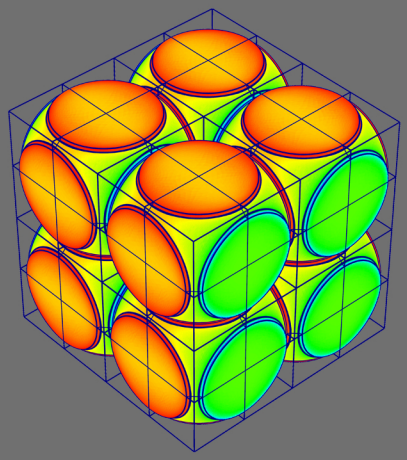
ISSN 2309-3684



# Математическое моделирование и численные методы

Тимофеев В.Н. Моделирование дозвукового отрывного обтекания осесимметричных тел с донным срезом при ненулевых углах атаки. Математическое моделирование и численные методы, 2020, № 3, с. 99–116.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/231/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 10:00:14

УДК 532.582.4:517.958 DOI: 10.18698/2309-3684-2020-3-99116

# Моделирование дозвукового отрывного обтекания осесимметричных тел с донным срезом при ненулевых углах атаки

© В.Н. Тимофеев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*По схеме течения с эквивалентной полубесконечной поверхностью исследуется дозвуковое обтекание осесимметричных тел с линией отрыва, расположенной в области донного среза. Даны рекомендации по усовершенствованию методики моделирования в случае ненулевых углов атаки. Расчетные соотношения методики адаптированы для использования метода дискретных вихрей. Представлены подробные данные о распределении скорости и давления на поверхности цилиндрического тела с донным срезом и головной частью оживальной формы при ненулевых углах атаки.*

***Ключевые слова:*** *математическое моделирование, дозвуковое отрывное обтекание, метод дискретных вихрей, донное давление*

**Введение.** Актуальность дальнейшего совершенствование разнообразных методов и алгоритмов исследований отрывных течений предопределяется широким кругом практических приложений. Наиболее полная информация для различных областей отрывного течения получается при решении уравнений Навье-Стокса. Вместе с тем, алгоритмы численных решений уравнений Навье-Стокса достаточно сложны и их реализация требует больших вычислительных мощностей [1–3]. Затратами значительно меньших, но всё-таки существенных, компьютерных ресурсов характеризуются методы изучения отрывных течений, использующие теорию идеальной газовой среды [4–11]. Естественно, что трудоемкость и потребные вычислительные мощности возрастают, если моделирование требует совместного применения теорий идеальной среды, пограничного слоя, и вязкого ближнего или дальнего следов [12–13].

Уменьшить объем вычислительных ресурсов, необходимых для математического моделирования, позволяет методика с применением эквивалентной полубесконечной поверхности [14, 15]. В соответствии с базовой концепцией вязко-невязкого взаимодействия [13] скорости и давления на поверхности исследуемого тела определяются по результатам расчетов невязкого обтекания некоторого эквивалентного тела, ограниченного поверхностью $\sum$. Эта эквивалентная поверхность состоит из носовой $\sum_1$ и хвостовой $\sum_2$ частей (рис. 1). Поверхность обтекаемого тела формирует поверхность носовой части эквивалентного тела. Это обусловлено двумя обстоятельствами. Во-первых,

рассматриваются режимы течения с отрывом потока, локализованным вблизи линии $L_c$ донного среза или на самой этой линии. Во-вторых, предполагается, что при больших числах Рейнольдса можно пренебречь толщиной вытеснения пограничного слоя по сравнению с суммарной длиной обтекаемого тела. Линия стыковки носовой и хвостовой частей эквивалентной поверхности обозначается через $L_c$.

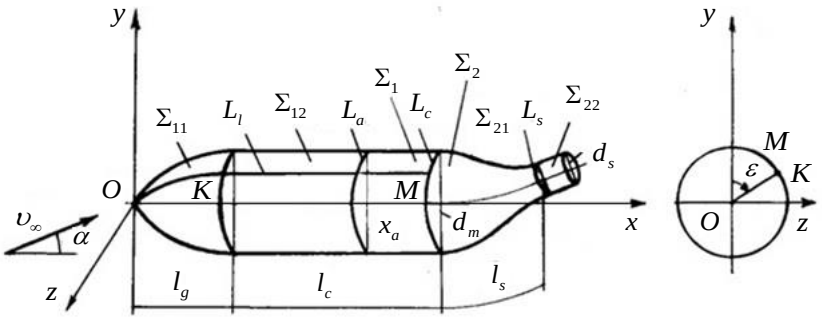



**Рис. 1.** Схема эквивалентной поверхности и ее геометрические параметры: носовая $\sum_1$ и хвостовая $\sum_2$ части эквивалентной поверхности, $L_c$ — линия их стыковки

В упомянутой методике осуществляется формирование хвостовой части эквивалентной поверхности достаточно простой формы. Используется схема течения [16] с полубесконечнымым участком $\sum_{22}$ хвостовой части поверхности эквивалентного тела, уходящим в бесконечность вниз по потоку от линии $L_s$ соединения с участком $\sum_{21}$. Длина имеющего конечную протяженность участка $\sum_{21}$ измеряется по искривленной продольной оси и обозначается через $l_s$. Для участков $\sum_{11}$ и $\sum_{12}$ носовой части поверхности эквивалентного тела длины измеряются по прямолинейной продольной оси и обозначаются через $l_g$ *и* $l_c$, соответственно. Математическая модель адаптирована к использованию при численном моделировании алгоритмов метода дискретных вихрей [17–20]. Ранее моделирование дозвукового отрывного обтекания тел при малых углах атаки проводилось [20] на основе предположения о том, что в первом приближении коэффициент донного сопротивления обтекаемого тела не зависит от величины угла атаки. В текущей работе производится учет зависимости коэффициента донного сопротивления, а, следовательно, и коэффициента донного давления от значения угла атаки.

