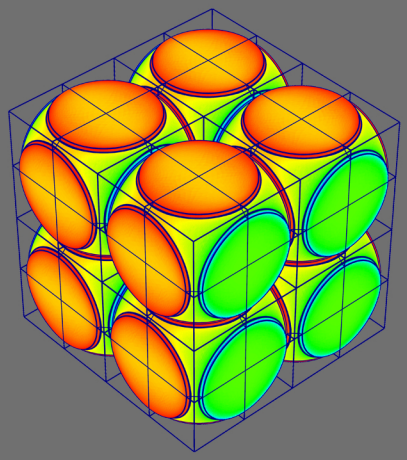
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Савин А.С., Сидняев Н.И., Теделури М. М. Численное исследование амплитудно-частотной характеристики ледяного покрова, возмущаемого погруженным пульсирующим источником. Математическое моделирование и численные методы, 2020, № 4, с. 61–72.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/236/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
13.11.2026 09:13:28

УДК 532.5:551.465 DOI: 10.18698/2309-3684-2020-4-6172

Численное исследование амплитудно–частотной характеристики ледяного покрова, возмущаемого погруженным пульсирующим источником

© А.С. Савин, Н.И. Сидняев, М.М. Теделури

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В связи с реализацией программ освоения обширных арктических пространств, принятых в нескольких странах, внимание многих исследователей привлекают свойства ледяных покровов морей и водоемов суши. При этом можно отметить следующую тенденцию. Если более ранние работы теоретического плана, связанные с математическим моделированием динамики ледяного покрова, были, в основном, посвящены распространению свободных волн, то в последние годы стали явно преобладать работы, имеющие цель изучения процессов генерации волн на ледяном покрове под воздействием различных источников возмущений. К настоящему времени получены аналитические решения ряда задач о генерации волн на ледяном покрове модельными источниками возмущений, которые тождественны некоторым точечным гидродинамическим особенностям, например, точечным источникам или диполям. При этом лед рассматривался как тонкая упругая пластина, плавающая на поверхности воды. Даже в такой идеализированной постановке удалось выявить далеко не очевидные свойства ледяного покрова. Моделирование источников возмущений жидкости точечными гидродинамическими особенностями ранее применялось в классической гидродинамике для расчета возмущений, возникающих на поверхности жидкости. Такой подход показал свою эффективность и в задачах о возмущениях ледяного покрова. К существенному преимуществу метода моделирования источников возмущений жидкости с помощью различных систем точечных гидродинамических особенностей можно отнести отсутствие необходимости постановки граничных условий в области локализации источников возмущений. Непрерывно распределенные источники возмущений могут быть, с той или иной точностью, приближенно представлены в виде суперпозиции точечных гидродинамических особенностей, что дает возможность моделировать многие процессы, протекающие в водной среде, например, обтекание неровностей дна, выброс вещества, смещение участков дна и т.д. Таким образом, модельные источники возмущений, имеющие точечную локализацию, представляют интерес как с точки зрения моделирования более сложных источников, так и с точки зрения получения простейших оценок, имеющих практическое значение. В настоящей работе рассмотрена пространственная задачи о возмущении ледяного покрова точечным источником, локализованным в толще бесконечно глубокой жидкости, и имеющим интенсивность, меняющуюся по гармоническому закону. Проведено численное исследование амплитудно-частотных характеристик ледяного покрова различной толщины при воздействии такого источника. Основное внимание уделено возмущениям ледяного покрова, возникающим непосредственно над источником. Определены частоты колебаний интенсивности источника, на которые ледяной покров откликается в наибольшей степени. Получены зависимости таких частот от толщины ледяного покрова.

Ключевые слова: *жидкость с ледяным покровом, точечный пульсирующий источник, возмущения ледяного покрова*

Введение. Освоение районов и морских акваторий Арктики не может быть успешным без многопланового теоретического обеспечения. Арктические водоемы в течение длительного периода покрыты льдом, это же относится и к морским акваториям. В силу суровых природных условий организация натурных экспериментов по изучению свойств ледяного покрова морей и других водоемов сталкивается со значительными трудностями, поэтому в решении этой проблемы существенно возрастает роль математического моделирования и численного исследования построенных моделей. Одной из практически важных задач является изучение динамики жидкости с ледяным покровом. В настоящей работе на основе сложившихся модельных представлений о свойствах ледяного покрова жидкости численно изучается воздействие на ледяной покров точечного пульсирующего источника, локализованного в толще жидкости. Такие источники являются базовыми элементами более сложных моделей воздействия на ледяной покров глубинных гидрофизических полей. Простота и универсальность рассматриваемой модели обеспечивает возможность получения практически значимых оценок возмущений ледяного покрова, возникающих при воздействиях периодического характера.

