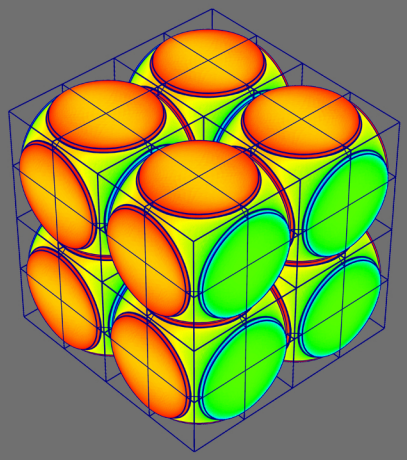
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Тимофеев В.Н. Моделирование дозвукового отрывного обтекания тел методом дискретных вихрей на основе концепции эквивалентной поверхности с кубическими сплайнами. Математическое моделирование и численные методы, 2020, № 4, с. 27–43.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/234/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 10:00:16

УДК 531.6.011.32: 532.582.4 DOI: 10.18698/2309-3684-2020-4-2743

Моделирование дозвукового отрывного обтекания тел методом дискретных вихрей на основе концепции эквивалентной поверхности с кубическими сплайнами

© В.Н. Тимофеев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Для математического моделирования дозвукового отрывного обтекания осесимметричных тел с донным срезом использовалась методика с частичной реализацией концепции вязко-невязкого взаимодействия. Применялась схема течения с эквивалентной полубесконечной поверхностью. Численные моделирование проведено по алгоритмам методики с применением метода дискретных вихрей и аппроксимации сглаживающими кубическими сплайнами. Представлены данные о влиянии формы хвостового участка эквивалентной поверхности на распределение скорости и давления при осесимметричном обтекании тел с донным срезом. Предложенные рекомендации дают возможность более универсального применении данной методики.

Ключевые слова: *математическое моделирование, дозвуковое отрывное обтекание, концепция вязко–невязкого взаимодействия, метод дискретных вихрей, эквивалентная поверхность*

Введение. Математическое моделирование процессов дозвукового обтекания тел, в том числе, с отрывом потока в донной области, применяется при решении широкого круга практических задач. Исследования дозвукового отрывного обтекания проводились с численным решением уравнений Навье-Стокса [1–3], с использованием различных методов теории идеальной среды [4–10] и с совместным применением моделей идеальной и вязкой сред [11, 12]. Такие методы требуют существенных компьютерных ресурсов, вплоть до применения супер-ЭВМ. В тех исследованиях, основной целью которых является получение скоростей и давлений на обтекаемом теле, одним из путей снижения вычислительных затрат является применение методики [13] с частичной реализацией концепции вязко–невязкого взаимодействия. В работе [14] были рассмотрены два варианта такой методики с использованием эквивалентного тела конечной длины и полубесконечного эквивалентного тела. В обоих вариантах поверхность эквивалентного тела, называемая эквивалентной, составлялась из двух частей: носовой Σ_1 и хвостовой Σ_2. В данной статье рассматривается влияния формы хвостовой части эквивалентного тела на распределение скоростей и давлений по поверхности обтекаемого тела.

Начальный этап численного моделирования. Исследуется

обтекания осесимметричных тел с донным срезом газовым потоком с умеренной дозвуковой скоростью. Изучаемые тела имеют головную часть оживальной формы и цилиндрическую часть с плоским донным срезом (рис. 1).

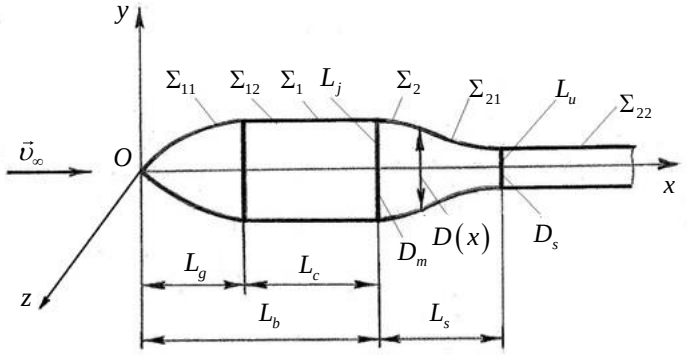


Рис. 1. Эквивалентная поверхность: носовая Σ_1 и хвостовая Σ_2 части; L_j — линия их стыковки; Σ_{11} и Σ_{12} — участки носовой части; L_u — линия соединения участков Σ_{21} и Σ_{22} хвостовой части

Выбирается декартова система координат $Oxyz$, связанная с обтекаемым телом. Для большей универсальности вычислений используются безразмерные длины L и координаты $x,\ y,\ z$. Их значения получаются делением соответствующих размерных величин $L^*,\ x^*,\ y^*,\ z^*$ на диаметр миделевого сечения D_m^*. Тогда безразмерный диаметр миделевого сечения равняется единице: $D_m = 1$. Изучается обтекание удлиненных тел, у которых длина L_c цилиндрической части в два и более раз превышает длину L_g головной части. Рассматриваются режимы течения с областью отрыва потока, локализованной в окрестности донного среза. Поэтому считается, что линия отрыва совпадает с контуром донного среза. В соответствии с рекомендациями работы [13] толщина вытеснения пограничного слоя на удлиненных телах считается малой, и носовая часть Σ_1 эквивалентной поверхности совмещается с поверхностью обтекаемого тела. Конфигурация обтекаемого тела предопределяет разбиение поверхности Σ_1 на два участка Σ_{11} и Σ_{12} оживальной и цилиндрической формы, соответственно.