**Начальный этап численного моделирования.** Задается форма поверхности обтекаемого тела. Выбирается декартова ортонормированная правая система координат *Oxyz*, которая связана с этим телом и представлена на рис. 1. Задается вектор скорости набегающего

потока $\vec{\upsilon}_\infty$ . В указанной системе координат определяются его составляющие $\upsilon_{x_\infty}\ \upsilon_{y_\infty}\upsilon_{z_\infty}$ и угол атаки $\alpha$.

Моделируется обтекание осесимметричных тел, составленных из головной части оживальной формы и цилиндрической части с плоским донным срезом. Диаметр миделевого сечения $d_m^*$ такого тела равняется диаметру его цилиндрической части. Используются безразмерные значения длин $l$ и координат $x$, $y$, $z$ которые получаются делением значений соответствующих размерных величин $l^*$, $x^*$, $y^*$, $z^*$ на диаметр миделевого сечения. Поэтому величина безразмерного диаметра $d_m$ миделевого сечения оказывается равной единице ($d_m = 1$ ). Носовая часть поверхности эквивалентного тела составляется из двух участков $\sum_{11}$ и $\sum_{12}$ оживальной и цилиндрической формы. У исследуемых тел сопряжение двух указанных участков осуществляется без излома поверхности. Геометрические соотношения показывают, что тогда поверхность оживальной головной части и участка $\sum_{11}$ образуется вращением вокруг оси $Ox$ дуги, у которой безразмерный радиус определяется по формуле $R_g = l_g{}^2 + 0,25$. Поэтому безразмерные длины $l_g$ головной и $l_c$ цилиндрической частей полностью определяют геометрическую форму исследуемого обтекаемого тела. Суммарная безразмерная длина обтекаемого тела, равная $l_g + l_c$, обозначается через $l_b$.

Нулевое приближение расчетов начинается с задания значений длины $l_s$ участка $\sum_{21}$ поверхности хвостовой части эквивалентного тела и диаметра $d_s$ полубесконечного участка $\sum_{22}$ .В соответствии с рекомендациями работы [19] осуществляется формирование конфигурации поверхности хвостовой части эквивалентного тела. В качестве иллюстрации на рис. 2 изображена поверхность эквивалентного тела, построенная при моделировании обтекания с углом атаки $\alpha = 8^\circ$ оживально-цилиндричесого тела с $l_g = 1$ и $l_c = 2$ при $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$.

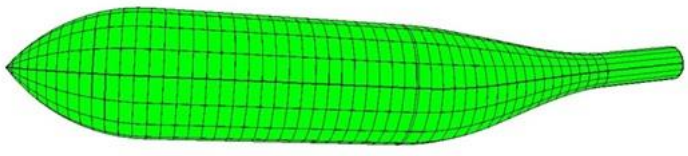


**Рис. 2.** Вид эквивалентной поверхности для оживально-цилиндричесого тела с $l_g = 1$ и $l_c = 2$ при $\alpha = 8^\circ$ и $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$

**Математическая модель и основные расчетные соотношения численного моделирования.** Рассматривается пространственное обтекание газовым потоком тела, у которого форма поверхности является заданной. Как указывалось во введении, в соответствии с положением базовой концепции вязко-невязкого взаимодействия газовую среду целесообразно считать идеальной. Ее поведение описывается уравнением неразрывности и векторным уравнением движения в форме Громеки–Лемба:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{\upsilon}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + grad\frac{\upsilon^2}{2} + \vec{\Omega} \times \vec{\upsilon} = -\frac{1}{\rho} gradp + \vec{f}, \tag{2}$$

где $\vec{\Omega} = rot\,\vec{\upsilon}$ — вихрь вектора $\vec{\upsilon}$ скорости частиц среды; $p$ и $\rho$ — давление и плотность; $\vec{f}$ — массовая плотность внешних массовых сил.

При обтекании тела воздухом и другими газами, пренебрегая силами тяжести, полагается, что плотность внешних массовых сил мала по сравнению с другими слагаемыми в уравнении (2). При скоростях движения, не превышающих половину скорости звука, сжимаемость газовой среды сказывается не слишком сильно и эту среду можно считать несжимаемой. Денное предположение позволяет дополнить систему уравнений (1)–(2) соотношением

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{3}$$

В данной работе предполагается, что среда является однородной, соотношение (3) выполняется и система уравнений (1)–(2) оказывается замкнутой. При этом уравнение неразрывности приобретает вид

$$div\,\vec{\upsilon} = 0. \tag{4}$$

Кроме того, считается, что вне поверхности эквивалентного тела течение является потенциальным и векторы скорости находятся через градиенты соответствующих потенциалов. Тогда задача сводится к нахождению этих потенциалов, т.к. для нестационарных течений оказывается справедливым интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\upsilon^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t),$$

а для стационарных течений — интеграл Бернулли

$$\frac{\upsilon^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const. \tag{5}$$

Для стационарной задачи в выбранной системе координат $Oxyz$ (рис. 1) граничные условия формулируются следующим образом. Поверхность $\Sigma$ считается непроницаемой и в любой ее точке выполняется условие непротекания

$$\vec{\upsilon} \cdot \vec{n}\big|_{\Sigma} = 0, \tag{6}$$

где $\vec{n}$ — орт внешней нормали к поверхности $\Sigma$ в данной точке. На бесконечности требуется выполнение условия затухания возмущений

$$\lim_{r\to\infty} \vec{\upsilon}\left(M\right) = \vec{\upsilon}_{\infty}, \tag{7}$$

где $M\left(x, y, z\right)$ — некоторая точка области течения; $\vec{\upsilon}\left(M\right)$ — вектор скорости частиц среды; $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ — радиус-вектор точки $M$ ; $r = \left|\vec{r}\right|$ — длина радиус-вектора.