Обзор основных теоретических результатов динамики жидкости с ледяным покровом содержится в [1]. Значительное время основное внимание уделялось свободным волнам на ледяном покрове жидкости. К настоящему времени фокус внимания исследователей сместился в сторону изучения генерации волн на льду различными источниками возмущений. Эти исследования основываются на синтезе подходов теории упругости и моделей классической гидродинамики, где разработаны методы решения задач о генерации волн на поверхности жидкости, свободной ото льда, различными источниками возмущений. Большую эффективность в плане получения аналитических решений задач о волнах на поверхности жидкости показали методы моделирования локализованных в толще жидкости источников возмущений точечными гидродинамическими особенностями [2–8]. Такой подход оказался плодотворным и в случае жидкости с ледяным покровом [9–20].

В [9] получены асимптотические выражения потенциала скорости течения, устанавливающегося при длительной работе пульсирующего источника, локализованного в слое жидкости с ледяным покровом, и потенциала скорости течения на большом расстоянии от источника. В [10] изучены возмущения ледяного покрова жидкости, возникающие при импульсном воздействии, и при мгновенном выбросе жидкости точечным источником. Найдены асимптотические представления для волн, образующихся на ледяном покрове под влиянием таких возмущений. Обобщение этих результатов на случай источника

с произвольно меняющейся во времени интенсивностью проведено в [11]. Возмущения, возникающие на ледяном покрове при движении в толще жидкости твердого тела, в качестве которого брался цилиндр, моделируемый точечным диполем, изучались в [12–15]. В работах [17–19] в качестве модельных источников возмущений ледяного покрова использовались точечные источники массы, локализованные в толще жидкости. Заметим, что в перечисленных работах использовались различные модели напряженного ледяного покрова. Новые методы моделирования сред, находящихся в напряженно-деформируемом состоянии [20, 21], могут лечь в основу других подходов к задачам динамики ледяного покрова на основе более полного учета его многообразных физических свойств. Особенно полезны такие подходы будут в задачах о воздействии на лед разрушающих воздействий [22].

В настоящей статье приводятся результаты численного моделирования воздействия на ледяной покров погруженного точечного источника, интенсивность которого меняется по гармоническому закону. Численное исследование амплитудно-частотной характеристики ледяного покрова основано на аналитическом решении пространственной задачи о точечном источнике в толще бесконечно глубокой жидкости, покрытой льдом. Эти решения получены в предположении, что на границе раздела жидкости и льда возникают волны, амплитуда которых много меньше их длины, а течение жидкости потенциально всюду, кроме точки локализации источника. Ледяной покров рассматривался как тонкая упругая пластина постоянной толщины, плавающая на поверхности жидкости. В отличие от работы [9], основное внимание в настоящей статье уделено возмущениям ледяного покрова, возникающим непосредственно над источником, то есть там, где его влияние наиболее существенно.

Постановка и аналитическое решение задачи. Рассмотрим бесконечно глубокую идеальную жидкость, покрытую льдом. Направим ось z вверх и совместим плоскость $z=0$ с невозмущенной поверхностью раздела жидкости и льда. Ледяной покров будем считать тонкой упругой пластиной, плавающей на поверхности жидкости. Пусть в жидкости, в точке $\boldsymbol{r}_0=(0,0,-l)$, находится точечный источник переменной интенсивности $Q=Q(t)$. В предположении потенциальности течения всюду, кроме точки локализации источника, потенциал скорости течения жидкости $\Phi=\Phi(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа во всей области течения Ω, кроме точки $\boldsymbol{r}_0$, где имеет характерную для точечного источника особенность, и отвечает условию затухания волновых возмущений с глубиной:

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}=0,\ \left(\boldsymbol{r}\in\Omega\setminus\boldsymbol{r}_0\right),$$
$$\Phi(\boldsymbol{r},t)\to-\frac{Q(t)}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|},\ \left(\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}_0\right), \tag{1}$$
$$\left|\nabla\Phi(\boldsymbol{r},t)\right|\to 0,\ \left(z\to-\infty\right).$$