Применяется схема течения с полубесконечным эквивалентным телом. Хвостовая часть эквивалентной поверхности составляется из участка конечной длины Σ_{21} и полубесконечного участка Σ_{22}. Формирование поверхностей этих участков проводится на основе рекомендаций работы [14]. Линия L_j стыковки носовой и хвостовой

частей эквивалентной поверхности совмещается с контуром донного среза. Участки Σ_{21} и Σ_{22} соединяются по линии L_u. У исследуемых тел отсутствует излом при сопряжении головной оживальной и цилиндрической частей. Поэтому конфигурация поверхности обтекаемого тела и поверхностей участков Σ_{11} и Σ_{12} в полной мере определяется безразмерными длинами L_c и L_g. Суммарная длина обтекаемого тела, равная $L_g + L_c$, обозначается через L_b.

Форма поверхности обтекаемого тела определяется безразмерными длинами L_c и L_g. Задается вектор скорости набегающего потока $\vec{\upsilon}_\infty$. С помощью аппроксимации сглаживающими кубическими сплайнами [15] производится построение расчетной сетки на носовой части Σ_1 эквивалентной поверхности. Данная сетка сохраняется при последующих вычислениях. Формирование поверхности Σ_2 хвостовой части эквивалентного тела проводится с помощью итерационного цикла. Для начального приближения или по данным, полученным на предыдущей итерации, с помощью сглаживающих кубических сплайнов строится расчетная сетка на хвостовой части эквивалентного тела. В результате для $j-$ой итерации определяется конфигурация хвостовой части $\sum_2 = \sum_2^{(j)}$ эквивалентной поверхности, а следовательно, и форма всей поверхности $\sum = \sum^{(j)} = \sum_1 \bigcup \sum_2^{(j)}$ эквивалентного тела.

Математическая модель и основные расчетные соотношения. В соответствии с концепцией вязко-невязкого взаимодействия на каждой $j-$ой итерации производится расчет невязкого обтекания эквивалентного тела, имеющего поверхность $\sum = \sum^{(j)}$. Газовая среда считается идеальной и невесомой. Поведение среды описывается уравнениями неразрывности и движения в форме Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\upsilon}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + (\vec{\upsilon} \cdot \nabla)\vec{\upsilon} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{2}$$

где $\vec{\upsilon}$ — вектор скорости, p — давление и ρ — плотность газового потока; ∇ — оператор Гамильтона [16]. В задачах обтекания требуется, чтобы решение системы уравнений (1–2) удовлетворяло граничным условиям непротекания поверхности обтекаемого тела и затухания возмущений на бесконечности.

Исследуется установившееся движение газа с умеренными дозвуковыми скоростями набегающего потока. Поэтому среда

считается несжимаемой и однородной, а уравнение неразрывности (1) принимает следующий вид:

$$\nabla \cdot \vec{\upsilon} = 0. \tag{3}$$

Предполагается, что вне поверхности эквивалентного тела течение является потенциальным. Вводится в рассмотрение потенциал $\varphi = \varphi(x, y, z)$ вектора скорости возмущений и скорость газового потока в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ определяется градиентом этого потенциала:

$$\vec{\upsilon}(M_0) = \vec{\upsilon}_\infty + \nabla\varphi(M_0), \tag{4}$$

где ∇ — оператор Гамильтона.

Подстановка правой части формулы (4) в уравнение неразрывности (3) приводит к равенству

$$\nabla \cdot \nabla \varphi(M_0) = 0. \tag{5}$$

Принимается во внимание, что $\nabla \cdot \nabla = \Delta$, где Δ — оператор Лапласа. Тогда из уравнения (5) и граничных условий непротекания поверхности обтекаемого тела и затухания возмущений на бесконечности следует, что потенциал возмущений должен являться решением внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi(M_0) = 0, \ M_0 \notin \Sigma, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial n} = -\vec{\upsilon}_\infty \cdot \vec{n}(M_0), \ M_0 \in \Sigma, \tag{7}$$

$$\lim_{R\to\infty} \varphi(M_0) = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{R\to\infty} \nabla\varphi(M_0) = 0, \tag{9}$$

где $\vec{n}(M_0)$ — орт нормали к поверхности Σ в точке M_0; R — расстояние от точки M_0 до начала координат.

Решение внешней задачи Неймана (6)–(9) ищется в виде потенциала двойного слоя

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_\Sigma \frac{\vec{r} \times \vec{n}(M)}{r^3} g(M) d\sigma, \tag{10}$$

где $d\sigma$ — элемент площади поверхности; $\vec{r}$ — вектор, направленный в точку M_0 из текущей точки M, расположенной на элементе

поверхности с площадью $d\sigma$; $\vec{n}(M)$ — орт нормали в точке M; r — модуль вектора $\vec{r}$; $g(M)$ — поверхностная плотность потенциала двойного слоя.