Рассматривается функция

$$\varphi = \varphi\left(x, y, z\right),$$

называемая потенциалом вектора скорости возмущенного потока, такая, что ее градиент определяет вектор скорости потока газа:

$$grad\varphi = \vec{\upsilon}. \tag{8}$$

Составляющие этого градиента равняются компонентам вектора скорости:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \upsilon_x, \ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \upsilon_y, \ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \upsilon_z.$$

В соответствии с граничным условием (7) оказывается справедливым равенство

$$\lim_{r\to\infty} grad\varphi = \vec{\upsilon}_{\infty}. \tag{9}$$

В качестве потенциала вектора скорости невозмущенного потока рассматривается функция:

$$\varphi_{\infty} = \upsilon_{x_{\infty}} x + \upsilon_{y_{\infty}} y + \upsilon_{z_{\infty}} z + C, \tag{10}$$

где $C$ — аддитивная постоянная. Градиент функции (10) равняется вектору скорости набегающего потока:

$$grad\varphi_{\infty} = \vec{\upsilon}_{\infty}. \tag{11}$$

Поэтому выполняется условие

$$\lim_{r\to\infty} grad\varphi_{\infty} = \vec{\upsilon}_{\infty}. \tag{12}$$

Вводятся в рассмотрение вектор $\vec{\upsilon}'$ скорости возмущений

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_\infty$$

и потенциал возмущений

$$\varphi' = \varphi - \varphi_\infty.$$

В соответствии с равенствами (8) и (11)

$$grad\varphi' = grad\varphi - grad\varphi_\infty = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_\infty = \vec{\upsilon}'. \qquad (13)$$

Из условий (9) и (12) следует, что градиент потенциала возмущений на бесконечности стремится к нулю:

$$\lim_{r\to\infty} grad\varphi' = 0.$$

Потенциалы определяются с точностью до аддитивных постоянных, поэтому считается, что на бесконечности потенциал возмущений стремится к нулю

$$\lim_{r\to\infty} \varphi' = 0.$$

Подстановка соотношения (8) в уравнение неразрывности (4) приводит к равенству

$$div\, grad\varphi = 0.$$

Таким образом потенциал возмущенных скоростей, вычисляемый в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi(M_0) = 0,$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial {x_0}^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial {y_0}^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial {z_0}^2}$ — оператор Лапласа.

Потенциал $\varphi_\infty$ вектора скорости невозмущенного потока также является гармонической функцией. Поэтому и потенциал возмущений удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi'(M_0) = 0.$$

Потенциал вектора скорости возмущенного потока представляется как $\varphi = \varphi_\infty + \varphi'$ и граничное условие (6) непротекания поверхности обтекаемого тела преобразуется к виду

$$grad\,(\varphi_\infty + \varphi') \cdot \vec{n}\big|_\Sigma = 0$$

С учетом линейности градиента, его связи с производной по направлению и соотношения (12) для потенциала возмущений

получается граничное условие на поверхности эквивалентного тела

$$\left.\frac{\partial\varphi'(M_0)}{\partial n}\right|_{\Sigma} = -\vec{\upsilon}_{\infty}\cdot\vec{n}(M_0)\big|_{\Sigma}.$$

Таким образом потенциал возмущений должен представлять собой решение следующей внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi'(M_0) = 0,\ M_0 \notin \Sigma, \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi'(M_0)}{\partial n}\right|_{\Sigma} = -\vec{\upsilon}_{\infty}\cdot\vec{n}(M_0)\big|_{\Sigma},\ M_0 \in \Sigma, \tag{15}$$

$$\lim_{r\to\infty}\varphi'(M_0) = 0, \tag{16}$$

$$\lim_{r\to\infty} grad\,\varphi'(M_0) = 0, \tag{17}$$

где $\vec{n}(M_0)$ — орт нормали к поверхности $\sum$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Внешняя задача Неймана (14)–(17) имеет единственное решение. Данное решение может быть представлено в виде потенциала двойного слоя

$$\varphi'(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}(M)}{r^3}g(M)d\sigma, \tag{18}$$

где $\bar{r}$ — вектор, направленный в точку вычисления $M_0$ из точки $M$, расположенной на элементарной площадке с площадью $d\sigma$ и ортом вектора нормали $\vec{n}(M)$; $r$ — модуль вектора $\bar{r}$; $g(M)$ — поверхностная плотность потенциала двойного слоя.

Потенциал возмущенных скоростей $\varphi'(M_0)$ является решением сформулированной внешней задачи Неймана (14)-(17), если его поверхностная плотность удовлетворяет следующему интегральному уравнению [17]:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\iint_{\Sigma}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}(M)}{r^3}g(M)d\sigma = -\vec{\upsilon}_{\infty}\cdot\vec{n}(M_0). \tag{19}$$

Из равенств (13) следует, что вектор скорости газового потока определяется как

$$\vec{\upsilon}(M_0) = \vec{\upsilon}_{\infty} + grad\,\varphi'(M_0). \tag{20}$$

Поэтому для решения задачи обтекания достаточно находить градиент потенциала возмущений

$$grad\varphi'(M_0) = \frac{1}{4\pi}\nabla\iint\limits_{\Sigma}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}(M)}{r^3}g(M)d\sigma,$$

где $\nabla$ — оператор Гамильтона [21].

Нахождение градиента потенциала возмущений осуществляется при численном решении [19], [20] интегрального уравнения (19). Ниже указаны лишь некоторые из этапов данного решения.

Участки $\sum_{11}$, $\sum_{12}$ и $\sum_{21}$ поверхности эквивалентного тела аппроксимируется набором панелей $\sum_k$, $k=1,...,N$. Полубесконечный участок $\sum_{22}$ эквивалентного тела моделируется группой полубесконечных панелей $\Sigma_k$, $k=N+1,...,N+N_r$, где $N_r$ — количество панелей указанного рода. Суммарное число панелей $N+N_r$ обозначается через $N_t$. На каждой панели плотность потенциала двойного слоя считается постоянной величиной, равной $g_k$, $k=1,...,N_t$.

