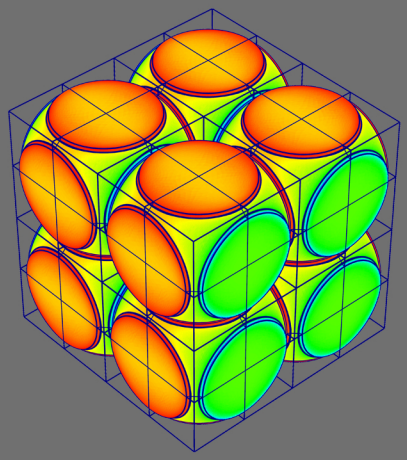
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Юрин Ю.В. Моделирование эффектив-ных упруго-пластических свойств композитов при циклическом нагружении. Ма-тематическое моделирование и численные методы, 2020, № 4, с. 3–26.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/233/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
25.11.2026 09:16:25

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2020-4-326

Моделирование эффективных упруго-пластических свойств композитов при циклическом нагружении

© Ю.И. Димитриенко, С.В. Сборщиков, Ю.В. Юрин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена методика расчета эффективных упруго-пластических свойств композитов при циклическом нагружении. Методика основана на применении метода асимптотического осреднения периодических структур для случая материалов с упруго-пластическими свойствами при циклическом нагружении. Рассмотрена модель деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина – В.В. Москвитина при циклических нагружениях с использованием модели Мазинга для изменения функции пластичности при циклическом деформировании. Сформулированы локальные задачи теории пластичности для ячейки периодичности композиционного материала, а также осредненные задачи теории анизотропной пластичности при циклическом нагружении. Разработан программный модуль для конечно-элементного решения локальных задач на ячейке периодичности. Использовано программное обеспечение комплекса SMCM, разработанного в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «Симплекс») МГТУ им. Н.Э. Баумана. Комплекс SMCM предназначен для конечно-элементного моделирования свойств композиционных материалов. Проведены численные расчеты упруго–пластических свойств дисперсно–армированных композитов на основе алюминиевого сплава и керамических частиц SiC. Расчеты показали, что разработанная методика может быть использована для прогнозирования циклических диаграмм деформирования упруго–пластических композитов в широком диапазоне условий нагружения, а также для проектирования новых композиционных материалов с заданными свойствами.

Ключевые слова: *композиты, пластичность, циклические нагружения, деформационная теория пластичности, дисперсно-армированные композиты, метод асимптотического осреднения, метод конечного элемента, численное моделирование*

Введение. В настоящее время существует большой интерес к разработке композиционных материалов на металлической матрице, называемых также металло–матричными композиционными материалами (ММКМ) [1,2]. В отличие от других типов композиционных материалов – на основе полимерных, керамических или углеродных матриц, ММКМ обладают такими уникальными свойствами как: возможностью длительной (десятки и сотни часов) эксплуатации при высоких температурах, в том числе в окислительных средах при одновременных значительных механических нагрузках, высокой ударной вязкостью, повышенной стойкостью к ударным нагрузкам, наличием значительных предельных деформаций в пластической области, а также возможностью изготовления конструкций с помощью сварки и другими свойствами. Важной особенностью ММКМ является

повышенная стойкость к циклическому нагружению, при высоком уровне нагрузок, в том числе при высоких температурах. Эти важные особенности позволяют эффективно применять ММКМ при создании элементов конструкций перспективных авиационных двигательных систем, в том числе, газотурбинных двигателей, деталей теплонагруженных конструкций авиационной, ракетно-космической, металлургической, химической промышленности.

Для расчета элементов металлических конструкций при циклическом нагружении в настоящее время применяются различные теории пластичности и вязкопластичности. Наибольшую популярность имеют деформационные теории пластичности [3–7] и различные теории течения [8, 9]. Деформационные теории, разработка которых связана с именами Г. Генки, А.Л. Надаи, А.А. Ильюшина, В.С. Ленского, В.В. Москвитина, В.С. Бондаря и другими, обладают важными преимуществами — относительной простотой при численных расчетах, которая обусловлена возможностью эффективного применения метода последовательных приближений [3], при помощи которого задача теории пластичности сводится к последовательному решению задач теории линейной упругости с изменяемым тензором модулей упругости. Несмотря на определенные ограничения, связанные с наличием теоретического обоснования применения данной теории лишь для простых (пропорциональных) нагружений, она активно применяется для расчета инженерных конструкций, особенно, когда требуется получить результаты расчета достаточно быстро для сложных конструкций, в том числе деформационная теория пластичности применяется и для расчета конструкций из композиционных материалов [10, 11], в том числе с применением метода асимптотического осреднения [9, 12–14]. Однако до настоящего времени отсутствуют работы, в которых были бы предложены методы построения определяющих соотношений деформационной теории пластичности при циклических нагружениях для композитов.

Целью настоящей работы является разработка метода построения определяющих соотношений теории анизотропной пластичности при циклических нагружениях для композиционных материалов с периодической структурой. Метод основан на применении теории асимптотического осреднения (методе асимптотической гомогенизации [9,15–19]) к периодическим структурам (композитам), подчиняющимся деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина – В.В. Москвитина [6, 20] при циклическом нагружении.

Постановка задачи деформационной теории пластичности для неоднородных сред при циклическом нагружении. Рассмотрим конструкцию, изготовленную из композиционного материала (КМ), которой в пространстве R_3 соответствует некоторая область V с поверхностью Σ. Композит обладает периодической структурой

[10, 15-17, 21-25] , и так что область V с точностью до краевых эффектов можно представить как совокупность большого числа элементарных представительных объемов — ячеек периодичности V_ξ (ЯП). Каждая ЯП V_ξ состоит из N компонент V_α, $\alpha = 1...N$: компоненты с индексами $\alpha = 1,..., N-1$ представляют собой включения различных типов (наполнители), а компонента с индексом $\alpha = N$ — это матрица. Обозначим $\Sigma_{\alpha N}$ — поверхности контакта матрицы и включений, а $\Sigma_{\xi\alpha N}$ — поверхность контакта в рамках одной ЯП V_ξ, включения полагаем не контактирующими между собой.

Включения и матрицу полагаем изотропными упруго–пластическими, соответствующими деформационной теории пластичности [3, 6]. Тогда в каждой области V_α, $\alpha = 1...N$ в декартовых ортонормированных координатах x_i, согласованных с периодической структурой КМ, имеем следующую задачу механики упруго-пластических сред [26]:

$$\begin{cases} \nabla_i \sigma_{ij} = 0, \ x_m \in V, \\ \sigma_{ij} = F_{ij}\left(\varepsilon_{kl}, x_m\right), \ x_m \in V \bigcup \Sigma, \\ 2\varepsilon_{kl} = \nabla_l u_k + \nabla_k u_l, \ x_m \in V \bigcup \Sigma, \\ \Sigma_{\alpha N}: \ \left[\sigma_{ij}\right] n_j = 0, \ \left[u_i\right] = 0, \\ \sigma_{ij} n_j\big|_{\Sigma_\sigma} = S_i(t), \ u_i\big|_{\Sigma_u} = u_{ei}(t), \end{cases} \tag{1}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, ε_{kl} — компоненты тензора малых деформаций, u_l — компоненты вектора перемещений, $\nabla_l u_k$ — частные производные по координатам x_i, n_j — компоненты вектора единичной нормали, $F_{ij}\left(\varepsilon_{kl}, x_m\right)$ — компоненты тензорного — оператора упруго–пластичности, зависящей от тензора малых деформаций, а также от цикла нагружения, ее выражение будет приведено ниже, $S_i(t)$ — компоненты вектора внешних усилий, заданные на части Σ_σ внешней поверхности композитной конструкции, $u_{ei}(t)$ — компоненты вектора внешних перемещений, заданные на части Σ_u внешней поверхности конструкции, причем $\Sigma_u \bigcup \Sigma_\sigma = \Sigma$, здесь t — время.

