УДК 519.6 DOI: 10.18698/2309-3684-2020-8598

Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне

© Б.Х. Хайиткулов

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, 100174, Узбекистан

В данной работе разработан метод и алгоритм решения задач об оптимальном выборе плотности источников тепла на стержне таким образом, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла должны обеспечить заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном температурном коридоре. Строятся консервативные конечномерные аппроксимации исходной задачи в виде задачи линейного программирования. Приводится метод построения консервативных разностных схем для решения уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами, краткое описание разработанного программного приложения для построения расчётных сеток и решения уравнений. Предлагается и обосновывается новый метод численного решения нестационарных задач оптимального выбора источников тепла в стержне. Создано программное приложение для проведения численных экспериментов решения поставленной задачи. Приводятся описание основанного алгоритма и результатов численных экспериментов.

Ключевые слова: *нестационарные задачи, оптимальный выбор, источники тепла, уравнение теплопроводности, уравнение баланса, закон сохранения, интегро-интерполяционный метод, неявные схемы, консервативные схемы, симплекс-метод*

Введение. Одним из видов объектов, широко распространенных в различных областях человеческой деятельности, являются источники тепла на границе, обеспечивающие тепло в состоянии нестационарного теплового баланса с окружающей средой. Понятно, что температура внутри тела зависит от температуры греющей среды, находящейся на границе области. В типичной постановке задача об оптимальном выборе мощности греющей среды состоит в том, чтобы создаваемое источниками температурное поле внутри тела находилось в данном коридоре. Подобные задачи возникают в организации обогрева жилых и производственных помещений, теплиц и при необходимости поддержания заданного температурного режима в однородных и неоднородных твердых телах [1]. Они допускают ряд постановок, которые не эквивалентны из-за различий в критериях оптимизации. Здесь мы рассматриваем задачу нахождения плотности источников тепла минимальной мощности, которая обеспечивает заданный температурный режим в некотором теле в условиях ее нестационарного теплового баланса с окружающей средой. В работе [2] предложено решение задачи оптимального размещения источников в неоднородных средах, скалярные стационарные поля в которых описываются эллиптическими уравнениями. В основу алгоритмов решения задачи положены эффективные способы оценки значений функционала на множестве возможных мест размещения источников, что дает возможность выбора оптимального варианта путем реализации метода ветвей и границ в каждом конкретном случае. В работе [3] исследуются задачи оптимального нагрева помещения на основе принципа максимума Понтрягина. Приведена методика расчетов оптимального управления переходными режимами при натопе помещения. Работа [4] посвящена формулировке в явном виде математической задачи по оптимизации теплоснабжения в смысле ее энергетической эффективности и поиску ее решений. В работе [5] рассмотрены случаи несжимаемой вязкой жидкости и предлагаются разностные схемы, отражающие свойства исходных уравнений: сеточная аппроксимация нелинейных членов переноса не дает вклада в баланс энергии и энтропии. Схемы строятся на неравномерной сетке в прямоугольнике интегро–интерполяционным методом. В работе [6] изучаются кинетические уравнения Больцмана на основе метода расщепления по физическим факторам, а также построен консервативный алгоритм численного решения. Дана формулировка соответствующих дискретных граничных и начальных условий. На ряде примеров показана эффективность метода, позволяющего значительно увеличить точность вычислений. В работе [7] изучена дифференциально–разностная задача управления процессом диффузии, получен аналог принципа максимума, позволяющий определить такие моменты включения и выключения максимальной мощности источника, при которых внутри параллелепипеда устанавливается допустимый уровень его концентрации при наблюдаемом уровне концентрации этого вещества на границе параллелепипеда. В работе [8] рассмотрена третья краевая задача параболического типа. Распределение тепла в рассматриваемом теле контролируется функцией, которая находится на границе тела; решена задача, в случае конфликта, о возможности перевода исходного положения тела в нужное состояние. С математической точки зрения эта задача относится к задачам оптимального управления [9, 10] для эллиптических краевых задач. Существование решения и общие свойства подобных задач для квадратичных целевых функционалов, а также приближенные методы их решения изучались рядом авторов [11–13]. Нашу задачу можно отнести также к обратным задачам теплопроводности, методы приближенного решения которых рассмотрены в [14]. В работах [15, 16] разработаны методы и алгоритмы решения нестационарных задач об оптимальном выборе плотности источников тепла на простых физических телах таким образом, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла должны обеспечить заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре, заполненной однородной или неоднородной средой.

В настоящей работе рассматривается задача нахождения распределения плотности источников тепла, которая обеспечивает заданный температурный режим при минимальной суммарной мощности этих источников. Предлагаются метод и алгоритм решения нестационарных задач при оптимальном выборе плотности источников тепла на стержне таким образом, чтобы температура находилась в заданных пределах. Создано программное приложение для проведения вычислительных экспериментов с помощью этого алгоритма.