Обозначим через $\eta=\eta(x,y,t)$ отклонение границы раздела жидкости и льда от её равновесного положения $z=0$. В случае малости таких отклонений граничные условия ставятся на плоскости $z=0$ и имеют вид [1]

$$\Phi_t+g\eta-C\Delta_\eta+B\Delta_^2\eta+A\eta_{tt}=0,\ \eta_t=\Phi_z, \tag{2}$$

где $\Delta_=\partial_{xx}+\partial_{yy}$ — горизонтальный оператор Лапласа, g — ускорение свободного падения, A, B, C — постоянные коэффициенты, определяемые выражениями

$$A=\frac{\rho_1 h}{\rho_0},\ B=\frac{Eh^3}{12\rho_0\left(1-\nu^2\right)},\ C=\frac{\sigma_{11}h}{\rho_0}, \tag{3}$$

где ρ_0 — плотность воды, ρ_1 — плотность льда, h — толщина льда, E — модуль Юнга льда, ν — коэффициент Пуассона льда, σ_{11} — начальное напряжение льда. В морских условиях для этих величин характерны следующие значения:

$$\rho=1025\ \text{кг}/\text{м}^3,\ \rho_1=0{,}9\rho_0,\ E=3\cdot10^9\ \text{Н}/\text{м}^2,$$
$$\nu=0{,}3,\ \sigma_{11}=10^5\ \text{Н}/\text{м}^2.$$

Введем цилиндрическую систему координат (r,φ,z) так, что ось z пройдет через источник. Тогда, в силу цилиндрической симметрии создаваемого источником поля скорости, ни одна из фигурирующих в задаче величин не зависит от полярного угла φ. Если источник начинает свою работу в некоторый момент времени в изначально невозмущенной среде, то следуя общим подходам [9–11], с помощью преобразования Фурье-Бесселя из решения задачи (1)–(2) можно найти выражение для возникающего на ледяном покрове возмущения

$$\eta(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\exp(-l\lambda)J_0(\lambda r)}{1+A\lambda}\int_{-\infty}^{t}Q(\tau)\cos\left[\omega(t-\tau)\right]d\tau d\lambda, \tag{4}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка,

$$\omega^2 = \lambda(1+A\lambda)^{-1}\left(g + C\lambda^2 + B\lambda^4\right). \tag{5}$$

Пусть в момент времени $t=0$ начинает работу источник, мощность которого в дальнейшем меняется по гармоническому закону

$$Q(t) = Q_0\theta(t)\sin(\omega_0 t), \tag{6}$$

где $\theta(t)=0$ при $t<0$, $\theta(t)=1$ при $t>0$.

Подстановка выражения (6) в формулу (4) позволяет найти возникающее на ледяном покрове выражение в виде

$$\eta(r,t) = \frac{Q_0}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\exp(-l\lambda)J_0(\lambda r)}{1+A\lambda}\int_0^{t}\sin(\omega_0\tau)\cos\left[\omega(t-\tau)\right]d\tau d\lambda. \tag{7}$$

Найдем устанавливающийся по прошествии значительного времени с момента начала работы источника режим возмущений ледяного покрова. Обозначим через $I(t)$ внутренний интеграл в выражении (7). С учетом известных свойств $\delta-$функции и того, что уравнение $\omega(\lambda)-\omega_0=0$ имеет единственный положительный корень λ_0, а выражение $\omega(\lambda)-\omega_0$ не обращается в нуль при $\lambda>0$, получим предельное при $t\to+\infty$ выражение для внутреннего интеграла (7)

$$I(+\infty) = \pi\delta(\lambda-\lambda_0)\left|\frac{d\omega}{d\lambda}\right|^{-1}\sin(\omega_0 t). \tag{8}$$

Из выражений (7), (8) следует, что по прошествии большого времени $(t\to+\infty)$ с момента начала работы источника на ледяном покрове устанавливается возмущение

$$\eta(r,t) = \mu(r)\sin(\omega_0 t),$$
$$\mu(r) = \frac{Q_0\omega_0\lambda_0(1+A\lambda_0)\exp(-l\lambda_0)J_0(r\lambda_0)}{4AB\lambda_0^5 + 5B\lambda_0^4 + 2AC\lambda_0^3 + 3C\lambda_0^2 + g}, \tag{9}$$

где $\lambda_0 = \lambda_0(\omega_0)$ — единственный положительный корень уравнения $\omega(\lambda)-\omega_0=0$.

