(3)}\eta_{KL,M}+ \\
+U_{33KLMN}^{(3)}\eta_{KL,MN}+W_{KL}^{(3)}\eta_{KL}^{(2)}-\sigma_{33}^{T(3)},
\end{gathered} \tag{109}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered}
C_{33KL}^{(3)}=O\Big(A_{2,1}\left\{C_{13KL}^{(2)}\right\}_{\xi}+A_2\left\{C_{13KL,1}^{(2)}\right\}_{\xi}+ \\
+A_{1,2}\left\{C_{23KL}^{(2)}\right\}_{\xi}+A_1\left\{C_{23KL,2}^{(2)}\right\}_{\xi}-A_2A_{13}\left\{C_{11KL}^{(2)}\right\}_{\xi}-A_1A_{23}\left\{C_{22KL}^{(2)}\right\}_{\xi}\Big), \\
R_{33KLJ}^{(3)}=O\Big(A_{2,1}\left\{R_{13KLJ}^{(2)}\right\}_{\xi}+A_2\left\{C_{13KL}^{(2)}\right\}_{\xi}\delta_{1J}+A_2\left\{R_{13KLJ,1}^{(2)}\right\}_{\xi}+ \\
+A_{12}\left\{R_{23KLJ}^{(2)}\right\}_{\xi}+A_1\left\{C_{23KL}^{(2)}\right\}_{\xi}\delta_{2J}+A_1\left\{R_{23KLJ,2}^{(2)}\right\}_{\xi}- \\
-A_2A_{13}\left\{R_{11KLJ}^{(2)}\right\}_{\xi}-A_1A_{23}\left\{R_{22KLJ}^{(2)}\right\}_{\xi}\Big), \\
E_{33KLJM}^{(3)}=O\Big(A_2\left\{R_{13KLJ}^{(2)}\right\}_{\xi}\delta_{1M}+A_1\left\{R_{23KLJ}^{(2)}\right\}_{\xi}\delta_{2M}- \\
-A_2A_{13}\left\{E_{11KLJM}\right\}_{\xi}-A_1A_{23}\left\{E_{22KLJM}\right\}_{\xi}\Big), \\
N_{33KL}^{(3)}=O\Big(A_{2,1}\left\{N_{13KL}\right\}_{\xi}+A_2\left\{N_{13KL,1}\right\}_{\xi}+A_{1,2}\left\{N_{23KL}\right\}_{\xi}+ \\
+A_1\left\{N_{23KL,2}\right\}_{\xi}-A_2A_{13}\left\{N_{11KL}\right\}_{\xi}-A_1A_{23}\left\{N_{22KL}\right\}_{\xi}\Big)
\end{gathered} \tag{110}$$

$$V_{33KLM}^{(3)} = O\Big(A_{2,1}\big\{V_{13KLM}\big\}_{\xi} + A_2\big\{N_{13KL}\big\}_{\xi}\delta_{1M} +$$
$$+A_2\big\{V_{13KLM,1}\big\}_{\xi} + A_{1,2}\big\{V_{23KLM}\big\}_{\xi} + A_1\big\{N_{23KL}\big\}_{\xi}\delta_{2M} + A_1\big\{V_{23KLM,2}\big\}_{\xi}\Big),$$
$$U_{33KLMN}^{(3)} = O\Big(A_2\big\{V_{13KLM}\big\}_{\xi}\delta_{1N} + A_1\big\{V_{23KLM}\big\}_{\xi}\delta_{2N}\Big),$$
$$W_{KL}^{(3)} = O\Big(A_2A_{13}\big\{C_{11KL}^{(0)} < \xi >_{\xi}\big\}_{\xi} + A_1A_{23}\big\{C_{22KL}^{(0)} < \xi >_{\xi}\big\}_{\xi}\Big),$$
$$\sigma_{33}^{T(3)} = -O\Big\{\Big(A_2\sigma_{13}^{T(2)}\Big)_{,1} + \Big(A_1\sigma_{23}^{T(2)}\Big)_{,2} - A_2A_{13}\sigma_{11}^{T(2)} - A_1A_{23}\sigma_{22}^{T(2)}\Big\}_{\xi}.$$