Потенциал возмущений, представленный в виде потенциала двойного слоя (10), удовлетворяет уравнения Лапласа (6) и условиям (8)–(9) затухания возмущений на бесконечности. Остается удовлетворить граничное условие непротекания (7), причем достаточно находить градиент потенциала возмущений

$$\nabla\varphi(M_0)=\frac{1}{4\pi}\nabla\iint\limits_{\Sigma}\frac{\vec{r}\times\vec{n}(M)}{r^3}g(M)d\sigma. \qquad (11)$$

Действительно, если точка M_0 располагается вне поверхности эквивалентного тела, вектор скорости потока находится по соотношению (4). На поверхности Σ градиент потенциала возмущений как градиент потенциала двойного слоя претерпевает разрыв тангенциальной составляющей [17]

$$\vec{\delta}(\nabla\varphi)(M_0)=\frac{\partial g(M_0)}{\partial\tau_1}\vec{\tau}_1(M_0)+\frac{\partial g(M_0)}{\partial\tau_2}\vec{\tau}_2(M_0),$$

где $\frac{\partial g(M_0)}{\partial\tau_1}$ и $\frac{\partial g(M_0)}{\partial\tau_2}$ — частные производные, которые вычисляются по направлениям двух ортогональных ортов $\vec{\tau}_1(C_v)$ и $\vec{\tau}_2(C_v)$, лежащих в плоскости, касательной к поверхности Σ и проходящей через точку M_0. Поэтому для точек M_0, лежащих на поверхности эквивалентного тела вектор скорости потока находится как предельное значение градиента потенциала двойного слоя

$$\vec{\upsilon}(M_0)=\vec{\upsilon}_\infty+\frac{1}{4\pi}\nabla\iint\limits_{\Sigma}\frac{\vec{r}\times\vec{n}(M)}{r^3}g(M)d\sigma+\frac{1}{2}\overrightarrow{\delta\upsilon}(M_0)\,, \qquad (12)$$

где $\overrightarrow{\delta\upsilon}(M_0)$ — вектор разрыва скорости потока, равный вектору $\vec{\delta}(\nabla\varphi)(M_0)$ разрыва градиента потенциала возмущений.

Нахождение градиента потенциала возмущений осуществляется численно [18]. Участки $\sum_{11}$, $\sum_{12}$ и $\sum_{21}$ поверхности эквивалентного тела с применением сглаживающих кубических сплайнов аппроксимируется группой панелей Σ_k, $k=1,...,N$, представляющих собой четырехугольники или треугольники. Полубесконечный участок Σ_{22}

эквивалентного тела моделируется набором полубесконечных панелей Σ_k, $k = N+1,...,N+N_r$. На каждой панели Σ_k плотность потенциала двойного слоя считается постоянной: $g(M) = g_k$; $k = 1,...,N_t$, где $N_t = N + N_r$ — суммарное число панелей.

После проведения аппроксимации по свойству аддитивности поверхностный интеграл в правой части равенства (11) представляется как сумма градиентов потенциалов двойного слоя всех панелей Σ_k:

$$\nabla \iint_{\Sigma} \frac{\vec{r} \times \vec{n}(M)}{r^3} g(M) d\sigma = \\ = \sum_{k=1}^{N_t} g_k \left(\frac{1}{4\pi} \nabla \iint_{\Sigma_k} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}(M)}{r^3} d\sigma \right), \; k = 1,...,N_t. \tag{13}$$

Градиент потенциала двойного слоя, размещенного на панели Σ_k с постоянной плотностью g_k, равняется вектору скорости, индуцированной вихревой нитью L_k, которая расположена на границе $\partial\Sigma_k$ этой панели и имеет циркуляцию

$$\Gamma_k = -g_k, \; k = 1,...,N_t. \tag{14}$$

Поэтому на границах $\partial\Sigma_k$ всех панелей Σ_k, размещаются вихревые многоугольники L_k. На участках Σ_{11}, Σ_{12} и Σ_{21} поверхности эквивалентного тела вихревые четырехугольники или треугольники имеют конечные размеры. На полубесконечном участке Σ_{22} располагаются Π – образные вихревые линии. Скорость, создаваемая замкнутой вихревой нитью, определяется с помощью формулы Био–Савара и используется следующее соотношение:

$$\frac{g_k}{4\pi} \nabla \iint_{\Sigma_k} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}(M)}{r^3} d\sigma = \frac{\Gamma_k}{4\pi} \int_{L_k} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}, \; k = 1,...,N_t. \tag{15}$$

Вводятся в рассмотрение векторы $\vec{w}_k(M_0)$ функции скорости, индуцированной в точке M_0 k – ой вихревой нитью

$$\vec{w}_k(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{L_k} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}, \; k = 1,...,N_t. \tag{16}$$

Соотношения (13)–(16) дают возможность преобразовать формулы (4) и (12) для нахождения вектора скорости потока к виду, в котором содержатся циркуляции вихревых нитей и векторы функций скорости:

$$\vec{\upsilon}\left(M_0\right)=\vec{\upsilon}_\infty+\sum_{k=1}^{N_s}\Gamma_k\overrightarrow{w_k}\left(M_0\right),\ M_0\in\Sigma, \tag{17}$$

$$\vec{\upsilon}\left(M_0\right)=\vec{\upsilon}_\infty+\sum_{k=1}^{N_s}\Gamma_k\overrightarrow{w_k}\left(M_0\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{\delta\upsilon}(M_0),\ M_0\notin\Sigma. \tag{18}$$