Положим, что функции $S_i(t)$ и $u_{ei}(t)$ являются переменными во времени и пропорциональны одной функции времени, т.е. имеет место простое (пропорциональное) нагружение

$$S_i(t) = S_i^o \chi(t),\ u_{ei}(t) = u_i^o \chi(t), \tag{2}$$

где $\chi(t)$ скалярная функция времени (функция нагружения), для которой выделим промежутки $[t_{n-1}, t_n]$ с ее возрастанием или убыванием. На каждом нечетном промежутке $[t_{n-1}, t_n]$, где $n = 2m+1$, $m = 0,1,2,\ldots$, функция $\chi(t)$ — неубывающая ($\dot{\chi}(t) \geq 0$), а на каждом четном $n-$ом промежутке, где $n = 2m$, функция $\chi(t)$ — невозрастающая ($\dot{\chi}(t) \leq 0$). Введём приращения функции нагружения на каждом промежутке $[t_{n-1}, t_n)$

$$\begin{gathered}\Delta\chi^{(n)}(t) \equiv (-1)^{n-1}\left(\chi(t) - \chi(t_{n-1})\right), \\ n = 1,2,\ldots,\ t \in [t_{n-1}, t_n).\end{gathered} \tag{3}$$

Минус выбираем таким образом, чтобы на каждом промежутке $[t_{n-1}, t_n)$ выполнялось условие

$$\Delta\dot{\chi}^{(n)}(t) \geq 0, \tag{4}$$

т.е. чтобы все приращения были неотрицательными, причем полагаем:

$$t_0 = 0,\ \chi(0) = 0,\ \Delta\chi^{(0)}(t) \equiv 0. \tag{5}$$

Тогда исходную функцию $\chi(t)$ можно представить через приращения следующим образом:

$$\begin{gathered}\chi(t) = (-1)^{n-1}\Delta\chi^{(n)}(t) + \sum_{n'=0}^{n-1}(-1)^{n'-1}\Delta\chi^{(n')}(t_{n'}), \\ t \in [t_{n-1}, t_n],\ n = 1,2,\ldots\end{gathered} \tag{6}$$

Такой способ задания функции нагружения, позволяет учитывать циклы активного нагружения (когда $\dot{\chi}(t) \geq 0$) и пассивного нагружения (разгрузки, когда $\dot{\chi}(t) \leq 0$).

Будем искать решение задачи (1) также в виде представления (6)

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = (-1)^{n-1}\Delta\sigma_{ij}^{(n)}(t) + \sum_{n'=0}^{n-1}(-1)^{n'-1}\Delta\sigma_{ij}^{(n')}(t_{n'}), \\ t \in [t_{n-1}, t_n],\ n = 1,2,\ldots\end{gathered} \tag{7}$$

или

$$\Omega = (-1)^{n-1}\,\Delta\Omega^{(n)}(t) + \sum_{n'=0}^{n-1}(-1)^{n'-1}\Delta\Omega^{(n')}(t_{n'}),$$
$$t \in [t_{n-1}, t_n],\ n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где

$$\Omega = \{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i\},\ \Omega(0) = 0,\ \Delta\Omega^{(0)}(t) \equiv 0.$$

Тогда задача (1) может быть представлена как серия n задач для отдельных промежутков $[t_{n-1}, t_n)$, на каждом из которых имеем задачи относительно приращений неизвестных функций:

$$\begin{cases} \nabla_i \Delta\sigma_{ij}^{(n)} = 0 \\ \Delta\sigma_{ij}^{(n)} = F_{ij}^{(n)}\left(\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)}, x_m\right) \\ 2\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)} = \Delta u_{k,l}^{(n)} + \Delta u_{\mathrm{l,k}}^{(n)} \\ \Delta\sigma_{ij}^{(n)}\big|_{\sum_\sigma} n_j = S_i^o \Delta\chi^{(n)}(t),\ \Delta u_i^{(n)}\big|_{\sum_u} = u_i^o \Delta\chi^{(n)}(t) \\ \sum_{\alpha N}:\ \left[\Delta\sigma_{ij}^{(n)}\right] n_j = 0,\ \left[\Delta u_i^{(n)}\right] = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь функции $F_{ij}^{(n)}$ — зависят, вообще говоря, от номера (n), так как общая зависимость $\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}, x_m)$ — является нелинейной. Задача (9) при каждом n имеет место на промежутке $[t_{n-1}, t_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Модель деформационной пластичности при циклическом нагружении. Функцию $F_{ij}^{(n)}$ зададим следующим образом. Запишем для тензоров напряжений и деформаций на каждом $n-$ом цикле нагружения их представление с помощью девиаторов [27]

$$\sigma_{ij}^{(n)} = s_{ij}^{(n)} + \frac{1}{3}\sigma^{(n)}\delta_{ij},\ e_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)} - \frac{1}{3}\varepsilon^{(n)}\delta_{ij}, \tag{10}$$

где $s_{ij}^{(n)}$, $e_{ij}^{(n)}$ — девиаторы, а $\sigma^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$ — шаровые части тензоров

$$\sigma^{(n)} = \sigma_{kk}^{(n)},\ \varepsilon^{(n)} = \varepsilon_{kk}^{(n)}. \tag{11}$$

Аналогичные представления имеют место для приращений

$$\Delta\sigma_{ij}^{(n)} = \Delta s_{ij}^{(n)} + \frac{1}{3}\Delta\sigma^{(n)}\delta_{ij},\quad \Delta e_{ij}^{(n)} = \Delta\varepsilon_{ij}^{(n)} - \frac{1}{3}\Delta\varepsilon^{(n)}\delta_{ij}$$
$$\Delta\sigma^{(n)} = \Delta\sigma_{kk}^{(n)},\ \Delta\varepsilon^{(n)} = \Delta\varepsilon_{kk}^{(n)},\ n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Тогда, согласно общей деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина – В.В. Москвитина [6], для каждого $n-$го цикла нагружения изотропных сред примем следующие определяющие соотношения пластичности

$$\begin{gathered}\Delta s_{ij}^{(n)} = \frac{\sigma_u^{(n)}}{\varepsilon_u^{(n)}} \Delta e_{ij}^{(n)}, \\ \Delta\sigma^{(n)} = 3K\Delta\varepsilon^{(n)}, \quad n = 1,2,\ldots, \\ \sigma_u^{(n)} = \Phi^{(n)}\left(\varepsilon_u^{(n)}\right),\end{gathered} \tag{13}$$

где обозначены $\sigma_u^{(n)}$, $\varepsilon_u^{(n)}$ — вторые инварианты (интенсивности) [27] приращений тензоров напряжений и деформаций

$$\begin{gathered}3\sigma_u^{(n)2} = \left(\Delta\sigma_{11}^{(n)} - \Delta\sigma_{22}^{(n)}\right)^2 + \left(\Delta\sigma_{22}^{(n)} - \Delta\sigma_{33}^{(n)}\right)^2 + \left(\Delta\sigma_{11}^{(n)} - \Delta\sigma_{33}^{(n)}\right)^2 + \\ +6\left(\Delta\sigma_{12}^{(n)2} + \Delta\sigma_{13}^{(n)2} + \Delta\sigma_{23}^{(n)2}\right), \\ 3\varepsilon_u^{(n)2} = \left(\Delta\varepsilon_{11}^{(n)} - \Delta\varepsilon_{22}^{(n)}\right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_{22}^{(n)} - \Delta\varepsilon_{33}^{(n)}\right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_{11}^{(n)} - \Delta\varepsilon_{33}^{(n)}\right)^2 + \\ +6\left(\Delta\varepsilon_{12}^{(n)2} + \Delta\varepsilon_{13}^{(n)2} + \Delta\varepsilon_{23}^{(n)2}\right).\end{gathered} \tag{14}$$

Соотношения между первыми инвариантами $\Delta\sigma^{(n)} = \Delta\sigma_{kk}^{(n)}$, $\Delta\varepsilon^{(n)} = \Delta\varepsilon_{kk}^{(n)}$ приращений тензоров напряжений и деформаций полагаются линейно-упругими, согласно классическим положениям деформационной теории пластичности [3, 4, 6], K — модуль объемного сжатия.