Градиент потенциала возмущений определяется как сумма градиентов потенциалов двойного слоя каждой панели

$$grad\varphi'(M_0) = \sum_{k=1}^{N_t} g_k\left(\frac{1}{4\pi}\nabla\iint\limits_{\Sigma_k}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}(M)}{r^3}g(M)d\sigma\right).$$

Используется равенство градиента потенциала двойного слоя, размещенного на панели $\sum_k$ с постоянной плотностью $g_k$, и вектора скорости, индуцированной вихревой нитью $L_k$, расположенной на границе этой панели с циркуляцией

$$\Gamma_k = -g_k,\ k=1,...,N_t.$$

По алгоритмам [20], адаптированным для использования метода дискретных вихрей, осуществляется вычисление векторов функций скорости $\vec{w}_k(M_0)$, $k=1,...,N_t$ и преобразованных векторов функций скорости $\vec{w}_k^*(M_0)$, $k=1,...,N$. Выражение для градиента потенциала возмущений преобразуется к виду

$$grad\varphi'(M_0) = \sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\vec{w}_k^*(M_0). \qquad (21)$$

Потенциал возмущений, записанный в форме (18), удовлетворяет уравнению Лапласа (14) и условиям затухания возмущений (16)–(17). С учетом соотношения (15) и непрерывности нормальной производной потенциала двойного слоя граничное условие на поверхности эквивалентного тела преобразуется к виду

$$\sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \left( \vec{w}_k^*(C_\nu) \cdot \vec{n}(C_\nu) \right) = -\vec{v}_\infty \cdot \vec{n}(C_\nu), \ \nu = 1,...,N,$$

где $C_\nu$, $\nu = 1,...,N$ — контрольная точка, расположенная на панели $\sum_\nu$; $\vec{n}(C_\nu)$ — орт внешней нормали к поверхности $\Sigma$ в данной контрольной точке.

Неизвестные циркуляции $\Gamma_k$, $k = 1,...,N_t$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} a_{\nu k} \Gamma_k = b_\nu, \ \nu = 1,...,N, \tag{22}$$

в которой

$$a_{\nu k} = \vec{w}_k^*(C_\nu) \cdot \vec{n}(C_\nu), \ \nu = 1,...,N, \ k = 1,...,N,$$
$$b_\nu = -\vec{v}_\infty \cdot \vec{n}(C_\nu), \ \nu = 1,...,N.$$

Решение системы (22) производится с применением регуляризирующей функции [18].

После нахождения циркуляций $\Gamma_k$ градиент потенциала возмущений и векторы скорости потока в точках, расположенных вне поверхности эквивалентного тела, определяются из соотношения (20)–(21).

В контрольных точках градиент потенциала двойного слоя претерпевает разрыв тангенциальной составляющей [17]. Поэтому для градиента потенциала возмущений сначала определяется [19] вектор разрыва тангенциальной составляющей $\overrightarrow{\Delta v}(C_\nu)$, а затем предельное значение

$$\left( grad\varphi'(C_\nu) \right)_+ = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \vec{w}_k^*(M_0) + 0,5\overrightarrow{\Delta v}(C_\nu).$$

Вектор скорости газового потока в контрольных точках находится как сумма вектора скорости набегающего потока и предельного значения градиента потенциала возмущений:

$$\vec{v}(C_\nu) = \vec{v}_\infty + \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \vec{w}_k^*(C_\nu) + 0,5\overrightarrow{\Delta v}(C_\nu).$$

Из интеграла Бернулли (5) определяется статическое давление

$$p = p_\infty + 0,5\rho(v_\infty^2 - v^2),$$

где $p_\infty$ и $v_\infty = \sqrt{{v_{x_\infty}}^2 + {v_{y_\infty}}^2 + {v_{z_\infty}}^2}$ — статическое давление и модуль вектора скорости набегающего потока; $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$ — модуль

вектора скорости частиц газовой среды. В выбранных точках течения определяются значения безразмерной скорости $\bar{\upsilon} = \upsilon / \upsilon_\infty$ коэффициента давления

$$c_p = c_p = 2(p - p_\infty) / (\rho \upsilon_\infty^2) = 1 - (\upsilon / \upsilon_\infty)^2.$$

Как и в работе [20] проводится итерационный цикл корректировки значений длины $l_s$ участка поверхности $\sum_{21}$ и диаметра $d_s$ полубесконечного участка эквивалентного тела. Требуется совпадение расчетного значения коэффициента донного давления $(c_p)_C$ , получаемого осреднением по длине линии стыковки $L_c$, и оценочного значения коэффициента донного давления $(c_p)_S$ . Последний определяется по величине оценочного значения аэродинамического коэффициента донного сопротивления $(c_{x_{дон}})_S$ обтекаемого тела. Предполагается, что для цилиндрических тел с головной частью и донным срезом оценочное значение коэффициента донного сопротивления $(c_{x_{дон}})_S$ складывается из двух составляющих. Первая составляющая $(c_{x_{дон}})_0$ равняется коэффициенту донного сопротивления при нулевом угле атаки и вычисляется по формуле Хорнера [14–16]. Эта составляющая определяется геометрическими параметрами обтекаемого тела и числом Рейнольдса, которое находится по скорости набегающего потока и суммарной длине обтекаемого тела $l_b^*$ . Вторая составляющая учитывает влияние угла атаки. В предположении, что при малых углах атаки можно пренебречь второй из указанных составляющих, было проведено математическое моделирование в работе [20]. В текущей статье считается, что при обтекании цилиндрического тела с донным срезом, с носовой головной частью и без дополнительной хвостовой части, вторая составляющая пропорциональна первой степени угла атаки [22]. Поэтому оценочное значение аэродинамического коэффициента донного сопротивления $(c_{x_{дон}})_S$ определялось по следующей формуле:

$$(c_{x_{дон}})_S = (c_{x_{дон}})_0 + 0,688\alpha, \qquad (23)$$

где $\alpha$ — угол атаки, измеряемый в радианах.