Представление вектора скорости равенствами (17)–(18) позволяет использовать метод дискретных вихрей. Вычисление векторов функций скорости $\vec{w}_k\left(M_0\right),\ k=1,...,N_t$, производится по алгоритмам [19], адаптированным для проведения численного моделирования. Полагается, что $\Pi-$образные вихри и примыкающие к ним по линии L_u вихревые многоугольники конечного размера имеют равные циркуляции. Это обстоятельство позволяет объединить указанные вихревые линии и вычислить преобразованные выражения $\overrightarrow{w_k^*}\left(M_0\right),\ k=1,...,N$ для векторов функций скорости. В итоге для определения вектора скорости потока используются следующие соотношения:

$$\vec{\upsilon}\left(M_0\right)=\vec{\upsilon}_\infty+\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\overrightarrow{w_k^*}\left(M_0\right),\ \ M_0\in\Sigma, \tag{19}$$

$$\vec{\upsilon}\left(M_0\right)=\vec{\upsilon}_\infty+\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\overrightarrow{w_k^*}\left(M_0\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{\delta\upsilon}(M_0),\ M_0\notin\Sigma. \tag{20}$$

На поверхности эквивалентного тела нормальная производная потенциала двойного слоя непрерывна. Поэтому из соотношений (4) и (19) следует, что граничное условие (7) непротекания поверхности эквивалентного тела преобразуется к следующему виду:

$$\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\left(\vec{w}_k^*(M_0)\cdot\vec{n}(M_0)\right)=-\vec{\upsilon}_\infty\cdot\vec{n}(M_0),\ M_0\in\Sigma. \tag{21}$$

При численном моделировании выполнение граничного условия (21) непротекания требуется на множестве контрольных точек $C_\nu,\ \nu=1,...,N$, расположенных на панелях Σ_k:

$$\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\left(\vec{w}_k^*(C_\nu)\cdot\vec{n}(C_\nu)\right)=-\vec{\upsilon}_\infty\cdot\vec{n}(C_\nu)\ ,\ \nu=1,...,N, \tag{22}$$

где $\vec{n}(C_\nu)$ — орт внешней нормали к поверхности Σ в $\nu-$ой контрольной точке.

Набор равенств (22) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных циркуляции $\Gamma_k,\ k=1,...,N$:

$$\sum_{k=1}^{N} a_{\nu k}\,\Gamma_k = b_\nu, \quad \nu = 1,\ldots,N, \tag{23}$$

где

$$a_{\nu k} = \vec{w}_k^{*}(C_\nu)\cdot\vec{n}(C_\nu),\ b_\nu = -\vec{v}_\infty\cdot\vec{n}(C_\nu),$$
$$\nu = 1,\ldots,N,\quad k = 1,\ldots,N.$$

После решения системы (23) с применением регуляризирующей функции [20] векторы скорости потока в точках поля течения вычисляются по соотношению (19). Распределение скорости на поверхности эквивалентного тела получается с помощью применения формулы (20) для вычисления векторов скорости потока в контрольных точках

$$\vec{v}\left(C_\nu\right) = \vec{v}_\infty + \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \overrightarrow{w_k^{*}}\left(C_\nu\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\delta v}(C_\nu),\ \nu = 1,\ldots,N. \tag{24}$$

По интегралу Бернулли для точек поля течения и для контрольных точек рассчитывается статическое давление

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(v_\infty^2 - v^2),$$

где p_∞ и $v_\infty = \left|\vec{v}_\infty\right|$ — статическое давление и модуль вектора скорости набегающего потока; $v = \left|\vec{v}\right|$ — модуль вектора скорости среды. Для универсальности вычислений в выбранных точках определяются безразмерные скорости $\bar{v} = v / v_\infty$ коэффициенты давления

$$c_p = \frac{2(p - p_\infty)}{\rho v_\infty^2} = 1 - \left(\bar{v}\right)^2. \tag{25}$$

Вычислительный эксперимент. С целью выявления влияния формы хвостовой части эквивалентного тела на распределение скоростей и давлений по поверхности обтекаемого тела проводится вычислительный эксперимент. Исследуется обтекания дозвуковым газовым потоком осесимметричных тел при нулевом угле атаки. Формирование поверхности Σ_2 хвостовой части эквивалентного тела проводится с помощью итерационного цикла [21]. Поперечный размер полубесконечного хвостового участка эквивалентного тела по мере удаления от донного среза плавно изменяется и достигает на бесконечности конечного значения. Это значение обозначается через D_s и называется минимальным диаметром следа. Считается, что при численном моделировании величина D_s достигается уже при конечном удалении

L_s от донного среза. Будем называть параметр L_s длиной следа. При заданном законе изменения поперечных размеров эквивалентной поверхности на участке Σ_{21} величины L_s и D_s полностью определяют конфигурацию указанного участка и всей поверхности эквивалентного тела. Рассматривается три варианта закона изменения диаметра $D(x)$ на участке Σ_{21}. Для первого варианта принимается следующая зависимость:

$$D = D(x) = 0,5(1+D_s) + 0,5(1-D_s)\cos\left(\frac{\pi}{L_s}(x-L_b)\right). \qquad (26)$$