Функции пластичности $\Phi^{(n)}\left(\varepsilon_u^{(n)}\right)$ в каждом цикле построим согласно модели Мазинга [6, 20]

$$\begin{gathered}\sigma_u^{(1)} = \Phi\left(\varepsilon_u^{(1)}\right), \\ \sigma_u^{(n)} = \alpha_n \Phi\left(\frac{\varepsilon_u^{(n)}}{\alpha_n}\right), \; n = 2,3,\ldots, \\ \alpha_n = \alpha_0 \left(n-1\right)^{\gamma},\end{gathered} \tag{15}$$

где α_0, $\gamma = \text{const}$ — масштабные коэффициенты, а $\Phi\left(\varepsilon_u^{(1)}\right)$ — функция пластичности на 1-м цикле нагружения, она задаётся в следующем виде

$$\sigma_u^{(1)} = \Phi\left(\varepsilon_u^{(1)}\right) \equiv 2G\left(1-\omega\left(\varepsilon_u^{(1)}\right)\right)\varepsilon_u^{(1)}, \tag{16}$$

где $\omega\left(\varepsilon_u^{(1)}\right)$ — функция пластичности А.А. Ильюшина, которую выбираем в виде

$$\omega\left(\varepsilon_u^{(1)}\right)=\begin{cases}0,\ \varepsilon_u^{(1)}<\varepsilon_s\\ \omega_0\left(1-\exp\left(-b\left(\dfrac{\varepsilon_u^{(1)}}{\varepsilon_s}-1\right)^2\right)\right),\ \varepsilon_u^{(1)}>\varepsilon_s.\end{cases} \tag{17}$$

Здесь ε_s — деформация начала пластичности, ω_0, b — константы, характеризующие упрочнение при пластичности, G — модуль сдвига.

Подставляя (15) в (13), а затем в (12), определяющие соотношения на n-ом цикле запишем в следующем виде

$$\Delta\sigma_{ij}^{(n)}=F_{ij}^{(n)}(\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)})\equiv C_{ijkl}\left(\omega\left(\frac{\varepsilon_u^{(n)}}{\alpha_n}\right)\right)\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)}, \tag{18}$$

где обозначены компоненты приведенного тензора модулей упругости

$$C_{ijkl}\left(\omega\left(\frac{\varepsilon_u^{(n)}}{\alpha_n}\right)\right)=(K-\frac{2}{3}G^{(n)})\delta_{ij}\delta_{kl}+G^{(n)}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right), \tag{19}$$

который зависит от пластических деформаций, где

$$G^{(n)}=G\left(1-\omega\left(\frac{\varepsilon_u^{(n)}}{\alpha_n}\right)\right) \tag{20}$$

— переменный модуль сдвига в $n-$ом цикле.

Появление делителей α_n приводит к изменению предела текучести $\varepsilon_s^{(n)}$ в $n-$ом цикле

$$\begin{gathered}n=1:\ \varepsilon_u^{(1)}=\varepsilon_s\Rightarrow\sigma_s^{(1)}=2G\varepsilon_s,\\ n=2:\ \frac{\varepsilon_u^{(2)}}{\alpha_n}=\varepsilon_s\Rightarrow\sigma_s^{(2)}=2G\alpha_2\varepsilon_s\end{gathered} \tag{21}$$

и т.д.

Поскольку в задаче композит рассматривается как неоднородная среда, то все коэффициенты, характеризующие упруго–пластические свойства компонентов, рассматриваются как функции координат

$$\begin{gathered}\Omega=\Omega(x_m),\\ \Omega=\{G,\ K,\ \varepsilon_s,\ \omega_0,\ b,\ a_0,\ \gamma\}.\end{gathered} \tag{22}$$

Осуществим линеаризацию определяющих соотношений (18), а затем подставим их в систему уравнений (9), в результате получим следующую последовательность задач

$$\begin{cases} \nabla_i \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}} = 0 \\ \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}} = C_{ijkl}^{(n)} \left(\omega\left(\dfrac{\varepsilon_u^{(n)\{m-1\}}}{\alpha_n} \right) \right) \Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}} \\ 2\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m-1\}} = \nabla_l \Delta u_k^{(n)\{m\}} + \nabla_k \Delta u_l^{(n)\{m\}} \\ \sum_{\alpha N} : \ \left[\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}} \right] n_j = 0, \ \left[\Delta u_i^{(n)\{m\}} \right] = 0 \\ \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}} \Big|_{\sum_\sigma} n_j = S_i^o \Delta\chi^{(n)}(t_m), \ \ \Delta u_i^{(n)\{m\}} \Big|_{\sum_u} = u_i^o \Delta\chi^{(n)}(t_m), \end{cases} \tag{23}$$

где m — номер итерации.

Применение метода асимптотического осреднения. В силу периодичности структуры композита, можно ввести малый параметр $æ$ и локальные координаты ξ_i

$$æ = \frac{l}{L} << 1, \ \ \xi_i = \frac{\overline{x}_i}{æ}, \ \ \overline{x}_i = \frac{x_i}{L}, \tag{24}$$

где l — характерный размер ЯП V_ξ, а L — диаметр области V.

Согласно методу асимптотического осреднения [10, 21, 25] для композита решение задачи (23) ищем в виде асимптотического разложения по параметру $æ$

$$\begin{aligned} \Delta u_i^{(n)\{m\}} = \Delta u_i^{(n)\{m\}(0)}\left(\overline{x}_i, t\right) + æ\Delta u_i^{(n)\{m\}(1)}\left(\overline{x}_i, \xi_j, t\right) + \\ + æ^2 \Delta u_i^{(n)\{m\}(2)}\left(\overline{x}_i, \xi_j, t\right) + \ldots \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь и далее все функции вида $\Delta u_i^{(n)\{m\}(1)}\left(\overline{x}_i, \xi_j, t\right)$ предполагаются периодическим по координатам ξ_j и медленно-меняющимися по $\overline{x}_i$ по ЯП V_ξ, поэтому областью определения функций (25) является декартово произведение множеств $\overline{V} \times V_\xi \times [0, t_{\max}]$, где $\overline{V}$ — область, соответствующая всей композитной конструкции в безразмерных координатах $\overline{x}_i$. Функции вида $\Delta u_i^{(n)\{m\}(s)}\left(\overline{x}_i, \xi_j, t\right)$ дифференцируются по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}_i} \to \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i} + \frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial \overline{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i} + \frac{1}{æ}\frac{\partial}{\partial \xi_i}. \tag{26}$$

Введем обозначения для производных

$$\frac{\partial}{\overline{x}_k}\Delta u_i^{(n)\{m\}(s)} = \Delta u_{i,k}^{(n)\{m\}(s)},\ \frac{\partial}{\xi_k}\Delta u_i^{(n)\{m\}(s)} = \Delta u_{i|k}^{(n)\{m\}(s)}. \tag{27}$$

Тогда, подставляя разложение (25) в соотношения Коши и определяющие соотношения задачи (23), получаем асимптотические разложения для приращений деформаций ε_{ij}, перемещения u_i и напряжения σ_{ij} рассматриваются как квазипериодические функции

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{(n)\{m\}} = \sum_{s=0}^{\infty} æ^n \Delta\varepsilon_{ij}^{(n)\{m\}(s)},\ \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}} = \sum_{s=0}^{\infty} æ^n \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)}. \tag{28}$$