Выражение для компонент полного тензора напряжений. В работах [12, 13, 17] было установлено, что для достижения приемлемой инженерной точности вычислений напряжений σ_{IJ} в многослойных пластинах достаточно ограничиться только нулевым и первым приближением, для сдвиговых напряжений $\sigma_{\alpha 3}$ — нулевым, первым и вторым приближением, а для компонент σ_{33} — третьим приближением. Применим этот же подход для вычисления компонент полного тензора напряжений с точки зрения сохранения минимально необходимого числа членов в асимптотических разложениях. Тогда для компонент σ_{IJ} получим, сохраняя члены ряда (28) до первого приближения, включительно, получим:

$$\sigma_{IJ} = \sigma_{IJ}^{(0)} + æ\sigma_{IJ}^{(1)}. \tag{111}$$

Выражения для $\sigma_{IJ}^{(0)}$ и $\sigma_{IJ}^{(1)}$ были получены в формулах (62) и (89). Подставим их в выражение для σ_{IJ}, тогда получим искомое выражение для компонент σ_{IJ} тензора напряжений:

$$\sigma_{IJ} = \hat{C}_{IJKL}^{(1)}\varepsilon_{KL}^{(0)} + \hat{C}_{IJKL}^{(0)}\xi\eta_{KL} - \sigma_{IJ}^{T}, \tag{112}$$

где обозначены:

$$\hat{C}_{IJKL}^{(1)} = C_{IJKL}^{(0)} + æC_{IJKL}^{(1)},\ \hat{C}_{IJKL}^{(0)} = æC_{IJKL}^{(0)},$$
$$\sigma_{IJ}^{T} = C_{IJkl}^{(0)}\varepsilon_{kl}^{T(0)} + æ\sigma_{IJ}^{T(1)}. \tag{113}$$

Для сдвиговых компонент $\sigma_{\alpha 3}$ сохраним члены ряда (28) до второго приближения:

$$\sigma_{\alpha 3} = \sigma_{\alpha 3}^{(0)} + æ\sigma_{\alpha 3}^{(1)} + æ^2\sigma_{\alpha 3}^{(2)}. \tag{114}$$

Выражения для $\sigma_{\alpha 3}^{(0)}$, $\sigma_{\alpha 3}^{(1)}$ и $\sigma_{\alpha 3}^{(2)}$ были получены в формулах (56), (85) и (95). Подставим их в выражение (114), тогда получим искомое выражение для компонент $\sigma_{\alpha 3}$ тензора напряжений:

$$-\sigma_{\alpha 3} = \hat{C}^{(2)}_{\alpha 3KL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + \hat{R}^{(2)}_{\alpha 3KLJ}\varepsilon^{(0)}_{KL,J} + \hat{N}_{\alpha 3KL}\eta_{KL} + \hat{V}_{\alpha 3KLJ}\eta_{KL,J} + \sigma^{T}_{\alpha 3}, \quad (115)$$

где введены обозначения:

$$\hat{C}^{(2)}_{\alpha 3KL} = æ C^{(1)}_{\alpha 3KL} + æ^2 C^{(2)}_{\alpha 3KL},\ \hat{R}^{(2)}_{\alpha 3KLJ} = æ R^{(1)}_{\alpha KLJ} + æ^2 R^{(2)}_{\alpha 3KLJ},$$
$$\hat{N}_{\alpha 3KL} = æ^2 N_{\alpha 3KL},\ \hat{V}_{\alpha 3KLJ} = æ^2 V_{\alpha 3KLJ}, \quad (116)$$
$$\sigma^{T}_{\alpha 3} = æ\sigma^{T(1)}_{\alpha 3} + æ^2\sigma^{T(2)}_{\alpha 3}.$$

Для компонент σ_{33} сохраним члены асимптотического ряда до третьего приближения:

$$\sigma_{33} = \sigma^{(0)}_{33} + æ\sigma^{(1)}_{33} + æ^2\sigma^{(2)}_{33} + æ^3\sigma^{(3)}_{33}. \quad (117)$$