Величины L_s и D_s определяются в итерационном цикле. Для первой итерации задаются начальные значения этих величин $L_s^{(1)}$ и $D_s^{(1)}$. На $j-$ой итерации величины $L_s^{(j)}$ и $D_s^{(j)}$ определяются по значениям, полученным на предыдущей итерации. Построение расчетной сетки на хвостовом участках эквивалентного тела проводится с помощью аппроксимации сглаживающим кубическим сплайном. Затем по соотношениям (19)–(25) проводится расчет невязкого обтекания эквивалентного тела с поверхностью $\sum = \sum^{(j)}$. В завершающей стадии вычисляется значение коэффициента давления на донном срезе. Последнее сравнивается со значением коэффициента донного давления, полученным из формулы Хорнера [20], которая обобщает экспериментальные данные для удлиненных тел. По величине рассогласования сравниваемых значений коэффициентов донного давления определяется уточненное значение длины следа $L_s^{(j+1)}$. Величина минимального диаметра следа $D_s^{(j+1)}$ находится по рассогласованию значений аэродинамического коэффициента сопротивления обтекаемого тела, получаемых до и после $j-$ой итерации. При достижении заданной точности итерационный цикл завершается. В итоге длина следа L_s и его минимальный диаметр D_s находятся как функция суммарной длины обтекаемого тела L_b и числа Рейнольдса Re, которое вычисляется по скорости набегающего потока и значению длины L_b. Аналогичные итерационные циклы проводились еще для двух законов изменения диаметра $D(x)$.

Обсуждение результатов вычислительного эксперимента. В качестве иллюстрации рассматриваются результаты вычислительного эксперимента, полученные для обтекания осесимметричного тела с $L_g = 1$ и $L_c = 1$ при нулевом угле атаки и $\mathrm{Re} = 5\cdot 10^6$. Для варианта

расчетов, в котором диаметр $D(x)$ на участке Σ_{21} изменяется по закону (26), конфигурация эквивалентной поверхности, полученная после завершения итерационного цикла, изображена на рис. 2.

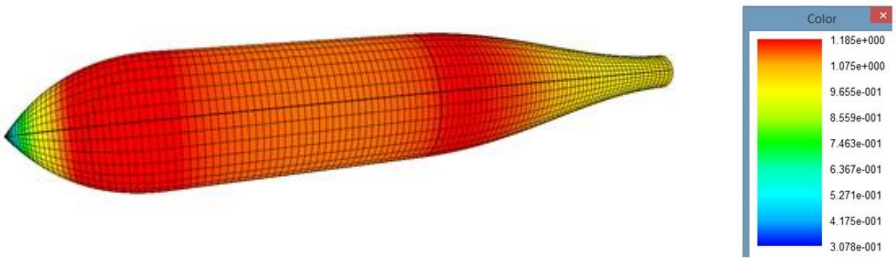


Рис. 2. Эквивалентная поверхность и распределение безразмерной скорости $\vec{v}$ на поверхности эквивалентного тела при $L_g = 1,\ L_c = 1,\ \alpha = 0^\circ,\ \mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$

Полубесконечный участок Σ_{22} поверхности эквивалентного тела имеет постоянный диаметр D_s и на подобных рисунках не показывается. На рис. 2 также представлено распределение модуля безразмерной скорости $\vec{v}$ на поверхности эквивалентного тела. Найденное из интеграла Бернулли для указанных условий распределение коэффициента давления c_p изображено на рис. 3.

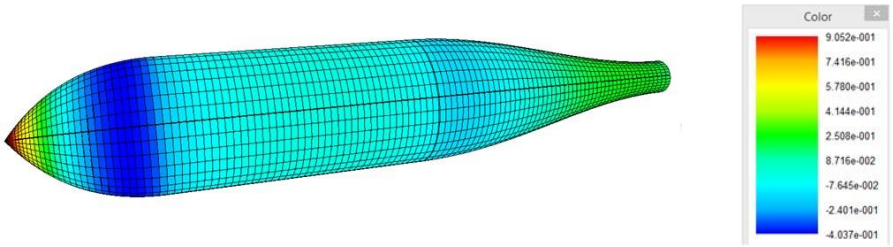


Рис. 3. Распределение коэффициента давления c_p на поверхности эквивалентного тела при $L_g = 1,\ L_c = 2,\ \alpha = 0^\circ,\ \mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$

При нулевом угле атаки эквивалентная поверхность обладает осевой симметрией и обтекание является осесимметричным. В ходе проведения итераций форма участков Σ_{11} и Σ_{12} остается неизменной, а конфигурация участка Σ_{21} и расположение полубесконечного участка Σ_{22} меняются. На рис. 4 изображены зависимости $y = y(x)$, показывающие формы участка Σ_{21} хвостовой части эквивалентной поверхности, полученные после завершения итерационного цикла для трех вариантов закона изменения диаметра $D(x)$.