Здесь обозначены

$$\begin{aligned} 2\Delta\varepsilon_{kl}{}^{(n)\{m\}(s)} &= \Delta u_{k,l}{}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta u_{l.k}{}^{(n)\{m\}(s)} + \\ &+\Delta u_{k|l}{}^{(n)\{m\}(s+1)} + \Delta u_{l|k}{}^{(n)\{m\}(s+1)}, \end{aligned} \tag{29}$$

а также

$$\Delta\sigma_{ij}{}^{(n)\{m\}(s)} = \sum_{s'=0}^{s} C_{ijkl}{}^{(n)\{m-1\}(s-s')}\Delta\varepsilon_{kl}{}^{(n)\{m\}(s')}, \tag{30}$$

где $C_{ijkl}{}^{(n)\{m-1\}(s-s')}$ — тензоры приведенных модулей упругости, полученные при разложении тензоров $C_{ijkl}{}^{(n)}\left(\omega\left(\frac{\varepsilon_u{}^{(n)\{m-1\}}}{\alpha_n}\right)\right)$ в асимптотический ряд, после подстановки в качестве аргумента ряда (28). Выпишем главный член этого разложения

$$\Delta\sigma_{ij}{}^{(n)\{m\}(0)} = C_{ijkl}{}^{(n)\{m-1\}(0)}\Delta\varepsilon_{kl}{}^{(n)\{m\}(0)}, \tag{31}$$

$$C_{ijkl}{}^{(n)\{m-1\}(0)} = C_{ijkl}{}^{(n)}\left(\omega\left(\frac{\varepsilon_u{}^{(n)\{m-1\}(0)}}{\alpha_n}\right)\right). \tag{32}$$

Подставляя (28) в уравнение равновесия системы (23), получаем:

$$æ^{-1}\Delta\sigma_{ij|j}{}^{(n)\{m\}(0)} + \sum_{s=0}^{\infty} æ^n(\Delta\sigma_{ij,j}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta\sigma_{ij|j}^{(n)\{m\}(s+1)}) = 0. \tag{33}$$

Приравнивая члены при $æ^{-1}$ к нулю, а при остальных $æ^n$ - к некоторым постоянным величинам $h_i^{(n)\{m\}(s)}$, получаем следующее разложение уравнения (33)

$$\sum_{s=0}^{\infty} æ^n h_i^{(n)\{m\}(s)} = 0, \tag{34}$$

а также следующие соотношения (локальные уравнения равновесия)

$$\Delta\sigma_{ij|j}^{(n)\{m\}(0)} = 0, \ \ s = 0, \tag{35}$$

$$\Delta\sigma_{ij,j}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta\sigma_{ij|j}^{(n)\{m\}(s+1)} = h_i^{(n)\{m\}(s)}, \ \ s = 1,2,3,... \tag{36}$$

Подстановка разложений (25) и (28) в граничные условия и условия контакта в ЯП, приводит к следующим соотношениям для каждого члена асимптотического ряда

$$\sum_{\alpha N} : \ \left[\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)}\right] n_j = 0, \ \left[\Delta u_i^{(n)\{m\}(s+1)}\right] = 0. \tag{37}$$

Локальные задачи на ячейке периодичности. Введем условия периодичности для основных функций

$$\begin{gathered} [[\Omega]]_\alpha = \Omega\big|_{\xi_\alpha = 1/2} - \Omega\big|_{\xi_\alpha = -1/2} = 0, \\ \Omega = \left\{\Delta u_i^{(n)\{m\}(s)}, \ \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)}, \ \Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(s)}\right\}, \end{gathered} \tag{38}$$

а также введем операцию осреднения по ЯП

$$< \Omega >= \int\limits_{V_\xi} \Omega dV_\xi. \tag{39}$$

Собирая в уравнениях (29), (30), (35)–(37) члены при одинаковых степенях от малого параметра, получаем следующие локальные задачи

$$\begin{gathered} \Delta\sigma_{ij|j}^{(n)\{m\}(0)} = 0, \\ \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)} = C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)}, \\ 2\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)} = 2\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} + \Delta u_{k|l}^{(n)\{m\}(1)} + \Delta u_{l|k}^{(n)\{m\}(1)}, \\ \sum_{\alpha N} : \ \left[\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)}\right] n_j = 0, \ \left[\Delta u_i^{(n)\{m\}(1)}\right] = 0, \\ \left[\left[\Delta u_k^{(n)\{m\}(1)}\right]\right]_\alpha = 0, \ \left[\left[\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)}\right]\right]_\alpha = 0, \\ \left\langle \Delta u_k^{(n)\{m\}(1)} \right\rangle = 0 \end{gathered} \tag{40}$$

— локальную задачу нулевого приближения, где обозначены осредненные приращения деформаций

$$2\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} = \Delta u_{k,l}^{(n)\{m\}(0)} + \Delta u_{l,k}^{(n)\{m\}(0)}, \tag{41}$$

а также

$$\Delta\sigma_{ij,j}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta\sigma_{ij|j}^{(n)\{m\}(s+1)} = h_i^{(n)\{m\}(s)},$$

$$\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)} = \sum_{s'=0}^{s} C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(s-s')} \Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(s')},$$

$$2\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(s)} = \Delta u_{k,l}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta u_{l.k}^{(n)\{m\}(s)} +$$

$$+\Delta u_{k|l}^{(n)\{m\}(s+1)} + \Delta u_{l|k}^{(n)\{m\}(s+1)}, \qquad (42)$$

$$\sum_{\alpha N} : \left[\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)}\right] n_j = 0, \ \left[\Delta u_i^{(n)\{m\}(s+1)}\right] = 0,$$

$$\left[\left[\Delta u_k^{(n)\{m\}(s+1)}\right]\right]_\alpha = 0, \ \left[\left[\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)}\right]\right]_\alpha = 0,$$

$$\left\langle \Delta u_k^{(n)\{m\}(s+1)} \right\rangle = 0, \ s = 1,2,3,....$$

— локальную задачу циклического пластического деформирования в $s-$ом приближении.

В формулировки локальных задач входят условия нормировки:

$$< \Delta u_k^{(n)\{m\}(s+1)} >= 0.$$

Решение задачи (40) ищется относительно функций $\Delta u_i^{(n)\{m\}(1)}$, а задачи (42) — относительно функций $\Delta u_i^{(n)\{m\}(s+1)}$.

Осредненные уравнения. Из условия существования единственного решения локальных задач (42) на ЯП находим выражения для функций $h_i^{(n)\{m\}(s)}$

$$h_i^{(n)\{m\}(s)} = \left\langle \Delta\sigma_{ij,j}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta\sigma_{ij|j}^{(n)\{m\}(s+1)} \right\rangle, \ s = 0,1,2,3,... \qquad (43)$$

Откуда, в силу периодичности функций $\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)}$, получаем

$$h_i^{(n)\{m\}(s)} = \left\langle \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)} \right\rangle_{,j}, \ h_i^{(n)\{m\}(s)} = \left\langle \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)} \right\rangle_{,j}. \qquad (44)$$

Если подставить выражения (44) в уравнение (34), получаем

$$\sum_{s=0}^{\infty} æ^n \left\langle \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)} \right\rangle_{,j} = 0 \qquad (45)$$

— осредненные уравнения равновесия для циклического деформирования КМ.