Выражения для $\sigma^{(0)}_{33}$, $\sigma^{(1)}_{33}$, $\sigma^{(2)}_{33}$ и $\sigma^{(3)}_{33}$ были получены в формулах (56), (85), (95), (109). Подставим их в выражение (117), тогда получим явное выражение для компонент σ_{33} тензора напряжений:

$$\sigma_{33} = -æ^3\left(\Delta p\left(\xi + 0,5\right) + p_{-}\right) + \hat{C}^{(3)}_{33KL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + \hat{R}^{(3)}_{33KLJ}\varepsilon^{(0)}_{KL,J} +$$
$$+\hat{E}^{(3)}_{33KLJM}\varepsilon^{(0)}_{KL,JM} + \hat{N}^{(3)}_{33KL}\eta_{KL} + \quad (118)$$
$$+\hat{V}^{(3)}_{33KLM}\eta_{KL,M} + \hat{U}^{(3)}_{33KLMN}\eta_{KL,MN} + \hat{W}^{(3)}_{KL}\eta^{(2)}_{KL} - \sigma^{T}_{33},$$

где введены обозначения:

$$\hat{C}^{(3)}_{33KL} = æ C^{(1)}_{33KL} + æ^2 C^{(2)}_{33KL} + æ^3 C^{(3)}_{33KL},$$
$$\hat{R}^{(3)}_{33KLJ} = æ^2 R^{(2)}_{33KLJ} + æ^3 R^{(3)}_{33KLJ},$$
$$\hat{E}^{(3)}_{33KLJM} = æ^2 E^{(2)}_{33KLJM} + æ^3 E^{(3)}_{33KLJM},$$
$$\hat{N}^{(3)}_{33KL} = æ^2 N^{(2)}_{33KL} + æ^3 N^{(3)}_{33KL}, \quad (119)$$
$$\hat{V}^{(3)}_{33KLM} = æ^3 V^{(3)}_{33KLM},$$
$$\hat{U}^{(3)}_{33KLMN} = æ^3 U^{(3)}_{33KLMN},\ \hat{W}^{(3)}_{KL} = æ^3 W^{(3)}_{KL},$$
$$\sigma^{T}_{33} = æ\sigma^{T(1)}_{33} + æ^2\sigma^{T(2)}_{33} + æ^3\sigma^{T(3)}_{33}.$$

В итоге получены выражения для полного тензора напряжений через деформации и кривизны, которые, в свою очередь, выражаются через перемещения нулевого приближения.

Осредненные уравнения равновесия многослойных оболочек. Из результатов построения асимптотического решения уравнений равновесия тонкой оболочки следует, что эти уравнения принимают вид (55). Подставим в эти уравнения выражения (66) и (67) для функций $h^{(0)}_i$, $h^{(1)}_i$, $h^{(2)}_i$, тогда получим

$$\left(A_\beta \sum_{n=0}^{\infty} æ^n < \sigma_{\alpha\alpha}^{(n)} >\right)_{,\alpha} + \left(A_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} æ^n < \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} >\right)_{,\beta} +$$

$$+A_{\alpha,\beta} \sum_{n=0}^{\infty} æ^n < \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} > - A_{\beta,\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} æ^n < \sigma_{\beta\beta}^{(n)} > + \tag{120}$$

$$+A_\beta A_{\alpha 3} \sum_{n=0}^{\infty} æ^n < \sigma_{\alpha 3}^{(n)} > + A_1 A_2 < \rho f_\alpha >= 0,$$

$$\left(A_2 \sum_{n=0}^{\infty} æ^n < \sigma_{13}^{(n)} >\right)_{,1} + \left(A_1 \sum_{n=0}^{\infty} æ^n < \sigma_{23}^{(n)} >\right)_{,2} -$$

$$-A_2 A_{13} \sum_{n=0}^{\infty} æ^n < \sigma_{11}^{(n)} > - A_1 A_{23} \sum_{n=0}^{\infty} æ^n < \sigma_{22}^{(n)} > + \tag{121}$$

$$+A_1 A_2 (< \rho f_3 > - æ^2 \Delta p) = 0.$$

Введем обозначения для усилий T_{IJ}, моментов M_{IJ} и перерезывающих сил Q_I в оболочке:

$$T_{IJ} =< \sigma_{IJ} >= \sum_{n=0}^{\infty} æ^n < \sigma_{IJ}^{(n)} >,$$

$$M_{IJ} = æ < \xi \sigma_{IJ} >= \sum_{n=0}^{\infty} æ^{n+1} < \xi \sigma_{IJ}^{(n)} >, \tag{122}$$

$$Q_I =< \sigma_{I3} >= \sum_{n=0}^{\infty} æ^n < \sigma_{I3}^{(n)} >$$

и осредненных массовых сил, действующих на оболочку

$$F_i =< \rho f_i >, \ i = 1,2,3. \tag{123}$$

Тогда уравнения (120) и (121) можно записать в следующем виде

$$\begin{gathered} \left(A_\beta T_{\alpha\alpha}\right)_{,\alpha} + \left(A_\alpha T_{\alpha\beta}\right)_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} T_{\alpha\beta} - \\ -A_{\beta,\alpha} T_{\beta\beta} + A_\beta A_{\alpha 3} Q_\alpha + A_1 A_2 F_\alpha = 0, \\ \left(A_2 Q_1\right)_{,1} + \left(A_1 Q_2\right)_{,2} - A_2 A_{13} T_{11} - \\ -A_1 A_{23} T_{22} + A_1 A_2 (F_3 - \Delta\bar{p}) = 0, \end{gathered} \tag{124}$$

где обозначено $\Delta\bar{p} = æ^2 \Delta p$.

Для вывода уравнения моментов оболочки рассмотрим исходные уравнения равновесия (13) при $\alpha = 1,2$. Домножим эти уравнения на $\xi æ$, проинтегрируем по толщине, применим граничные условия $(\sigma_{\alpha 3})_{\pm 0,5} = 0$, тогда получим следующие уравнения

$$-A_1A_2Q_\alpha + æ\left(A_\beta < \xi\sigma_{\alpha\alpha} >\right)_{,\alpha} + æ\left(A_\alpha < \xi\sigma_{\alpha\beta} >\right)_{,\beta} +$$
$$+æA_{\alpha,\beta} < \xi\sigma_{\alpha\beta} > -æA_{\beta,\alpha} < \xi\sigma_{\beta\beta} > +æA_1A_2 < \xi\rho f_\alpha >= 0. \quad (125)$$

Используя определение (122) моментов, получаем окончательно уравнение моментов оболочки

$$(A_\beta M_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + (A_\alpha M_{\alpha\beta})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta}M_{\alpha\beta} - A_{\beta,\alpha}M_{\beta\beta} -$$
$$-A_1A_2(Q_\alpha - m_\alpha) = 0. \quad (126)$$

Здесь обозначены моменты внешних массовых сил

$$m_\alpha =< \xi\rho f_\alpha >. \quad (127)$$

Эти уравнения (124) и (126) формально совпадают с классическими осредненными уравнениями теории оболочек Кирхгофа–Лява [1] и Тимошенко [3], однако они выведены с помощью асимптотической теории.

Осредненные определяющие соотношения теории оболочек. Подставляя выражения (112) для напряжений σ_{IJ} в формулы (122), получим следующие выражения для усилий и моментов

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + B_{IJKL}\eta_{KL} - T^T_{IJ},$$
$$M_{IJ} = \bar{B}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + D_{IJKL}\eta_{KL} - M^T_{IJ}, \quad (128)$$

где обозначены средние функции — тензоры мембранных жесткостей, изгибных жесткостей и смешанных жесткостей оболочки

$$\bar{C}_{IJKL} =< C^{(0)}_{IJKL} > +æ < C^{(1)}_{IJKL} >,\ B_{IJKL} = æ < \xi C^{(0)}_{IJKL} >,$$
$$\bar{B}_{IJKL} = æ < \xi C^{(0)}_{IJKL} > +æ^2 < \xi C^{(1)}_{IJKL} >,\ D_{IJKL} = æ^2 < \xi^2 C^{(0)}_{IJKL} >, \quad (129)$$