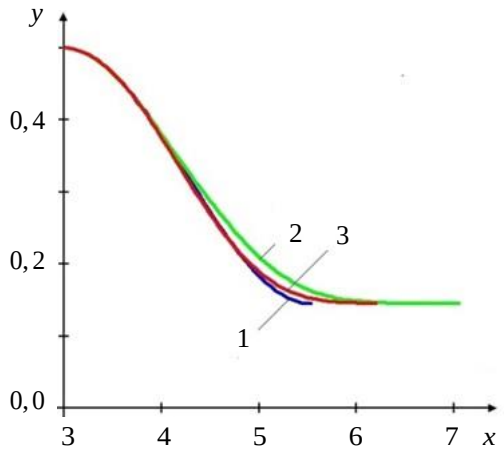


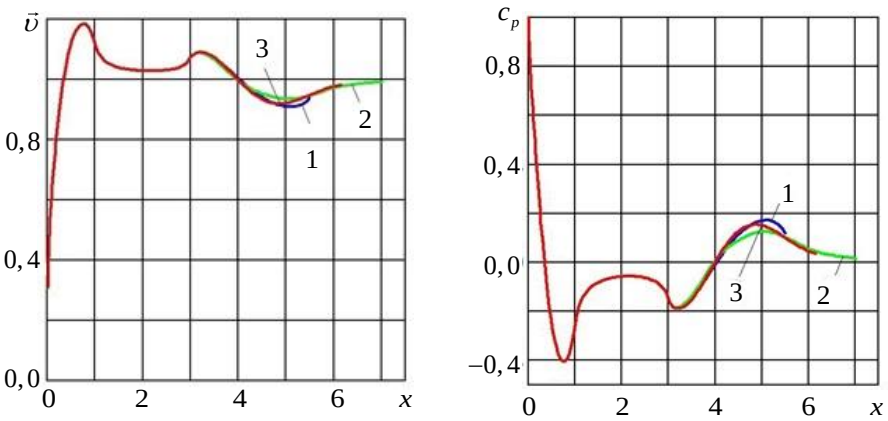
Рис. 4. Зависимости $y = y(x)$ для различных вариантов формы участка Σ_{21} при $L_g = 1,\ L_c = 2,\ \alpha = 0^\circ,\ \mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$:
1 — $L_s = 2,53$; 2 — $L_s = 4,05$; 3 — $L_s = 3,20$

Кривая 1 определяет конфигурацию указанного участка при изменении диаметра D по закону (26). Кривые 2 и 3 соответствуют таким законам изменения $D(x)$, для которых начальная форма участка Σ_{21} существенно отличается от формы, определяемой зависимостью (26). Для второго и третьего вариантов зависимости $D(x)$ представляются в графическом виде, а затем задаются численно сглаживающими кубическими сплайнами. У вариантов, которые соответствуют кривым 1, 2 и 3 на рис. 5, расчетные значения длины следа L_s равняются 2,53; 4,05 и 3,20. Величины минимального диаметра следа D_s для всех трех вариантов приближенно равны 0,291 . Поэтому варианты можно различать по значению длины следа L_s.

При одинаковом значении абсциссы x различие ординат y оказывается несущественным при $x < 4$, т.е. в той зоне участка Σ_{21} эквивалентной поверхности, которая примыкает к линии стыковки L_j, совпадающей с контуром донного среза. Указанные различия становятся заметными по мере удаления от плоскости донного среза на расстояния, сравнимые с диаметром миделевого сечения.

Для анализа распределения скорости и давления на поверхности эквивалентного тела в дополнение к пространственным цветовым изображениям, показанным на рис. 2 и 3, изучается изменение безразмерной скорости $\vec{\upsilon}$ и коэффициента давления c_p в продольном сечении поверхности эквивалентного тела. Выбирается сечение, расположенном в плоскости Oxy (рис. 1). Графики зависимостей модуля

безразмерной скорости $\vec{\upsilon}$ в точках указанного сечения от продольной координаты x для трех вариантов формы участка Σ_2 представлены на рис. 5*а* . Графики аналогичных зависимостей для коэффициента давления c_p изображены на рис. 5*б*. Кривые 1, 2 и 3 на рис. 5 соответствуют вариантам с длиной следа L_s, равной 2,53; 4,05 и 3,20.



а *б*

Рис. 4. 3 Зависимость параметров газового потока в продольном сечении поверхности эквивалентного тела от координаты x при

$L_g = 1,\ L_c = 2,\ \alpha = 0^\circ,\ \mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$;

1 — $L_s = 2,53$; 2 — $L_s = 4,05$; 3 — $L_s = 3,20$;

а — безразмерная скорость $\vec{\upsilon}$; *б* — коэффициент давления c_p

Анализ представленных зависимостей позволяет выявить несколько важных особенностей распределения скорости и давления на поверхности эквивалентного тела. Особо существенно, что при суммарной длине исследуемого обтекаемого тела $L_b = 3$ кривые на рис. 5 для всех трех вариантов практически сливаются воедино в области, где $x \le 3$. Следовательно, распределение модуля безразмерной скорости $\vec{\upsilon}$ и коэффициента давления c_p по поверхности обтекаемого тела практически не зависит от формы хвостовой части Σ_2 для исследованных вариантов зависимости $D(x)$. Именно этот результат обосновывает возможность при нахождении распределения скорости и давления на поверхности обтекаемого тела применять методику с частичной реализаций концепции вязко-невязкого взаимодействия, выбрав одну из зависимостей $D(x)$ изменения диаметра хвостовой части Σ_{21} эквивалентной поверхности.