Введем обозначение для осредненных напряжений

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \sum_{s=0}^{\infty} æ^n \left\langle \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)} \right\rangle. \qquad (46)$$

Тогда уравнения (45) можно записать следующим образом:

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij,j}^{(n)\{m\}} = 0. \tag{47}$$

Удерживая в формуле (46) только главные члены, получаем

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \left\langle \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)} \right\rangle. \tag{48}$$

Подставим в эту формулу соотношения (31)

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \left\langle C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)} \right\rangle, \tag{49}$$

а приращения деформаций $\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)}$ выразим по соотношениям Коши из системы (40)

$$2\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)} = 2\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} + \Delta u_{k|l}^{(n)\{m\}(1)} + \Delta u_{l|k}^{(n)\{m\}(1)} \tag{50}$$

и подставим в соотношение (49), тогда получим осредненные определяющие соотношения КМ

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \left\langle C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \right\rangle \Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} + \left\langle C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \Delta u_{k|l}^{(n)\{m\}(1)} \right\rangle. \tag{51}$$

Поскольку задача (40) на ячейке периодичности является линейной, то ее решение линейно зависит от входных данных — функций $\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}$. Тогда ее решение относительно приращений перемещений $\Delta u_{k}^{(n)\{m\}(1)}$ можно представить в символическом виде:

$$\Delta u_{i}^{(n)\{m\}(1)} = N_{ikl}^{(n)\{m-1\}}(\xi_s)\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}, \tag{52}$$

где $N_{ikl}^{(n)\{m-1\}}(\xi_s)$ — некоторые функции локальных координат, определяемые из решения задачи (40) на ЯП. Тогда, подставляя соотношения (52) в (51), получаем эффективные упруго–пластические определяющие соотношения композита:

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}}\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}, \tag{53}$$

где:

$$\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} = \left\langle C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \right\rangle + \left\langle C_{ijmp}^{(n)\{m-1\}(0)} N_{mpk|l}^{(n)\{m-1\}} \right\rangle \tag{54}$$

— эффективные приведенные модули упругости композита для каждого $n-$го цикла нагружения.

К системе (47), (53) присоединяются осредненные соотношения Коши

$$2\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} = \Delta u_{k,l}^{(n)\{m\}(0)} + \Delta u_{l.k}^{(n)\{m\}(0)}. \tag{55}$$

И осредненные граничные условия для всей области КМ:

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}}\Big|_{\sum_\sigma} n_j = S_i^o \Delta\chi^{(n)}(t_m),\ \ \Delta u_i^{(n)\{m\}(0)}\Big|_{\sum_u} = u_i^o \Delta\chi^{(n)}(t_m). \qquad (56)$$

В результате получили постановку осредненной задачи циклического пластического деформирования КМ для N – го цикла нагружения – разгрузки. Решением этой задачи являются приращения перемещений $\Delta u_k^{(n)\{m\}(0)}$.

Решение локальной задачи нулевого приближения. Задача (40) содержит 6 функций $\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}$ — входных данных. Будем искать решение задачи (40) в виде сумм по этим функциям:

$$\Delta u_k^{(n)\{m\}(1)} = \sum_{p,q}^{3} \Delta u_{k(pq)}^{(n)\{m\}}, \qquad (57)$$

где $\Delta u_{k(pq)}^{(n)\{m\}}$ — имеют следующий вид:

$$\Delta u_{i(pq)}^{(n)\{m\}} = -\frac{1}{2}\Delta\bar{\varepsilon}_{pq}^{(n)\{m\}}\left(\delta_{ip}\xi_q + \delta_{iq}\xi_p\right) + U_{i(pq)}(\xi_s). \qquad (58)$$

Подставляя выражения (57), (58) в систему (40), получим, что приращения деформаций $\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)}$ и $\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)}$ также можно представить в виде сумм

$$\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)} = \sum_{p,q=1}^{3} \Delta\varepsilon_{kl(pq)}^{(n)\{m\}},\ \ \Delta\sigma_{kl}^{(n)\{m\}(0)} = \sum_{p,q=1}^{3} \Delta\sigma_{kl(pq)}^{(n)\{m\}}. \qquad (59)$$

Для функции $U_{i(pq)}$ из (40) получаем следующую задачу L_{pq} на 1/8 ЯП

$$\begin{gathered}
\Delta\sigma_{ij(pq)/j}^{(n)\{m\}} = 0, \\
\Delta\sigma_{ij(pq)}^{(n)\{m\}} = C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \Delta\varepsilon_{kl(pq)}^{(n)\{m\}}, \\
2\Delta\varepsilon_{kl(pq)}^{(n)\{m\}} = U_{k(pq)|l} + U_{l(pq)|k}, \\
\sum_{\alpha N}:\ \left[\Delta\sigma_{ij(pq)}^{(n)\{m\}}\right] n_j = 0,\ \left[U_{l(pq)}\right] = 0.
\end{gathered} \qquad (60)$$

Граничные условия на поверхностях 1/8 ЯП имеют следующий вид.

Для задач L_{pq} на гранях $\Sigma'_p = \{\xi_p = 0,5\}$ 1/8 ЯП задаются:

$$U_{p(pp)} = (1/2)\Delta\bar{\varepsilon}_{pp}^{(n)\{m\}},\ \ S_{ip(pp)} = 0,\ \ p = 1,2,3,\ i \neq p,\ \ i = 1,2,3. \qquad (61)$$

На гранях $\Sigma_p = \{\xi_p = 0\}$ задаются аналогичные нулевые условия

$$U_{p(pp)} = 0,\ S_{ip(pp)} = 0. \tag{62}$$

На остальных гранях 1/8 ЯП также задаются нулевые условия вида скольжения. Здесь обозначены: $S_{ik(pq)} = \Delta\sigma^{(n)\{m\}}_{ik(pq)}\Big|_{\Sigma_k}$, $i \neq k$ — касательные компоненты приращений вектора напряжений $\Delta\sigma^{(n)\{m\}}_{ik(pq)} n_k$ на гранях Σ_k.

Для задач L_{pq} ($p \neq q$) на гранях Σ'_p и Σ_p заданы следующие граничные условия:

$$\begin{gathered} U_{i(pq)} = 0,\ S_{pp(pq)} = 0,\ U_{q(pq)} = 0, \\ p = 1,2,3,\ i \neq q \neq p \neq i,\ i,p,q = 1,2,3. \end{gathered} \tag{63}$$

На гранях Σ'_q заданы условия

$$U_{q(pq)} = \frac{1}{4}\Delta\overline{\varepsilon}^{(n)\{m\}}_{pq},\ S_{qq(pq)} = 0,\ U_{i(pq)} = 0. \tag{64}$$

На остальных гранях заданы условия, аналогичные (63).

Вывод граничных условий (61)–(64) осуществляется методом, предложенным в работах [12, 21].

Граничные условия (61)–(64) позволяют продолжить решение во всю ЯП таким образом, что будет удовлетворяться условие нормировки $\left\langle \Delta u_k^{(n)\{m\}(s+1)} \right\rangle = 0$.

Расчёт эффективных упруго–пластических характеристик КМ. Задачи L_{pq} (60)–(64) являются линейными и зависят от приращений средних деформаций $\Delta\overline{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}$. Тогда можно ввести следующие тензоры

$$\overline{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} = \frac{\left\langle \Delta\sigma^{(n)\{m-1)}_{ij(pq)} \right\rangle}{\Delta\overline{\varepsilon}_{pq}^{(n)\{m-1\}}}, \tag{65}$$

где обозначены средние значения приращений напряжений в ЯП

$$\left\langle \Delta\sigma^{(n)\{m\}}_{ij(pq)} \right\rangle = \int\limits_{V_\xi} \Delta\sigma^{(n)\{m\}}_{ij(pq)} dV_\xi. \tag{66}$$

Выражая из (65) средние напряжения и подставляя их в осредненные соотношения (59), получаем

$$\left\langle \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{3} \left\langle \Delta\sigma^{(n)\{m\}}_{ij(pq)} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{3} \overline{C}^{(n)\{m\}}_{ijpq} \Delta\overline{\varepsilon}^{(n)\{m\}}_{pq}. \tag{67}$$

Подставляя (67) в (48), получаем эффективные определяющие соотношения для КМ

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} \Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}. \qquad (68)$$

Таким образом, формула (65) дает выражение для тензора приведенных эффективных модулей упругости композита.