а также тепловые усилия и моменты в оболочке

$$T^T_{IJ} =< \sigma^T_{IJ} >,\ M^T_{IJ} = æ < \xi\sigma^T_{IJ} >. \quad (130)$$

Осредненная система уравнений термоупругости для многослойных оболочек. Соберем вместе кинематические соотношения, описывающие деформации срединной поверхности оболочки (шестая и седьмая группы соотношений в (47) при $n = 0$):

$$\varepsilon^{(0)}_{\alpha\alpha} = O_\alpha u^{(0)}_{\alpha,\alpha} + A_{\alpha,\beta}O_1O_2u^{(0)}_\beta + A_{\alpha 3}O_\alpha u^{(0)}_3,$$
$$2\varepsilon^{(0)}_{12} = O_2u^{(0)}_{1,2} + O_1u^{(0)}_{2,1} - O_1O_2(A_{1,2}u^{(0)}_1 + A_{2,1}u^{(0)}_2), \quad (131)$$

и соотношения (79) для деформаций искривления η_{IJ} срединной поверхности оболочки

$$-\eta_{\alpha\alpha} = O_\alpha (O_\alpha (u^{(0)}_{3,\alpha} - A_{\alpha 3} u^{(0)}_\alpha))_{,\alpha} + O_1 O_2 O_\beta A_{\alpha,\beta} (u^{(0)}_{3,\beta} - A_{\beta 3} u^{(0)}_\beta),$$
$$-2\eta_{12} = A_1 O_2 (O_1^2 (u^{(0)}_{3,1} - A_{13} u^{(0)}_1))_{,2} + A_2 O_1 (O_2^2 (u^{(0)}_{3,2} - A_{23} u^{(0)}_2))_{,1}. \qquad (132)$$

Тогда, после подстановки (131) и (132) в (128), и далее — в систему (124), (126), получаем итоговую систему 5 уравнений теории оболочек относительно 5 неизвестных функций: $u^{(0)}_I$, $u^{(0)}_3$ и Q_I. Эта система имеет 4-й порядок производных относительно прогиба $u^{(0)}_3$. Уравнения равновесия (124), (126) и кинематические соотношения (131), (132) с точностью до обозначений совпадают с соответствующими уравнениями теории тонких оболочек Кирхгофа–Лява [1]. Определяющие соотношения термоупругости (128) также соответсвуют известным соотношениям теории анизотропных многослойных оболочек. Однако предложенный метод построения этой теории многослойных оболочек является внутренне непротиворечивым, в отличие от классических теорий, в которых вначале делаются допущения о малости поперечных напряжений и линейном характере распределения продольных перемещений по толщине, что приводит к линейному распределению касательных напряжений по толщине, а затем напряжения вычисляются интегрированием уравнений равновесия по толщине, в результате распределения касательных напряжений по толщине оказываются параболического типа.

В разработанной асимптотической теории термоупругости оболочек, никаких допущений о характере распределения перемещений и напряжений не делается. После решения осредненной системы уравнений с соответствующими граничными условиями, все 6 компонент тензора напряжений могут быть вычислены по формулам (112), (115) и (118) без решения дополнительных задач, а только по аналитическим соотношениям.

Для определения температуры $\theta^{(0)}$ необходимо решить задачу теплопроводности (33), (34), (41) в нулевом приближении

$$\frac{\rho c_v}{\mathrm{Fo}_0} \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial t} = -q^{(-1)}_{3/3},$$
$$-q^{(-1)}_3 = \lambda_{33} g^{(-1)}_3, \; g^{(-1)}_3 = \theta^{(0)}_{/3}, \qquad (133)$$
$$\Sigma_S: [q^{(-1)}_3] = 0, \; \left[\theta^{(0)}\right] = 0, \; \Sigma_{3\pm}: q^{(-1)}_3 = \pm q_{e\pm},$$
$$t = 0: \; \theta^{(0)} = \theta_0.$$