Численное определение амплитудно–частотных характеристик ледяного покрова. Как видно из формулы (9), точка с координатой $r=0$, лежащая на ледяном покрове непосредственно над

источником, совершает гармонические колебания с амплитудой, зависящей от частоты источника ω_0

$$f(\omega_0) = \mu(0) = \frac{Q_0 \omega_0 \lambda_0 (1 + A\lambda_0) \exp(-l\lambda_0)}{4AB\lambda_0^5 + 5B\lambda_0^4 + 2AC\lambda_0^3 + 3C\lambda_0^2 + g}. \qquad (10)$$

Поскольку воздействие пульсирующего источника на лед в наибольшей степени проявляется непосредственно над ним, представляет интерес исследовать зависимость величины амплитуды отклонения ледяного покрова от его равновесного положения в точке $r = 0$ от частоты источника ω_0. Амплитуда колебаний точки ледяного покрова, лежащей непосредственно над источником, определяемая формулой (10), линейно зависит от амплитуды колебаний интенсивности источника Q_0, поэтому при проведении расчетов величина Q_0 была принята равной $1\ \text{м}^3/\text{с}$, глубина погружения источника была принята равной $l = 10$ м. На рис. 1–3 представлены графики зависимостей величины $f(\omega_0)$ от частоты источника ω_0 при разных толщинах льда, полученные по формулам (5), (10).

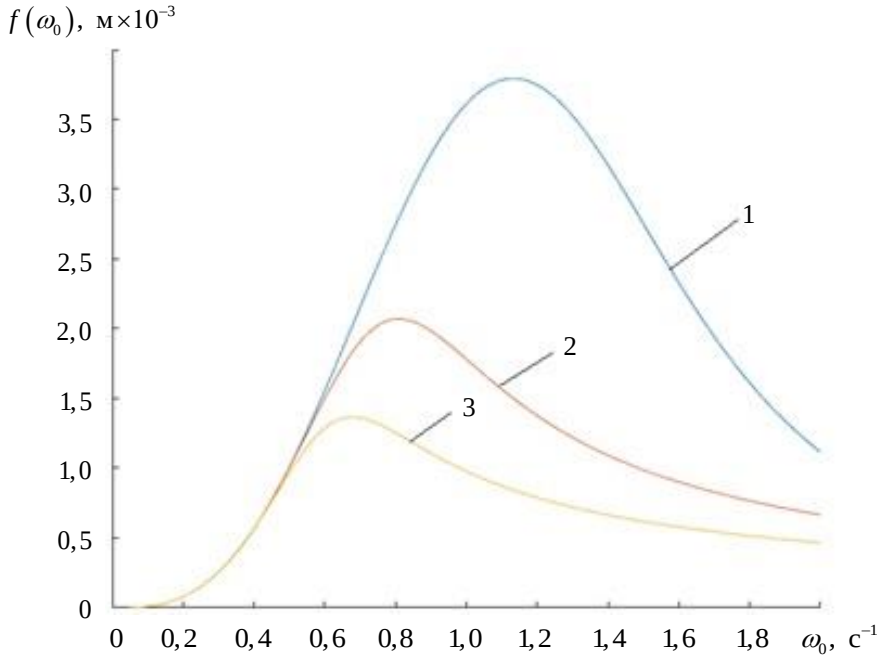


Рис. 1. Зависимость амплитуды $f(\omega_0)$ от частоты источника ω_0 при различных толщинах льда h (тонкий лед):
1 — $h = 0{,}1$ м; 2 — $h = 0{,}5$ м; 3 — $h = 0{,}9$ м