По скорректированным значениям длины $l_s$ и диаметра $d_s$ осуществляется окончательный расчет распределения модуля вектора безразмерной скорости $\bar{\upsilon} = \upsilon / \upsilon_\infty$ и коэффициента давления $c_p$ по поверхности обтекаемого тела.

**Обсуждение результатов моделирования.** Одной из отличительных характеристик представленной методики, о которой упоминается в ранее цитированных работах, является возможность оперативного получения и оценки распределения скорости и давления на поверхности обтекаемого тела. В качестве иллюстрации рассматриваются результаты моделирования дозвукового отрывного обтекания осесимметричного тела, цилиндрическая часть которого длиной $l_c = 3$ имела плоский торец в донном сечении. Головная часть оживальной формы длиной $l_g = 1,25$ сопрягается с цилиндрической без излома образующих. Для краткости подобное тело будем называть оживально–цилиндрическим. Число Рейнольдса берется равным значению $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$.

В случае нулевых углов атаки обтекание оживально–цилиндрических тел является осесимметричным и для выявления характера распределения скорости и давления достаточно, например, зависимостей безразмерной скорости $\bar{\upsilon}$ и коэффициента давления $c_p$ от безразмерной продольной координаты $x$. При ненулевых углах атаки в каждом продольном сечении $L_l$, представляющем собой пересечение поверхности исследуемого тела с плоскостью *OKM* при фиксированном значении угла наклона $\varepsilon$ (см. рис. 1), получаются различные зависимости $\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}(x)$ и $c_p(x)$.

Перед проведением основной серии расчетов при угле атаки $\alpha = 4^\circ$ было проведено сравнение графиков (рис. 3) изменения коэффициента давления в боковом продольном сечении ($\varepsilon = 90^\circ$), полученных для двух значений оценочного аэродинамического коэффициента донного сопротивления: рассчитанного без учета составляющей, зависящей от угла атаки, и по формуле (23) (кривые 1 и 2 на рис. 3, соответственно).

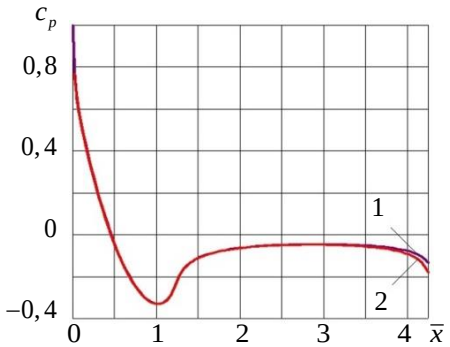
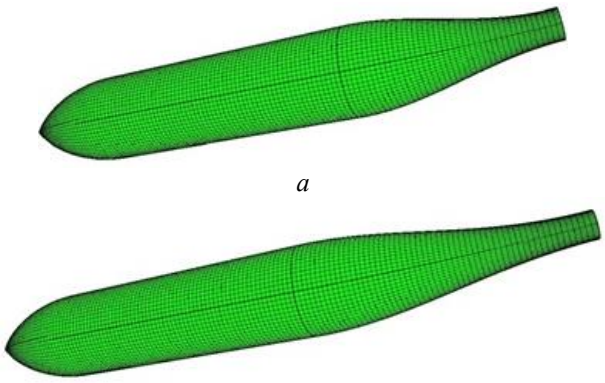



**Рис. 3.** Изменения коэффициента давления $c_p$ в боковом сечении $(\varepsilon = 90^\circ)$ оживально-цилиндрического тела с $l_g = 1,25$ и $l_c = 3$ при $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$ и $\alpha = 4^\circ$:
1 — без учета составляющей, зависящей от угла атаки, 2 — по формуле (23)

Влияние уточняющей составляющей сказывается в области примыкающей к сечению донного среза. Поэтому в дальнейшем моделирование проводится с применением соотношения (23). Рост разрежения в донной области, обусловленный дополнительной составляющей, приводит к сокращению длины $l_s$ участка $\sum_{21}$ поверхности хвостовой части эквивалентного тела примерно в 1,4 раза и одновременному увеличению в 1,15 раз диаметра $d_s$ полубесконечного участка (рис. 4*а*) по сравнению с аналогичными параметрами, полученными без поправки на влияние угла атаки (рис. 4*б*).



*а*

*б*

**Рис. 4.** Эквивалентные поверхности для оживально-цилиндрического тела с $l_g = 1,25$ и $l_c = 3$ при $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$ и $\alpha = 4^\circ$:
*а* — по формуле (23), *б* — без уточняющей поправки

Наглядное представление о распределения скорости и давления на поверхности обтекаемого тела дают цветовые диаграммы, позволяющие рассматривать изображения пространственных поверхностей с различных направлений с одновременным выводом значений измеряемой величины и шкалы с диапазоном ее изменения (рис. 5).

Для случая обтекания оживально-цилиндрического тела с $l_c = 3$ и $l_g = 1,25$ при $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$ и угле атаки $\alpha = 4^\circ$ зависимости $c_p(x)$ коэффициента давления от безразмерной продольной координаты на рис. 6 представлены кривыми 1, 2, 3, 4 и 5 для верхнего ($\varepsilon = 0^\circ$), бокового ($\varepsilon = 90^\circ$), нижнего ($\varepsilon = 180^\circ$) продольных сечений, а также для продольных сечений с $\varepsilon = 45^\circ$ и $\varepsilon = 135^\circ$, соответственно. Набор графиков указанного типа дает представление об общем характере распределения давления на поверхности обтекаемого тела. Однако, на значительной части этой поверхности кривые зависимостей $c_p(x)$ располагаются близко друг от друга и пересекаются под малыми углами. Даже при рассмотрении всего трех (рис. 6*а*) или пяти

(рис. 6*б*) графиков детальный анализ распределения давления на поверхности цилиндрического участка обтекаемого тела затруднен.