Разработанный алгоритм может быть применен для численного моделирования композита при различных вариантах нагружения, т.е. при различных комбинациях ненулевых компонент тензора $\Delta\bar{\varepsilon}_{pq}^{(n)\{m\}}$. Для каждого такого процесса нагружения вычисляется тензор $\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}}$ по формуле (65), определяются средние приращения напряжений $\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}}$, и строятся диаграммы циклического деформирования деформирования $\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}}(\Delta\bar{\varepsilon}_{pq}^{(n)\{m\}})$, описываемые соотношением (68).

Результаты численного моделирования. Для численного решения локальных задач L_{pq} использовался метод конечного элемента [12, 21], который был реализован как составная часть программного комплекса SMCM, разработанного в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «Симплекс») МГТУ им. Н.Э. Баумана [28, 29]. Комплекс SMCM позволяет проводить полный цикл конечно-элементного моделирования : от создания типовых 3D геометрий микроструктур ЯП композитов, построения КЭ сеток, до непосредственного решения задач L_{pq} и визуализации результатов расчетов.

Численные расчеты проводились для дисперсно-армированных композиционных материалов (ДАКМ), 1/8 ЯП которых изображена на рис. 1. Матрица была упруго-пластической с характеристиками, соответствующими алюминиевому сплаву типа Д16Т [20]: модуль Юнга $E = 70\,\text{ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$, модуль сдвига $G = 30\,\text{ГПа}$, $\omega_0 = 0,96$, $\varepsilon_s = 0,0045$, $b = 2,34$, $\alpha_0 = 2,02$, $\chi = 0,03$.

В качестве наполнителя рассматривались частицы керамики SiC с характеристиками: модуль Юнга $E = 350$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$. Наполнитель считался упругим.

На рис. 1 показан график изменения функции нагружения $\chi(t)$ для случая 4-х циклов нагружения – разгрузки. На рис. 2 показана единая диаграмма циклического деформирования $\bar{\sigma}_{11} = F_{11}(\bar{\varepsilon}_{11})$ ДАКМ Al/SiC для случая 4-х циклов одноосного нагружения: нагрузки. Единая диаграмма циклического деформирования построена с помощью представлений типа (7), примененных для средних напряжений и деформаций

$$\bar{\sigma}_{ij} = (-1)^{n-1}\,\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)}(t) + \sum_{n'=0}^{n-1}(-1)^{n'-1}\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n')}(t_{n'}),$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = (-1)^{n-1}\,\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}(t) + \sum_{n'=0}^{n-1}(-1)^{n'-1}\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n')}(t_{n'}),$$

где приращения средних напряжений и деформаций связаны на $n-$ом цикле определяющими соотношениями

$$\Delta\bar{\sigma}_{11}^{(n)} = F_{11}(\Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)}),$$

которые восстанавливаются с помощью итерационных определяющих соотношений (68) композита.

На рис. 3 показана единая диаграмма циклического деформирования $\bar{\sigma}_{13} = F_{13}(\bar{\varepsilon}_{13})$ ДАКМ Al/SiC для случая 4-х циклов одноосного сдвигового деформирования.

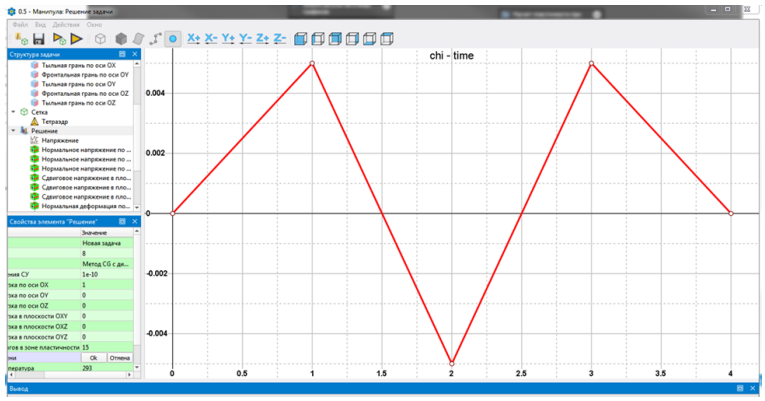


Рис. 1. Окно ПК SMCM, показывающее график изменения функции нагружения $\chi(t)$ для случая 4-х циклов нагружения – разгрузки (время t (с))

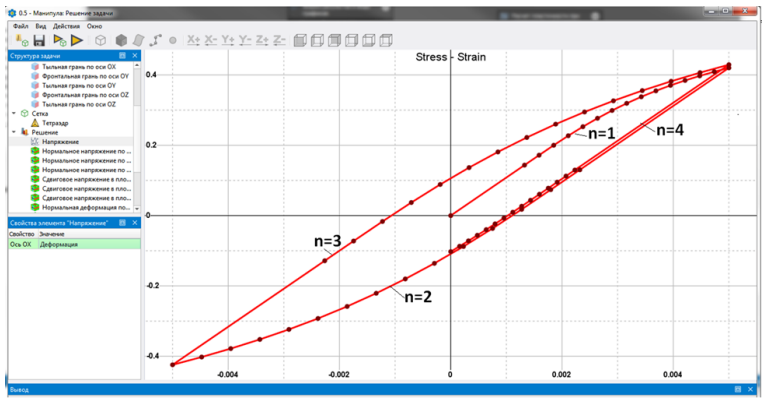


Рис. 2. Окно ПК SMCM, показывающее единую диаграмму циклического деформирования $\bar{\sigma}_{11} = F_{11}(\bar{\varepsilon}_{11})$ ДАКМ Al/SiC для случая 4-х циклов одноосного растяжения – сжатия: (циклы нагружения $n=1$, $n=3$ и циклы разгрузки $n=2,\ 4$) (напряжения $\Delta\bar{\sigma}_{11}^{(n)}$, ГПа)

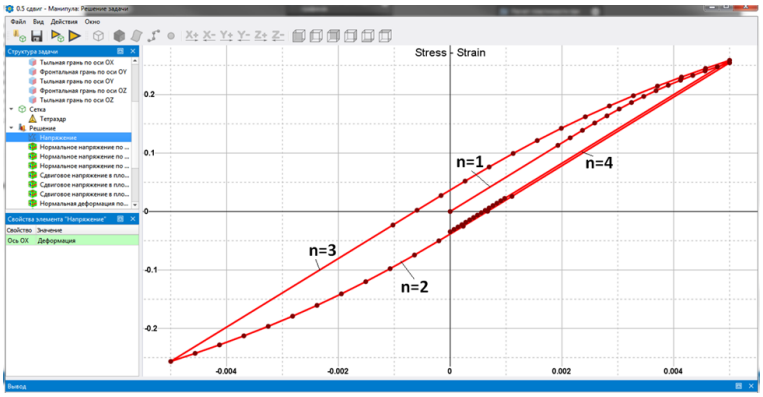
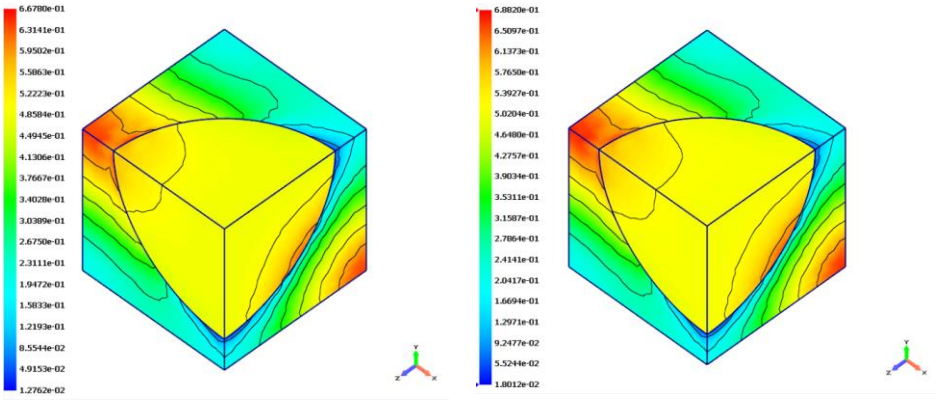