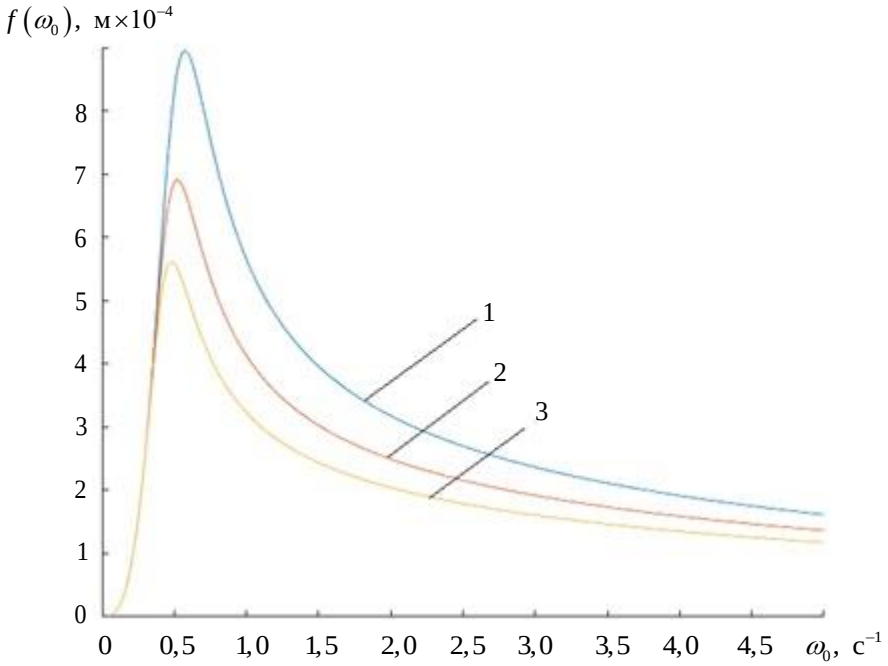


Рис. 2. Зависимость амплитуды $f(\omega_0)$ от частоты источника ω_0 при различных толщинах льда h (средние толщины):
1 — $h = 1{,}5$ м; 2 — $h = 2{,}0$ м; 3 — $h = 2{,}5$ м

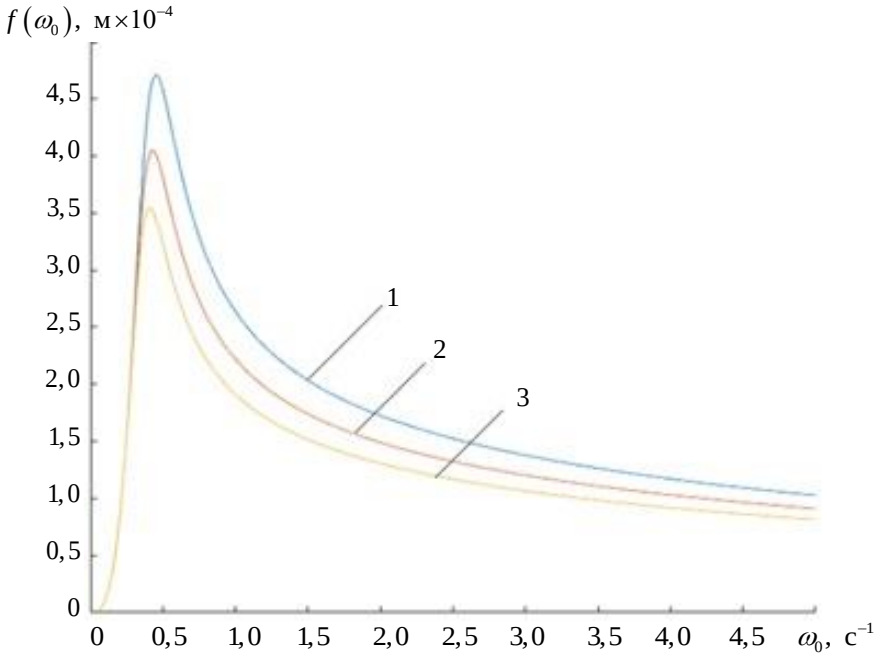


Рис. 3. Зависимость амплитуды $f(\omega_0)$ от частоты источника ω_0 при различных толщинах льда h (толстый лед):
1 — $h = 3{,}0$ м; 2 — $h = 3{,}5$ м; 3 — $h = 4{,}0$ м

Видно, что каждая кривая, из представленных на рис. 1–3, имеет резко выраженный максимум в некоторой точке $\omega_0 = W$, зависящей от толщины льда. Это означает, что ледяной покров обладает высокой избирательностью по отношению к частотам возмущающего его источника. Частоты, оказывающие наиболее существенное влияние на ледяной покров, группируются в весьма узких окрестностях точек W для каждой из приведенных кривых. На рис. 4 представлена зависимость величины W от толщины ледяного покрова h.