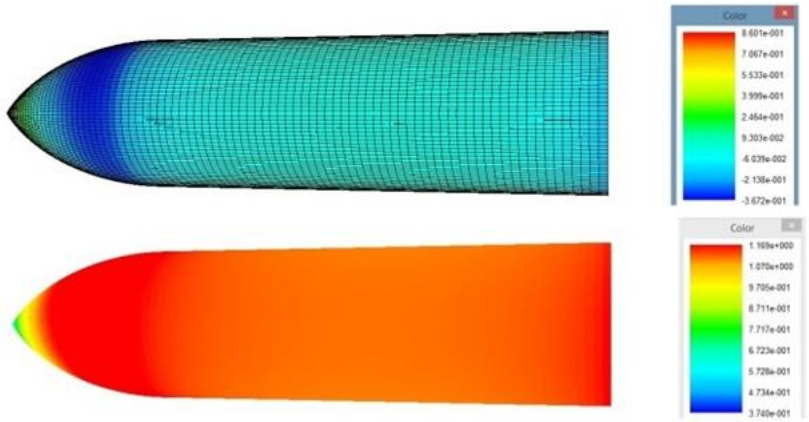


**Рис. 5.** Распределение коэффициента давления $c_p$ и безразмерной скорости $\bar{v}$ по поверхности обтекаемого тела при $l_g = 1{,}25$, $l_c = 3$, $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$, $\alpha = 4^\circ$

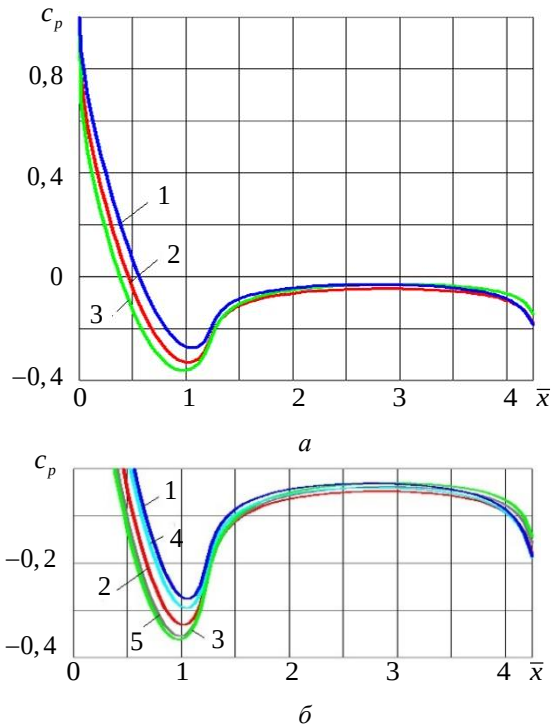



**Рис. 6.** Зависимости коэффициента давления $c_p$ на поверхности обтекаемого тела с $l_g = 1{,}25$ и $l_c = 3$ от безразмерной продольной координаты $\bar{x}$ при $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$ и $\alpha = 4^\circ$ различных продольных сечениях (1 — $\varepsilon = 0^\circ$, 2 — $\varepsilon = 90^\circ$, 3 — $\varepsilon = 180^\circ$, 4 — $\varepsilon = 45^\circ$, 5 — $\varepsilon = 135^\circ$)
*а* — на всем обтекаемом теле, *б* — в области разрежений

Поэтому для ряда поперечных сечений $L_a$, в каждом из которых является постоянным значение безразмерной продольной координаты $x$, осуществляется построение графиков зависимостей коэффициента давления $c_p$ от угла $\varepsilon$, задающего положение точки в данном сечении. Группировка графиков зависимостей $c_p(\varepsilon)$ в отдельные наборы позволяет наглядно проиллюстрировать распределение давления на различных участках поверхности обтекаемого тела (рис. 7). Вниз по потоку от передней критической точки, расположенной в заостренном носке, в любом продольном сечении оживальной головной части с увеличением значения координаты $x$ модуль скорости частиц среды непрерывно возрастает, а коэффициент давления непрерывно уменьшается. Эти процессы иллюстрируются рис. 5, 6 и 7*а*, на котором графики зависимостей $c_p(\varepsilon)$ для продольных координат $x$, принимающих значения 0,0204; 0,0780; 0,2460; 0,5080; 0,6710 и 0,9830, изображены кривыми 1, 2, 3, 4, 5 и 6, соответственно. В окрестности сечения $x = 0,9830$ отрицательные значения коэффициента давления достигают наибольших по модулю значений, т.е. разрежения становятся максимальными, и вниз по потоку наблюдается уменьшение модуля коэффициента давления (кривые 1, 2, 3, 4 и 5 на рис. 7*б*, соответствующие значениям $x$ = 0,983; 1,175; 1,275; 1,475 и 2,875). Примерно с середины длины цилиндрического участка и вплоть до сечения донного среза ( $x = 4,25$ ) наблюдается повторный рост модуля коэффициента давления, что на рис. 7*в* соответствует смещению вниз графиков 1, 2, 3, 4, 5 и 6 зависимостей, рассчитанных для поперечных сечений с $x$=2,875; 3,475; 3,975; 4,125; 4,225 и 4,25.