Некоторое представление о том, какому виду указанной зависимости отдать предпочтение получается при рассмотрении распределения скорости и давления на поверхности хвостовой части эквивалентного тела, т.е. в областях $x > 3$ на рис. 5. Сравнение поведения графиков кривых 1, 2 и 3 показывает, что чем большую длину L_s имеет участок Σ_{21} хвостовой эквивалентной поверхности, тем ближе оказывается значение безразмерной скорости в конце этого участка к значению, равному единице. Это означает, что при использовании вариантов с большей длиной L_s распределения скорости и давления по поверхности хвостовой части эквивалентного тела оказываются более плавными, чем при применении закона (26). Поэтому при решении задачи о нахождении скорости и давления на поверхности обтекаемого тела целесообразно выбирать варианты 1 или 2, т. к. они требуют меньших затрат вычислительных ресурсов. Если же в дальнейшем не исключается реализации концепции вязко–невязкого взаимодействия в более полном объеме, чем в данной методике, то более предпочтительным является вариант 3 или варианты с еще более плавным изменением диаметра $D(x)$.

Заключение. Модификация методики с частичных реализаций концепции вязко–невязкого взаимодействия с применением сглаживающих кубических сплайнов позволила выполнить более детальное исследование дозвукового отрывного обтекания тел с донным срезом. Результаты проведенного вычислительного эксперимента свидетельствуют о том, что для исследованных конфигураций хвостовой части эквивалентной поверхности распределение скорости и давления по поверхности обтекаемого тела остается практически неизменным. Форма хвостовой части поверхности эквивалентного тела оказывает влияние на скорости и давления по поверхности самой этой части. Представленные результаты позволяют дать рекомендации для подбора конфигурации эквивалентной поверхности как для самой методики с частичной реализацией концепции вязко–невязкого взаимодействия так и при её использовании в других исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. Методы расчета различных течений*. Москва, Мир, 1991, 552 с.

[2] Патанкар С.В. *Численные методы решения задач теплообмена и динамики*. Москва, Энергоатомиздат, 1984, 152 с.

[3] Калугин В.Т., Соболев В.Ю. Математическое моделирование процессов дозвукового турбулентного обтекания стабилизирующих устройств летательных аппаратов в условиях отрыва потока. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2005, № 2, с. 20–30.

[4] Головкин М.А., Головкин В.А., Калявкин В.М. *Вопросы вихревой гидромеханики*. Москва, Физматлит, 2009, 264 с.

[5] Saffman P.G. *Vortex Dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992, 311 p.

[6] Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. *Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок*. Москва, Ин-т механики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006, 184 с.

[7] Lewis R.I. *Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems*. Cambridge, Cambridge University Press, 2005, 592 p.

[8] Kuzmina K.S., Marchevskii I.K., Moreva V.S. Vortex sheet intensity computation in incompressible flow simulation around an airfoil by using vortex methods. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2018, vol. 10, iss. 3, pp. 276–287.

[9] Коцур О.С., Щеглов Г.А. Реализация метода обмена интенсивностями вортонов-отрезков для учета вязкости в методе вихревых элементов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 3, с. 48–67.

[10] Дергачев С.А., Щеглов Г.А. Моделирование обтекания тел методом вихревых элементов с использованием замкнутых вихревых петель. *Научный вестник МГТУ ГА*, 2016, № 223, с. 19–27.

[11] Белоцерковский С.М., Ништ М.И., Котовский В.Н., Федоров Р.М. *Трехмерное отрывное обтекание тел произвольной формы*. Москва, ЦАГИ, 2000, 265 с.

[12] Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. *Отрывные и кавитационные течения. Основные свойства и расчет модели*. Москва, Наука, 1990, 384 с.

[13] Тимофеев В.Н. Математическое моделирование отрывного дозвукового обтекания осесимметричных тел с учетом донного давления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 10. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1246.html (дата обращения 17.10.2017).

[14] Тимофеев В. Н. Построение полубесконечного эквивалентного тела при математическом моделировании дозвукового отрывного осесимметричного обтекания. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4, с. 67–83.

[15] Роджерс Д.Ф., Адамс Дж.А. *Математические основы машинной графики*. Москва, Наука, 2001, 576 с.

[16] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. Москва, Высшая школа, 2001, 576 с.

[17] Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн)*. Москва, ТОО «Янус», 1995, 520 с.

[18] Timofeev V.N. Mathematical simulation of the subsonic flow around the lengthening bodies with the flow separation in the region of ground shear with the use of an equivalent body. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1141, art. no. 012095.

[19] Тимофеев В.Н. Особенности вихревой схемы при моделировании дозвукового отрывного обтекания с полубесконечным эквивалентным телом. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 4, с. 73–91.

[20] Аубакиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И., Ништ М.И. *Нелинейная теория крыла и ее приложения*. Алматы, Гылым, 1997, 448 с.

[21] Тимофеев В.Н. Моделирование дозвукового отрывного обтекания тел с донным срезом по схеме течения с эквивалентной полубесконечной поверхностью при малых углах атаки. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 4, с. 31–49.

Статья поступила в редакцию 21.08.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тимофеев В.Н. Моделирование дозвукового отрывного обтекания тел методом дискретных вихрей на основе концепции эквивалентной поверхности с кубическими сплайнами. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 4, с. 27–43.