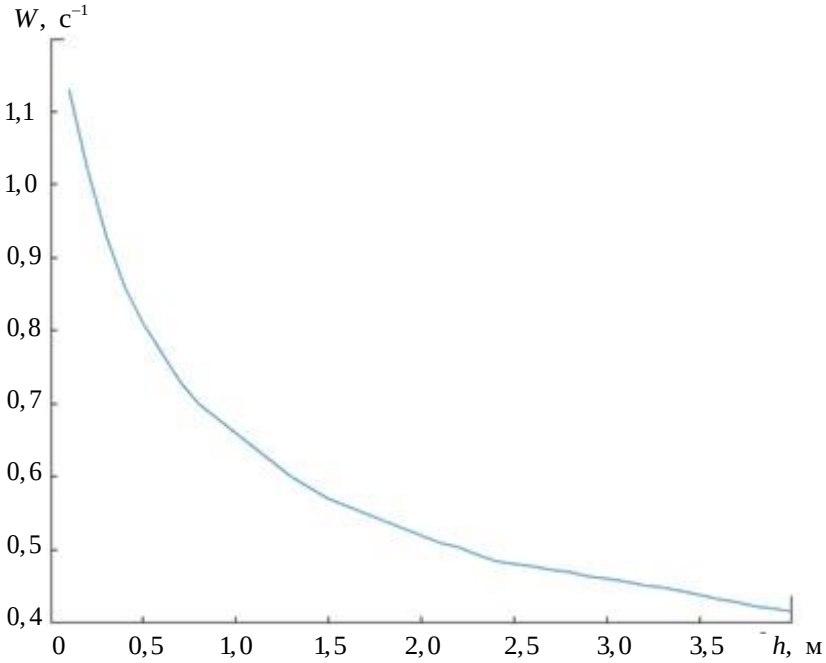


Рис. 3. Зависимость частоты W от толщины ледяного покрова h

Видно, что частота W монотонно убывает по мере увеличения толщины ледяного покрова. Таким образом, тонкий лед более восприимчив к более высоким частотам, толстый — к низким. Расчеты, проведенные для других значений l глубины, на которой находился источник, дали качественно схожие результаты, при этом амплитуда колебаний ледяного покрова, как и следовало ожидать, уменьшалась с глубиной погружения источника.

Заключение. Проведенное исследование показало, что ледяной покров обладает ярко выраженным свойством отклика лишь на определенные частоты колебаний находящихся в воде источников возмущений. При любой фиксированной толщине льда, встречающейся в реальных условиях, существует единственная частота, вызывающая наибольшие отклонения ледяного покрова от невозмущенного положения. В сравнительно небольшой окрестности этой частоты

наблюдается резкий подъем амплитуды колебаний ледяного покрова. Это обстоятельство существенно при моделировании воздействия на ледяной покров любых нестационарных возмущений, поскольку многие из них могут быть представлены как суперпозиции гармоник разных частот. Полученные результаты могут найти применение при оценке возмущений ледяного покрова, возникающих под воздействием локализованных в толще воды источников как естественного, так и искусственного происхождения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильичев А.Т. *Уединённые волны в моделях гидромеханики*. Москва, Физматлит, 2003, 256 с.

[2] Лэмб Г. *Гидродинамика*. Москва, Ленинград, Гостехиздат, 1947, 928 с.

[3] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика. Т.1.* Ленинград, Москва, Гостехиздат, 1948, 535 с.

[4] Кочин Н.Е. О волновом сопротивлении и подъёмной силе погруженных в жидкость тел. *Труды конференции по теории волнового сопротивления*, 1937, с. 65–134.

[5] Келдыш М.В., Лаврентьев М.А. О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости. *Труды конференции по теории волнового сопротивления*, 1937, с. 31–64.

[6] Келдыш М.В. Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости. *Избранные труды. Механика*. Москва, Наука, 1985, с. 100–103.

[7] Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. Москва, Наука, 1977, 815 с.

[8] Милн-Томпсон Л.М. *Теоретическая гидродинамика*. Москва, Мир, 1964, 660 с.

[9] Chowdhury R.G., Mandal B.N. Motion due to fundamental singularities in finite depth water with an elastic solid cover. *Fluid Dynamics Research*, 2006, vol. 38, iss. 4, pp. 224–240.

[10] Lu D.Q., Dai S.Q. Generation of transient waves by impulsive disturbances in an inviscid fluid with an ice–cover. *Archive of Applied Mechanics*, 2006, vol. 76, iss. 1–2, pp. 49–63.

[11] Lu D.Q., Dai S.Q. Flexural– and capillary–gravity waves due to fundamental singularities in an inviscid fluid of finite depth. *International Journal of Engineering Science*, 2008, vol. 46, iss. 11, pp. 1183–1193.

[12] Stepanyants Y.A., Sturova I.V. Waves on a compressed floating ice plate caused by motion of a dipole in water. *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, vol. 97, art no. A7.

[13] Li Z.F, Wu G.X., Shi Y.Y. Interaction of uniform current with a circular cylinder submerged below an ice sheet. *Applied Ocean Research*, 2019, vol. 86, pp. 310–319.