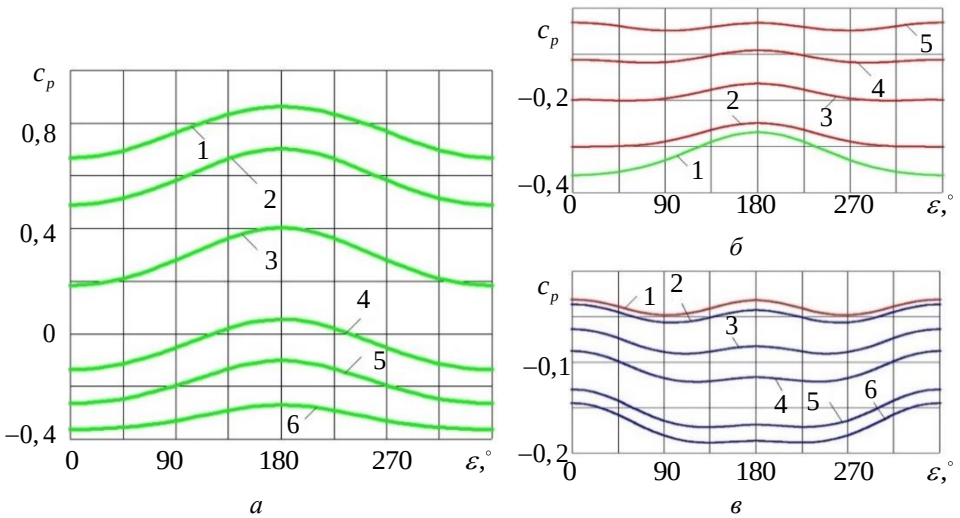



**Рис. 7.** Зависимость коэффициента давления $c_p$ на поверхности обтекаемого тела от угла $\varepsilon$:
*а* — область возрастания разрежений, *б* — область уменьшения разрежений, *в* — область повторного возрастания разрежений

**Заключение.** Усовершенствована методика математического моделирования дозвукового отрывного обтекания осесимметричных тел. Введение поправки в значение коэффициента донного давления позволило расширить область применения методики моделирования на случай ненулевых углов атаки. Продемонстрированы возможности методики для оперативной оценки распределения скорости и давления. Численным моделированием получен ряд зависимостей и произведена группировка их графиков для наглядного иллюстрирования распределение коэффициента давления на различных участках поверхности обтекаемого тела.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. Методы расчета различных течений*. Москва, Мир, 1991, 552 с.

[2] Калугин В.Т., Соболев В.Ю. Математическое моделирование процессов дозвукового турбулентного обтекания стабилизирующих устройств летательных аппаратов в условиях отрыва потока. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2005, № 2, с. 20–30.

[3] Ефремова М.Ю., Крюков П.В., Галактионов А.Ю. Численный расчет аэродинамических характеристик сферического тела с протоком при дозвуковых скоростях. Вестник Московского государственного университета леса – Лесной вестник, 2015, № 1, с. 129–135.

[4] Головкин М.А., Головкин В.А., Калявкин В.М. *Вопросы вихревой гидромеханики*. Москва, Физматлит, 2009, 264 с.

[5] Saffman P.G. *Vortex Dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992, 311 p.

[6] Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. *Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок*. Москва, Ин-т механики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006, 184 с.

[7] Lewis R.I. *Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems*. Cambridge, Cambridge University Press, 2005, 592 p.

[8] Kuzmina K.S., Marchevskii I.K., Moreva V.S. Vortex sheet intensity computation in incompressible flow simulation around an airfoil by using vortex methods. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2018, vol. 10, iss. 3, pp. 276–287.

[9] Плюснин А.В. Моделирование внутреннего и внешнего нестационарного взаимодействия корпуса летательного аппарата с жидкостью методом граничных элементов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 77–100.

[10] Коцур О.С., Щеглов Г.А. Реализация метода обмена интенсивностями вортонов-отрезков для учета вязкости в методе вихревых элементов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 3, с. 48–67.

[11] Дергачев С.А., Щеглов Г.А. Моделирование обтекания тел методом вихревых элементов с использованием замкнутых вихревых петель. *Научный вестник МГТУ ГА*, 2016, № 223, с. 19–27.

[12] Белоцерковский С.М., Ништ М.И., Котовский В.Н., Федоров Р.М. *Трехмерное отрывное обтекание тел произвольной формы*. Москва, ЦАГИ, 2000, 265 с.

[13] Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. *Отрывные и кавитационные течения. Основные свойства и расчет модели*. Москва, Наука, 1990, 384 с.

[14] Тимофеев В.Н. Математическое моделирование отрывного дозвукового обтекания осесимметричных тел с учетом донного давления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 10. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1246.html (дата обращения 17.10.2017).

[15] Тимофеев В. Н. Построение полубесконечного эквивалентного тела при математическом моделировании дозвукового отрывного осесимметричного обтекания. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4, с. 67–83.

[16] Timofeev V.N. Mathematical simulation of the subsonic flow around the lengthening bodies with the flow separation in the region of ground shear with the use of an equivalent body. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1141, art. no. 012095.

[17] Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн)*. Москва, ТОО «Янус», 1995, 520 с.

[18] Аубакиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И., Ништ М.И. *Нелинейная теория крыла и ее приложения*. Алматы, Гылым, 1997, 448 с.

[19] Тимофеев В.Н. Моделирование дозвукового отрывного обтекания тел с донным срезом по схеме течения с эквивалентной полубесконечной поверхностью при малых углах атаки. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 4, с. 31–49.

[20] Тимофеев В.Н. Особенности вихревой схемы при моделировании дозвукового отрывного обтекания с полубесконечным эквивалентным телом. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 4, с. 73–91.

[21] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

[22] Любимов А.Н., Тюмнев Н.М., Хут Г.И. *Методы исследования течений газа и определения аэродинамических характеристик осесимметричных тел*. Москва, Наука, 1995, 397 с.

Статья поступила в редакцию 15.11.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тимофеев В.Н. Моделирование дозвукового отрывного обтекания осесимметричных тел с донным срезом при ненулевых углах атаки. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 3, с. 99–116.