Для вычисления температуры $\theta^{(n)}$ в более высоких приближениях (в формулах участвует температура до 3 приближения) необходимо решить задачи теплопроводности (42), (43), (49), (51)

$$\begin{gathered}
\frac{\rho c_v}{\mathrm{Fo}_0}\frac{\partial\theta^{(n)}}{\partial t}+O_1O_2\left(A_2q_{1,1}^{(n-2)}+A_1q_{2,2}^{(n-2)}\right)+q_{3/3}^{(n-1)}=\ 0,\\
-q_I^{(n-2)}=\lambda_{IJ}g_J^{(n-2)},\ -q_3^{(n-1)}=\lambda_{33}g_3^{(n-1)},\\
g_J^{(n-2)}=\theta_{,J}^{(n-2)},\ g_3^{(n-1)}=\theta_{/3}^{(n)},\\
\Sigma_S:\ [q_3^{(n-1)}]=0,\ \left[\theta^{(n)}\right]=0,\\
\Sigma_{3\pm}:\ q_3^{(n-1)}=0,\ <\theta^{(n)}>=0,\\
t=0:\ \ \theta^{(n)}=0.
\end{gathered}\tag{134}$$

Выводы. С использованием метода асимптотических разложений по малому геометрическому параметру из общей трехмерной системы уравнений термоупругости выведены замкнутые уравнения тонких многослойных оболочек общего вида. Построенная теория тонких многослойных анизотропных оболочек не содержит никаких допущений относительно характера распределения напряжений, деформаций или перемещений по толщине оболочки. Как и для построенных ранее асимптотических теорий пластин с помощью метода асимптотических разложений сформулированы и решены локальные задачи теории упругости нулевого, первого, второго и третьего приближений. На основе решений этих задач выведены аналитические выражения для вычисления всех шести компонент напряжений как функций поперечной и продольных координат.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляв А. *Математическая теория упругости*. Москва, ОНТИ, 1935, 674 с.

[2] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. Москва, Наука, 1966, 635 с.

[3] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 271 с.

[4] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1988, № 4, с. 698–704.

[5] Kohn R.V., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, vol. 20, iss. 4, pp. 333–350.

[6] Gruttmann F., Wagner W. Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross–sections. *Computational Mechanics*, 2001, vol. 27, iss. 3, pp. 199–207.

[7] Ghugal Y.M., Shmipi R.P. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2001, vol. 20, no. 3, pp. 255–272.

[8] Tornabene F. Free vibrations of laminated composite doubly–curved shells and panels of revolution via the GDQ method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, vol. 200, iss. 9–12, pp. 931–952.

[9] Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, вып. 2, с. 308–321.

[10] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71–79.

[11] Назаров С.А., Свирс Г.Х., Слуцкий А.С. Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней. *Математический сборник*, 2011, т. 202, № 8, с. 41–80.

[12] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–99.

[13] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.

[14] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с.18–36.

[15] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–56.

[16] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование напряжений в тонких композитных цилиндрических оболочках на основе асимптотической теории. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 3, с. 114–132.

[17] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Расчет полного тензора напряжений в тонких моноклинных композитных оболочках на основе метода асимптотической гомогенизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, № 12 (60), с. 1–25.

[18] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Pichugina A.E. Theory of the multilayer thin anisotropic shells, based on the asymptotic analysis of the general equations for the elasticity theory. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1141, art no. 012097. DOI: 10.1088/1742-6596/1141/1/012097

[19] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale hierarchical modeling of fiber reinforced composites by asymptotic homogenization method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9. iss. 145–148, pp. 7211–7220.

[20] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D. Modeling of thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogenization method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2017, vol. 15, iss. 3, pp. 219–237.

[21] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

[22] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

Статья поступила в редакцию 12.11.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 1. Общая теория оболочек. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 4, с. 84–110.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Пичугина Анна Евгеньевна — ассистент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: a.e.pichugina@gmail.com

Thermal stress modeling in composite shells based on asymptotic theory. Part 1. General shell theory

© Yu.I. Dimitrienko, E.A.Gubareva, A.E. Pichugina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