[14] Das D., Sahu M. Wave radiation by a horizontal circular cylinder submerged in deep water with ice–cover. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2019, vol. 4, iss. 1, pp. 49 – 54.

[15] Li Z.F., Wu G.X., Ji C.Y. Wave radiation and diffraction by a circular cylinder submerged below an ice sheet with a crack. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, vol. 845, pp. 682–712.

[16] Collins C.O., Rogers W.E., Lund B. An investigation into the dispersion of ocean surface waves in sea ice. *Ocean Dynamics*, 2017, vol. 67, iss. 2, pp. 263–280.

[17] Sturova I.V. Unsteady three–dimensional sources in deep water with an elastic cover and their applications. *Journal of Fluid Mechanics*, 2013, vol. 730, pp. 392–418.

[18] Савин А.С., Горлова Н.Е., Струнин П.А. Численное моделирование воздействия точечного импульсного источника в жидкости на ледяной покров. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 1, с. 78–90.

[19] Савин А.А., Савин А.С. Генерация волн на ледяном покрове пульсирующим в жидкости источником. *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*, 2013, № 3, с. 24–30.

[20] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 18–36.

[21] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния горных пород с учетом ползучести. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3, с. 101–118.

[22] Савин А.С., Сидняев Н.И., Теделури М.М. Исследование воздействия подводного взрыва на ледовый покров. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, № 2 (110). DOI: 10.18698/2308-6033-2021-2-2052

Статья поступила в редакцию 28.10.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Савин А.С., Сидняев Н.И., Теделури М. М. Численное исследование амплитудно–частотной характеристики ледяного покрова, возмущаемого погруженным пульсирующим источником. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 4, с. 61–72.

Савин Александр Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: assavin@list.ru

Сидняев Николай Иванович — д-р. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sidnyaev@yandex.ru

Теделури Мария Михайловна — аспирант кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Numerical study of the amplitude–frequency characteristics of the ice cover disturbed by an immersed pulsating source

© A.S. Savin, N.I. Sidnyaev, M.M. Tedeluri

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

In connection with the implementation of programs for the development of vast Arctic spaces, adopted in several countries, the attention of many researchers is attracted by the properties of the ice sheets of the seas and land bodies of water. At the same time, the following trend can be noted. If earlier theoretical works related to mathematical modeling of the ice sheet dynamics were mainly devoted to the propagation of free waves,

then in recent years the work aimed at studying the processes of wave generation on the ice sheet under the influence of various sources of disturbances has clearly prevailed. To date, analytical solutions have been obtained for a number of problems concerning the generation of waves on the ice sheet by model sources of disturbances that are identical to some point hydrodynamic features, for example, point sources or dipoles. In this case, the ice was considered as a thin elastic plate floating on the surface of the water. Even in such an idealized setting, it was possible to reveal far from obvious properties of the ice cover. Modeling of sources of fluid perturbations by point hydrodynamic features was previously used in classical hydrodynamics to calculate perturbations occurring on the surface of a fluid. This approach has also shown its effectiveness in the problems of ice cover perturbations. A significant advantage of the method of modeling the sources of fluid disturbances using various systems of point hydrodynamic features can be attributed to the absence of the need to set boundary conditions in the area of localization of the sources of disturbances. Continuously distributed sources of disturbances can be approximated with varying accuracy in the form of a superposition of point hydrodynamic features, which makes it possible to model many processes occurring in the aquatic environment, for example, the flow around the bottom irregularities, the release of matter, the displacement of the bottom sections, etc. Thus, model sources of perturbations with point localization are of interest both from the point of view of modeling more complex sources, and from the point of view of obtaining the simplest estimates of practical significance. In this paper, we con-sider the spatial problem of perturbation of the ice cover by a point source localized in the thickness of an infinitely deep liquid, and having an intensity that varies according to the harmonic law. A numerical study of the amplitude-frequency characteristics of the ice cover of different thickness under the influence of such a source is carried out. The main attention is paid to the disturbances of the ice cover that occur directly above the source. The frequencies of the source intensity fluctuations to which the ice cover responds to the greatest extent are determined. The dependences of such frequencies on the thickness of the ice cover are obtained.

***Keywords**: liquid with ice cover, point pulsating source, ice cover perturbation*

REFERENCES

[1] Ilyichev A.T. *Uedinyonnye volny v modelyah gidromekhaniki* [Solitary waves in models of hydromechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 256 p.