Тимофеев Валерий Николаевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных и методических работ. Область научных интересов: математическое моделирование, численные методы, механика жидкости и газа, аэродинамика, численные методы, методы оптимизации. e-mail: v_n_1951@mail.ru

Modeling of subsonic separation flow around bodies by the method of discrete vortices based on the concept of an equivalent surface with cubic splines

© V.N. Timofeev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

For mathematical modeling of subsonic separation flow around axisymmetric bodies with a bottom section, a technique with a partial implementation of the concept of visco–inviscid interaction was used. A flow scheme with an equivalence semi-infinite surface was used. Numerical simulations were carried out according to the algorithms of the method using the method of discrete vortices and approximation by smoothing cubic splines. Data on the influence of the shape of the tail section of an equivalent surface on the velocity and pressure distribution during axisymmetric flow around bodies with a bottom section are presented. The proposed recommendations make it possible to apply this technique more universally.

***Keywords**: mathematical modeling, subsonic separation flow, the concept of visco–inviscid interaction, the method of discrete vortices, equivalent surface*

REFERENCES

[1] Fletcher K. *Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostej. T. 2. Metody rascheta razlichnyh techenij* [Computational methods in fluid dynamics. Vol. 2. Methods for calculating different flows]. Moscow, Mir Publ., 1991, 552 p.

[2] Patankar S.V. *Chislennye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki*. [Numerical methods for solving problems of heat transfer and dynamics]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984, 152 p.

[3] Kalugin V.T., Sobolev V.Yu. Mathematical simulation of processes of subsonic turbulent flow around stabilizing devices of flying vehicles under condition of flow separation. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2005, no. 2, pp. 20–30.

[4] Golovkin M.A., Golovkin V.A., Kalyavkin V.M. *Voprosy vihrevoj gidromehaniki* [Questions of vortex hydromechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 264 p.

[5] Saffman P.G. *Vortex Dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992, 311 p.

[6] Andronov P.R., Guvernyuk S.V., Dynnikova G.Ya. *Vikhrevye metody rascheta nestatsionarnykh gidrodinamicheskikh nagruzok* [Vortex methods of calculation

of nonstationary hydrodynamic loads]. Moscow, Institute of Mechanics Lomonosov MSU Publ., 2006, 184 p.

[7] Lewis R.I. *Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems*. Cambridge, Cambridge University Press, 2005, 592 p.

[8] Kuzmina K.S., Marchevskii I.K., Moreva V.S. Vortex sheet intensity computation in incompressible flow simulation around an airfoil by using vortex methods. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2018, vol. 10, iss. 3, pp. 276–287.

[9] Kocur O.S., Shcheglov G.A. Implementation of the particle strength exchange method for fragmentons to account for viscosity in vortex element method. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2018, no. 3, pp. 48–67.

[10] Dergachev S.A., Scheglov G.A. Vortex element method simulation of flow around bodies using closed vortex loops. *Civil Aviation High Technologies*, 2016, no. 223, pp. 19–27.

[11] Belotserkovskiy S.M., Nisht M.I., Kotovskiy V.N., Fedorov R.M. *Trekhmernoe otryvnoe obtekanie tel proizvolnoy formy* [Three-dimensional detached flow of the bodies of arbitrary form]. Moscow, TsAGI (Central Aerohydrodynamic Institute) Publ., 2000, 265 p.

[12] Gogish L.V., Stepanov G.Yu. *Otryvnye i kavitatsionnye techeniya. Osnovnye svoiystva i raschet modeli* [Detached and cavitational flows. Basic properties and model calculation]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 384 p.

[13] Timofeev V.N. Mathematical modeling of separated subsonic flowaround axially symmetrical bodies with base pressure. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, no. 10. Available at: http://engjournal.ru/ catalog/math-model/aero/1246.html (accessed October 17, 2017).

[14] Timofeev V.N. Construction of a semi-infinite equivalent body in mathematical modeling of subsonic separated axisymmetric flow. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 4, pp. 67–83.

[15] Rjgers D.F., Adams J.A. *Mathematical elements for computer graphics*. New-York, McGraw–Hill Science, 1989, 512 p.

[16] Dimitrienko Yu.I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor calculus]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001, 576 p.

[17] Lifanov I.K. *Metod singulyarnykh integralnykh uravneniy i chislennyy eksperiment (v matematicheskoi fizike, aerodinamike, teorii uprugosti i difraktsii voln)* [The method of singular integral equations and numerical experiment (in mathematical physics, aerodynamics, theory of elasticity and diffraction of waves)]. Moscow, LLP Yanus Publ., 1995, 520 p.

[18] Timofeev V.N. Mathematical simulation of the subsonic flow around the lengthening bodies with the flow separation in the region of ground shear with the use of an equivalent body. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1141, art. no. 012095.

[19] Timofeev V.N. Special features of vortex diagram in simulation of subsonic detached flow around the semi-infinite equivalent body. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 4, pp. 73–91.

[20] Aubakirov T.O., Belotserkovskiy S.M., Zhelannikov A.I., Nisht M.I. *Nelineinaya teoriya kryla i ee prilozheniya* [Nonlinear wing theory and its applications]. Almaty, Gylym Publ., 1997, 448 p.

[21] Timofeev V.N. Simulation of the subsonic detachable body with a bottom cut on the current pattern with an equivalent half-infinite surface at small angles of attack. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2019, no. 4, pp. 31–49.

Timofeev V.N., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 40 research and methodological papers. Research interests include mathematical modeling, computational methods, fluid mechanics, aerodynamics, optimization methods. e-mail: v_n_1951@mail.ru