An asymptotic theory of thermoelasticity of multilayer composite shells is proposed, the derivation of the basic equations of which is based on the asymptotic expansion in terms of a small geometric parameter of three-dimensional thermoelasticity equations. This method was previously developed by the authors for thin composite plates, and in this article it is applied to thin-walled shells of an arbitrary frame. According to the developed method, the original three-dimensional problem of thermoelasticity decomposes into a recurrent successor of one-dimensional local problems of thermoelasticity and an averaged two-dimensional problem of thin shells. For local problems of thermoelasticity, analytical solutions are obtained, which make it possible to close the averaged formulation of the problem of the theory of shells with respect to 5 unknown functions: longitudinal displacements, deflection, and two shear forces. It is shown that the averaged problem for multilayer shells coincides with the classical system of equations for Kirchhoff–Love shells, however, it is more substantiated, since the asymptotic theory does not contain any assumptions regarding the pattern of the distribution of permutations and stresses over thickness. In addition, the asymptotic theory makes it possible to calculate all the stresses in the shell, without solving any additional problems, but only by differentiating the averaged displacements.

Keywords*: asymptotic theory, thermoelasticity equations, multilayer shells, composites, stress tensor, Kirchhoff – Love shells*

REFERENCES

[1] Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematical theory of elasticity]. Moscow, ONTI Publ., 1935, 674 p.

[2] Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York, McGrawHill Publ., 1959, 595 p.

[3] Vasiliev V.V. *Mekhanika konstrukcii iz kompozicionnyh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 271 p.

[4] Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. Generalized model of the mechanics of thin-walled structures made of composite materials. *Mechanics of Composite Materials*, 1989, no. 4, pp. 537–543.

[5] Kohn R.V., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, vol. 20, iss. 4, pp. 333–350.

[6] Gruttmann F., Wagner W. Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross–sections. *Computational Mechanics*, 2001, vol. 27, iss. 3, pp. 199–207.

[7] Ghugal Y.M., Shmipi R.P. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2001, vol. 20, no. 3, pp. 255–272.

[8] Tornabene F. Free vibrations of laminated composite doubly–curved shells and panels of revolution via the GDQ method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, vol. 200, iss. 9–12, pp. 931–952.

[9] Zveryayev Ye.M., Makarov G.I. A general method for constructing Timoshenko-type theories. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 197–207.

[10] Sheshenin S.V. Asymptotic analysis of plates with periodic cross–sections. *Mechanics of Solids*, 2006, vol. 41, iss. 6, pp. 57–63.

[11] Nazarov S.A., Sweers G.H., Slutskij A.S. Homogenization of a thin plate reinforced with periodic families of rigid rods. *Sbornik: Mathematics*, 2011, vol. 202, no. 8, pp. 1127–1168.

[12] Dimitrienko Yu.I. Asymptotic theory of multilayer thin plates. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2012, no. 3, pp. 86–99.

[13] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. The asymptotic theory of thermoelasticity of multilayer composite plates. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2015, vol. 6. iss. 1, pp. 13–51.

[14] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Yurin Y.V. Asymptotic theory of thermocreep for multilayer thin plates. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 18–36.

[15] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Asymptotic theory of constructive-orthotropic plates with two-periodic structures. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–56.

[16] Dimitrienko Y. I. Gubareva E.A., Pichugina A.E. Modeling of the stresses in thin composite cylindrical shells based on the asymptotic theory. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 3, pp. 114–132.

[17] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. Explicit formulas for the calculation of the complete tensor of the stresses in the monoclinic thin composite shells based on the asymptotic homogenization method. *Engineering Journal: Science and Innovation: Electronic Science and Engineering Publication*, 2016, no. 12 (60), pp. 1–25.

[18] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Pichugina A.E. Theory of the multilayer thin anisotropic shells, based on the asymptotic analysis of the general equations for the elasticity theory. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1141, art no. 012097. DOI: 10.1088/1742-6596/1141/1/012097

[19] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale hierarchical modeling of fiber reinforced composites by asymptotic homogenization method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9. iss. 145–148, pp. 7211–7220.

[20] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D. Modeling of thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogenization method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2017, vol. 15, iss. 3, pp. 219–237.
[21] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 367 p.
[22] Dimitrienko Yu. I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Gubareva E.A., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor, Deputy Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Pichugina A.E., Assistant Prof. of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: a.e.pichugina@gmail.com