Рис. 3. Окно ПК SMCM, показывающее единую диаграмму циклического деформирования $\bar{\sigma}_{13} = F_{13}(\bar{\varepsilon}_{13})$ ДАКМ Al/SiC для случая 4-х циклов сдвигового деформирования: (циклы нагружения $n=1$, $n=3$ и циклы разгрузки $n=2,\ 4$) (напряжения $\Delta\bar{\sigma}_{13}^{(n)}$, ГПа)

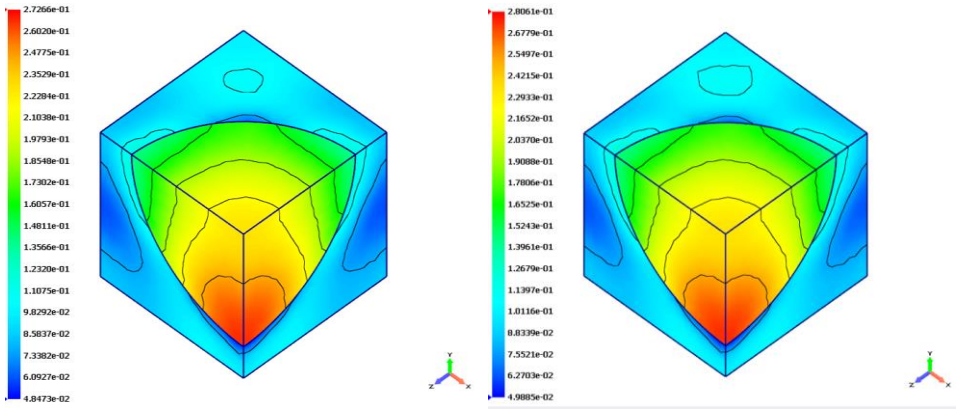
На рисунках 4 и 5 показаны результаты решения задач L_{pq} —при активном нагружении в 1–м цикле нагружения при максимальном значении напряжений и в 15–м цикле нагружения (для случаев $n=1$ и $n=15$). С увеличением числа циклов происходит возрастание значений полей микронапряжений $\Delta\sigma_{11(11)}^{(n)}$, характер распределения самих напряжений при этом не меняется. Максимальные значения микронапряжений $\Delta\sigma_{11(11)}^{(n)}$ возникают в матрице, в наиболее узкой зоне между керамическими частицами.



а *б*

Рис. 4. Поля микронапряжений $\Delta\sigma_{11(11)}^{(n)}$ (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1–м (*а*) и 15–м цикле (*б*) нагружения ДАКМ Al/SiC

Аналогичная картина изменения полей микронапряжений $\Delta\sigma_{13(13)}^{(n)}$ наблюдается и при циклическом сдвиге (рис. 5).



а *б*

Рис. 5. Поля микронапряжений $\Delta\sigma^{(n)}_{13(13)}$ (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1–м (*а*) и 15–м цикле (*б*) нагружения ДАКМ Al/SiC

Заключение. Предложена теория расчета упруго–пластического деформирования композиционных материалов при циклическом нагружении, основанная на применении метода асимптотического осреднения периодических структур и использовании деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина – В.В. Москвитина с моделью Мазинга для циклического изменения функции пластичности.

Предложен алгоритм построения эффективных упруго–пластических соотношений композитов при циклических нагружениях, включая циклы нагружения и разгрузки. Алгоритм основан на конечно-элементном решении локальных задач на ЯП, для этой цели используется ПК SMCM, разработанный в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «Симплекс») МГТУ им. Н.Э. Баумана

Приведены численные примеры расчетов циклических диаграмм деформирования для дисперсно–армированных композитов на основе матрицы из алюминиевого сплава типа Д16Т и керамических частиц SiC. Тестовые расчеты показали, что разработанная модель и численный алгоритм позволяют успешно проводить моделирование эффективных упруго - пластических диаграмм деформирования композитов при большом числе циклов нагружения, с учетом этапов нагружения и разгрузки, что позволяет использовать созданный программный модуль ПК SMCM для прогнозирования упруго–пластических свойств синтезируемых композитов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mileiko S.T. Oxide-fibre/Ni–based matrix composites–III: A creep model and analysis of experimental data. *Composites Science and Technology*, 2002, vol. 62, iss. 2, pp. 195–204.

[2] Rawal S. Metal–matrix composites for space applications. *JOM*, vol. 53, no. 4, pp. 14–17.

[3] Ильюшин А.А. *Пластичность. Упруго–пластические деформации*. Москва, УРСС, 2018, 392 с.

[4] Ильюшин А.А. *Пластичность: основы общей математической теории*. Москва, УРСС, 2020, 272 с.

[5] Ильюшин А.А., Ленский В.В. *Сопротивление материалов*. Москва, Физматгиз, 1959, 372 с.

[6] Москвитин В.В. *Циклические нагружения элементов конструкций*. Москва, УРСС, 2019, 344 с.

[7] Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. *Пропорциональные и непропорциональные нагружения.* Москва, Физматлит, 2008, 176 с.

[8] Адамс Д.Ф. *Упругопластическое поведение композитов. Композиционные материалы. Т. 2: Механика композиционных материалов*. Москва, Мир, 1978, с. 196–241.

[9] Nguyen B.N., Bapanapalli S.K., Kunc V., Phelps J.H., Tucker C.L. Prediction of the elastic-plastic stress. strain response for injection-molded long-fiber thermoplastics. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 217–246.

[10] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 324 с.

[11] Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов*. Москва, Наука, 1997, 288 с.

[12] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.

[13] Димитриенко Ю.И., Луценко А.Н., Губарева Е.А., Орешко Е.И., Базылева О.А., Сборщиков С.В. Расчет механических характеристик жаропрочных интерметаллидных сплавов на основе никеля методом многомасштабного моделирования. *Авиационные материалы и технологии*, 2016, № 3, с. 33–48.

[14] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2, с. 3–23.

[15] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[16] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984, 352 с.

[17] Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984, 472 с.

[18] Manevich L.I., Andrianov I.V., Oshmyan V.G. *Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures*. Springer–Verlag, 2002, 276 p.

[19] Khdir Y.K., Kanit T., Zaïri F., Naït-Abdelaziz M. Computational homogenization of elastic-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2829–2835.

[20] Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций*. Москва, Физматлит, 2005, 576 с.

[21] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 2, с. 95–108.

[22] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 28–48.

[23] Димитриенко Ю.И. Метод многоуровневой гомогенизации иерархических периодических структур. *Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 1, с. 58–73.

[24] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Simulation of local transfer in periodic porous media. *European Journal of Mechanics — B/Fluids*, 2013, vol. 37, pp. 174–179.

[25] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220.

[26] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[27] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. Москва, Высшая школа, 2001, 575 с.

[28] Свидетельство № 2019666176 *Программа NonlinearEl_Disp_Manipula для прогнозирования диаграмм нелинейно-упругого деформирования дисперсно-армированных композитов при малых деформациях на основе конечно-элементного решения 3D локальных задач микромеханики*: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин, С.В. Сборщиков, И.О. Богданов; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана — № 2019665098; заявл. 26.11.2019; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 05.12.2019 — [1].