[2] Lamb G. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1947, 928 p.

[3] Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika. T.1.* [Theoretical Hydromechanics. Vol. 1.] Leningrad, Moscow, Gostekhizdat Publ., 1948, 535 p.

[4] Kochin N.E. O volnovom soprotivlenii i pod"yomnoj sile pogruzhennyh v zhidkost' tel [On the wave resistance and lifting force of bodies immersed in a liquid]. *Trudy konferencii po teorii volnovogo soprotivleniya* [Proceedings of the Conference on the theory of wave resistance], 1937, pp. 65–134.

[5] Keldysh M.V., Lavrentiev M.A. O dvizhenii kryla pod poverhnost'yu tyazheloj zhidkosti [On the movement of a wing under the surface of a heavy liquid]. *Trudy konferencii po teorii volnovogo soprotivleniya* [Proceedings of the Conference on the theory of wave resistance], 1937, pp. 31–64.

[6] Keldysh M.V. Zamechaniya o nekotorykh dvizheniyakh tyazheloy zhidkosti [Notes on some movements of a heavy liquid]. *Izbrannye trudy. Mekhanika* [Remarks on some motions of a heavy fluid. Selected works. Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1985, pp. 100–103.

[7] Sretenskiy L.N. *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [Theory of wave motions of a fluid]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 815 p.
[8] Milne-Thompson L.M. *Teoreticheskaya gidrodinamika* [Theoretical hydrodynamics]. Moscow, Mir Publ., 1964, 660 p.
[9] Chowdhury R.G., Mandal B.N. Motion due to fundamental singularities in finite depth water with an elastic solid cover. *Fluid Dynamics Research*, 2006, vol. 38, iss. 4, pp. 224–240.
[10] Lu D.Q., Dai S.Q. Generation of transient waves by impulsive disturbances in an inviscid fluid with an ice–cover. *Archive of Applied Mechanics*, 2006, vol. 76, iss. 1–2, pp. 49–63.
[11] Lu D.Q., Dai S.Q. Flexural– and capillary–gravity waves due to fundamental singularities in an inviscid fluid of finite depth. *International Journal of Engineering Science*, 2008, vol. 46, iss. 11, pp. 1183–1193.
[12] Stepanyants Y.A., Sturova I.V. Waves on a compressed floating ice plate caused by motion of a dipole in water. *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, vol. 97, art no. A7.
[13] Li Z.F, Wu G.X., Shi Y.Y. Interaction of uniform current with a circular cylinder submerged below an ice sheet. *Applied Ocean Research*, 2019, vol. 86, pp. 310–319.
[14] Das D., Sahu M. Wave radiation by a horizontal circular cylinder submerged in deep water with ice–cover. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2019, vol. 4, iss. 1, pp. 49 – 54.
[15] Li Z.F., Wu G.X., Ji C.Y. Wave radiation and diffraction by a circular cylinder submerged below an ice sheet with a crack. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, vol. 845, pp. 682–712.
[16] Collins C.O., Rogers W.E., Lund B. An investigation into the dispersion of ocean surface waves in sea ice. *Ocean Dynamics*, 2017, vol. 67, iss. 2, pp. 263–280.
[17] Sturova I.V. Unsteady three–dimensional sources in deep water with an elastic cover and their applications. *Journal of Fluid Mechanics*, 2013, vol. 730, p. 392–418.
[18] Savin A.S., Gorlova N.E., Strunin P.A. Numerical simulation of the point pulse source impact in a liquid on the ice cover. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 1, pp. 78–90.
[19] Savin A.A., Savin A.S. Waves generated on an ice cover by a source pulsating in fluid. *Fluid Dynamics*, 2013, vol. 48, iss. 3, pp. 303–309.
[20] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Yurin Y.V. Asymptotic theory of thermocreep for multilayer thin plates. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 18–36.
[21] Dimitrienko Y.I., Yurin Y.V. Finite element simulation of the rock stress-strain state under creep. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 3, pp. 101–118.
[22] Savin A.S., Sidnyaev N.I., Tedeluri M.M. Study of the underwater explosion impact on the ice cover. *Engineering Journal: Science and Innovation: Electronic Science and Engineering Publication*, 2021, no. 2 (110). DOI: 10.18698/2308-6033-2021-2-2052

Savin A.S., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor of Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: assavin@list.ru

Sidnyaev N.I., Dr. Sci. (Eng.), Head of Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sidnyaev@yandex.ru

Tedeluri M.M., Postgraduate student of Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University.