**Тимофеев Валерий Николаевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных и методических работ. Область научных интересов: математическое моделирование, численные методы, механика жидкости и газа, аэродинамика, численные методы, методы оптимизации. e-mail: v_n_1951@mail.ru

# Simulation of subsonic detachable flow of axisymmetric bodies with bottom slice at non-zero angles of attack

© V.N. Timofeev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*According to the current scheme with the equivalent half-bottom surface, the subsonic streamlining of the axisymmetric bodies with the separation line located in the bottom cut*

*area is examined. Recommendations have been made to improve the calculation method in the case of non-zero angles of attack. The estimated ratios of the technique are adapted to use the method of discrete vortexes. Detailed data on the distribution of speed and pressure on the surface of the cylindrical body with a bottom cut and the head part of the liveable shape at non-zero angles of attack are presented.*

***Keywords**: mathematical modeling, subsonic detachment, discrete vortex method, donning pressure*

REFERENCES

[1] Fletcher K. *Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostej. T. 2. Metody rascheta razlichnyh techenij* [Computational methods in fluid dynamics. Vol. 2. Methods for calculating different flows]. Moscow, Mir Publ., 1991, 552 p.

[2] Kalugin V.T., Sobolev V.Yu. Mathematical simulation of processes of subsonic turbulent flow around stabilizing devices of flying vehicles under condition of flow separation. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2005, no. 2, pp. 20–30.

[3] Efremova M.Yu., Kryukov P.V., Galaktionov A.Yu. Chislennyj raschet aerodinamicheskih harakteristik sfericheskogo tela s protokom pri dozvukovyh skorostyah [Numerical calculation of the aerodynamic characteristics of a spherical body with a flow at subsonic speeds].*Vestnik Moskovskogo gos-udarstvennogo universiteta lesa – Lesnoj vestnik* [Bulletin of the Moscow state forest University – Forest Bulletin], 2015, no. 1, pp. 129–135.

[4] Golovkin M.A., Golovkin V.A., Kalyavkin V.M. *Voprosy vihrevoj gidromehaniki* [Questions of vortex hydromechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 264 p.

[5] Saffman P.G. *Vortex Dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992, 311 p.

[6] Andronov P.R., Guvernyuk S.V., Dynnikova G.Ya. *Vikhrevye metody rascheta nestatsionarnykh gidrodinamicheskikh nagruzok* [Vortex methods of calculation of nonstationary hydrodynamic loads]. Moscow, Institute of Mechanics Lomonosov MSU Publ., 2006, 184 p.

[7] Lewis R.I. *Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems*. Cambridge, Cambridge University Press, 2005, 592 p.

[8] Kuzmina K.S., Marchevskii I.K., Moreva V.S. Vortex sheet intensity computation in incompressible flow simulation around an airfoil by using vortex methods. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2018, vol. 10, iss. 3, pp. 276–287.

[9] Plyusnin A.V. Boundary-element-method modelling of inside and outside nonstationary interaction of aircraft body and liquid. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 77–100.

[10] Kocur O.S., Shcheglov G.A. Implementation of the particle strength exchange method for fragmentons to account for viscosity in vortex element method. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2018, no. 3, pp. 48–67.

[11] Dergachev S.A., Scheglov G.A. Vortex element method simulation of flow around bodies using closed vortex loops. *Civil Aviation High Technologies*, 2016, no. 223, pp. 19–27.

[12] Belotserkovskiy S.M., Nisht M.I., Kotovskiy V.N., Fedorov R.M. *Trekhmernoe otryvnoe obtekanie tel proizvolnoy formy* [Three-dimensional detached flow of the bodies of arbitrary form]. Moscow, TsAGI (Central Aerohydrodynamic Institute) Publ., 2000, 265 p.

[13] Gogish L.V., Stepanov G.Yu. *Otryvnye i kavitatsionnye techeniya. Osnovnye svoiystva i raschet modeli* [Detached and cavitational flows. Basic properties and model calculation]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 384 p.

[14] Timofeev V.N. Mathematical modeling of separated subsonic flowaround axially symmetrical bodies with base pressure. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, no. 10. Available at: http://engjournal.ru/ catalog/math-model/aero/1246.html (accessed October 17, 2017).

[15] Timofeev V.N. Construction of a semi-infinite equivalent body in mathematical modeling of subsonic separated axisymmetric flow. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 4, pp. 67–83.

[16] Timofeev V.N. Mathematical simulation of the subsonic flow around the lengthening bodies with the flow separation in the region of ground shear with the use of an equivalent body. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1141, art. no. 012095.

[17] Lifanov I.K. *Metod singulyarnykh integralnykh uravneniy i chislennyy eksperiment (v matematicheskoi fizike, aerodinamike, teorii uprugosti i difraktsii voln)* [The method of singular integral equations and numerical experiment (in mathematical physics, aerodynamics, theory of elasticity and diffraction of waves)]. Moscow, LLP Yanus Publ., 1995, 520 p.

[18] Aubakirov T.O., Belotserkovskiy S.M., Zhelannikov A.I., Nisht M.I. *Nelineinaya teoriya kryla i ee prilozheniya* [Nonlinear wing theory and its applications]. Almaty, Gylym Publ., 1997, 448 p.

[19] Timofeev V.N. Simulation of the subsonic detachable body with a bottom cut on the current pattern with an equivalent half-infinite surface at small angles of attack. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2019, no. 4, pp. 31–49.

[20] Timofeev V.N. Special features of vortex diagram in simulation of subsonic detached flow around the semi-infinite equivalent body. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 4, pp. 73–91.

[21] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 367 p.

[22] Lyubimov A.N., Tyumnev N.M., Khud G.I. *Metody issledovaniya techenij gaza i opredeleniya aerodinamicheskih harakteristik osesimmetrichnyh tel* [Methods for studying gas flows and determining the aerodynamic characteristics of axisymmetric bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1995, 397 p.

**Timofeev V.N.**, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 40 research and methodological papers. Research interests include mathematical modeling, computational methods, fluid mechanics, aerodynamics, optimization methods. e-mail: v_n_1951@mail.ru