[29] Свидетельство № 2019666172 *Программа StrengthCom SMCM для конечно-элементного расчета прочностных характеристик композитных материалов со сложной структурой с учетом накопления микроповреждений и кинетики мезоскопических дефектов*: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, Ю.В. Юрин, С.В. Сборщиков, И.О. Богданов; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана – № 2019665109; заявл. 26.11.2019; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 05.12.2019. – [1].

Статья поступила в редакцию 23.09.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Юрин Ю.В. Моделирование эффективных упруго–пластических свойств композитов при циклическом нагружении. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 4, с. 3–26.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Сборщиков Сергей Васильевич — научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: servasbor@gmail.com

Юрин Юрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Modeling of effective elastic–plastic properties of composites under cyclic loading

© Yu.I. Dimitrienko, S.V. Sborschikov, Yu.V. Yurin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

A method is proposed for calculating the effective elastic–plastic properties of composites under cyclic loading. The technique is based on the application of the method of asymptotic averaging of periodic structures for the case of materials with elastic-plastic properties under cyclic loading. A model of the deformation theory of plasticity by A.A. Il'yushin – V.V. Moskvitin under cyclic loading using the Masing model for changing the plasticity function under cyclic deformation. Local problems of the theory of plasticity for the periodicity cell of a composite material, as well as averaged problems of the theory of anisotropic plasticity under cyclic loading are formulated. A software module has been developed for the finite element solution of local problems on the periodicity cell. The software of the SMCM complex developed at the Scientific and Educational Center "Supercomputer Engineering Modeling and Development of Software Systems" of the Bauman Moscow State Technical University was used. The SMCM complex is designed for finite element modeling of the properties of composite materials. Numerical calculations of the elastic-plastic properties of dispersed-reinforced composites based on an aluminum alloy and SiC ceramic particles have been carried out. Calculations have shown that the developed technique can be used to predict cyclic deformation diagrams of elastic-plastic composites in a wide range of loading conditions, as well as to design new composite materials with specified properties.

***Keywords**: composites, plasticity, cyclic loading, deformation theory of plasticity, dispersed-reinforced composites, asymptotic averaging method, finite element method, numerical simulation*

REFERENCES

[1] Mileiko S.T. Oxide-fibre/Ni–based matrix composites–III: A creep model and analysis of experimental data. *Composites Science and Technology*, 2002, vol. 62, iss. 2, pp. 195–204.

[2] Rawal S. Metal–matrix composites for space applications. *JOM*, vol. 53, no. 4, pp. 14–17.

[3] Ilyushin A.A. *Plastichnost'. Uprugo–plasticheskie deformacii* [Plasticity. Elastic–plastic deformations]. Moscow, URSS Publ., 2018, 392 p.

[4] Ilyushin A.A. *Plastichnost': osnovy obshchej matematicheskoj teorii* [Plasticity: fundamentals of general mathematical theory]. Moscow, URSS Publ., 2020, 272 p.

[5] Ilyushin A.A., Lensky V.V. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 372 p.

[6] Moskvitin V.V. *Ciklicheskie nagruzheniya elementov konstrukcij* [Cyclic loading of structural elements]. Moscow, URSS Publ., 2019, 344 p.

[7] Bondar V.S., Danshin V.V. Plastichnost'. Proporcional'nye i neproporcional'nye nagruzheniya [Plasticity. Proportional and disproportionate loads]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 176 p.

[8] Adams D.F. *Uprugoplasticheskoe povedenie kompozitov. Kompozitsionnye materialy. T. 2: Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Elastic-plastic behavior of composites. Composite materials. Vol. 2: Mechanics of composite materials]. Moscow, Mir Publ., 1978, pp. 196–241.

[9] Nguyen B.N., Bapanapalli S.K., Kunc V., Phelps J.H., Tucker C.L. Prediction of the elastic-plastic stress. strain response for injection-molded long-fiber thermoplastics. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 217–246.

[10] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1984, 324 p.

[11] Vildeman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of inelastic deformation and destruction of composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1997, 288 p.

[12] Dimitrienko Yu. I., Kashkarov A. I., Makashov A. A. Finite element calculation of effective elastic-plastic characteristics of composites based on the method of asymptotic averaging. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 102–116.

[13] Dimitrienko Yu.I., Lutsenko A.N., Gubareva E.A., Oreshko E.I., Bazyleva O.A., Sborschikov S.V. Calculating of mechanical characteristics of heat resistant intermetallic alloys on the basis of nickel by method of multi-scale modeling of structure. *Aviation Materials and Technologies*, 2016, no. 3, pp. 33–48.

[14] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Multiscale modeling of elastic-plastic composites with an allowance for fault probability. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, № 2, pp. 3–23.

[15] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978, 721 p.

[16] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of the composite material mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.

[17] Sanches-Palensiya E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Nonhomogeneous media and vibration theory]. Moscow, Mir Publ., 1984, 472 p.

[18] Manevich L.I., Andrianov I.V., Oshmyan V.G. *Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures*. Springer–Verlag, 2002, 276 p.

[19] Khdir Y.K., Kanit T., Zaïri F., Naït-Abdelaziz M. Computational homogenization of elastic-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2829–2835.

[20] Gorshkov A.G., Starovoitov E I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistyh vyazko-uprugoplasticheskih elementov konstrukcij* [Mechanics of layered viscoelastic structural elements]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 576 p.

[21] Dimitrienko Yu. I., Kashkarov A. I. Finite element method for calculating the effective characteristics of spatially reinforced composites. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–108.

[22] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Finite element modulation of effective viscoelastic properties of unilateral composite materials. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 28–48.

[23] Dimitrienko Yu.I. Method of multilevel homogenization of hierarchical periodic structures. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2002, no. 1, pp. 58–73.

[24] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Simulation of local transfer in periodic porous media. *European Journal of Mechanics — B/Fluids*, 2013, vol. 37, pp. 174–179.

[25] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220.

[26] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[27] Dimitrienko Yu.I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor calculus]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001, 575 p.

[28] Certificate no. 2019666176 *Programma NonlinearEl_Disp_Manipula dlya prognozirovaniya diagramm nelinejno-uprugogo deformirovaniya dispersno-armirovannyh kompozitov pri malyh deformaciyah na osnove konechno-elementnogo resheniya 3D lokal'nyh zadach mikromekhaniki: svidetel'stvo ob ofic. registracii programmy dlya EVM* [The program NonlinearEl_Disp_Manipula for predicting diagrams of nonlinear elastic deformation of dispersed-reinforced composites under small deformations based on the finite element solution of 3D local problems of micromechanics: certificate of ofic. registration of a computer program] / Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin, S.V. Sobshchikov, I.O. Bogdanov; applicant and copyright holder: BMSTU — no. 2019665098; application 26.11.2019; registered in the register of computer programs 05.12.2019 — [1].

[29] Certificate no. 2019666172 *Programma StrengthCom SMCM dlya konechno-elementnogo rascheta prochnostnyh harakteristik kompozitnyh materialov so slozhnoj strukturoj s uchetom nakopleniya mikro-povrezhdenij i kinetiki mezoskopicheskih defektov: svidetel'stvo ob ofic. registracii programmy dlya EVM* [The StrengthCom SMCM program for finite element calculation of strength characteristics of composite materials with a complex structure, taking into account the accumulation of micro-damage and the kinetics of mesoscopic defects]: certificate of ofic. registration of a computer program / Yu. I. Dimitrienko, E. A. Gubareva, Yu. V. Yurin, S. V. Sobshchikov, I. O. Bogdanov; applicant and copyright holder: BMSTU — no. 2019665109; application 26.11.2019; registered in the register of computer programs 05.12.2019 — [1].

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Sborschikov S.V., researcher of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: servasbor@gmail.com

Yurin Yu.V., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Senior researcher of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yvyurin@yandex.ru