Постановка задачи и ее консервативная аппроксимация. В прямоугольнике $D=\{a \le x \le b, 0 \le t \le T\}$ требуется определить функцию $f(x,t) \ge 0$, доставляющую при каждом $t \in [0,T]$ минимум линейному функционалу

$$J\{f\} = \int_a^b f(x,t)dx \to \min, \tag{1}$$

при следующих условиях:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),\ a < x < b, 0 < t \le T, \\
u(x,0) = u_0(x),\ a \le x \le b, \\
u(a,t) = \mu_1(t),\ 0 < t \le T, \\
u(b,t) = \mu_2(t),\ 0 < t \le T,
\end{gathered} \tag{2}$$

$$m(x,t) \le u(x,t) \le M(x,t),\quad (x,t) \in D. \tag{3}$$

Здесь $u = u(x,t)$ — температура стержня в точке x в момент времени t; $\chi(x) > 0$ — коэффициент теплопроводности; $u_0(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $m(x,t)$, $M(x,t)$ — заданные функции. Функции $m(x,t)$, $M(x,t)$ имеют смысл функций минимального и максимального профиля температуры в области D соответственно. Плотность источников тепла описывается квадратично интегрируемой функцией $f(x,t)$ в пространстве $L_2(D)$. Решение данной краевой задачи можно получить в аналитическом виде с использованием метода Фурье [17].

Введем в D равномерную по обеим переменным разностную сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i = ih, t_j = j\tau),\ i = 0,1,\dots,N_1,\ j = 0,1,\dots,N_2\}$ с шагами $h = (b-a)/N_1$, $\tau = T/N_2$.

Для получения однородных консервативных разностных схем воспользуемся интегро-интерполяционным методом.

В основе дифференциального уравнения теплопроводности лежит интегральный закон сохранения тепла (уравнение баланса):

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} u(\xi, t+\Delta t)d\xi - \int\limits_{x}^{x+\Delta x} u(\xi, t)d\xi =$$
$$= \int\limits_{t}^{t+\Delta t} W(x,\tau)d\tau - \int\limits_{t}^{t+\Delta t} W(x+\Delta x,\tau)d\tau + \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (4)$$

где Δt и Δx произвольные числа, $u(x,t)$ — температура, $W(x,t)$ — поток тепла

$$W(x,t) = -\chi(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Для получения разностного уравнения рассмотрим интегральное уравнение баланса тепла на элементарной ячейке сетки на отрезке $x_{i-1/2} \le x \le x_{i+1/2}$ за промежуток времени $t_j \le t \le t_{j+1}$:

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_{j+1})dx - \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_j)dx =$$
$$= \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i-1/2},t)dt - \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i+1/2},t)dt + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x,t)dxdt.$$

Аппроксимируем входящие в уравнение баланса интегралы приближенными формулами [17]

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_{j+1})dx \approx hu_i^{j+1};\quad \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_j)dx \approx hu_i^j;\quad \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i-1/2},t)dt \approx \tau W_{i-1/2}^{j+1};$$
$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i+1/2},t)dt \approx \tau W_{i+1/2}^{j+1};\quad \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x,t)dxdt \approx \tau h f_i^{j+1},$$
$$W_{i+1/2}^{j+1} = -\chi_{i+1/2}\frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h};\quad W_{i-1/2}^{j+1} = -\chi_{i-1/2}\frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h}.$$

При этом $\chi_{i\pm1/2}$ определяется равенствами

$$\chi_{i+1/2} = \chi\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),\ \chi_{i-1/2} = \chi\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right),$$
$$\chi_i = \chi(x_i),\ f_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+1}).$$

После такой замены интегральное уравнение баланса тепла превращается в дискретное уравнение баланса тепла для элементарной ячейки

$$hu_i^{j+1} - hu_i^j = \tau W_{i-1/2}^{j+1} - \tau W_{i+1/2}^{j+1} + \tau h f_i^{j+1},$$

которое после деления на τh дает разностное уравнение

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}\left[\chi_{i+1/2}\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_i^{j+1}}{h}-\chi_{i-1/2}\frac{u_i^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{h}\right]+f_i^{j+1}. \quad (5)$$

Интегро-интерполяционным методом мы получили дискретное уравнение баланса тепла (5) только для элементарной ячейки. Эту задачу в полной математической постановке будем решать интегро–интерполяционным методом на равномерной сетке.

Неявная консервативная разностная схема для задачи (2) имеет вид [17]:

$$\begin{cases}\dfrac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\left[\chi_{i+1/2}\dfrac{u_{i+1}^{j+1}-u_i^{j+1}}{h^2}-\chi_{i-1/2}\dfrac{u_i^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right]+f_i^{j+1},\\ i=1,2,\ldots,N_1-1,\ \ j=0,1,\ldots,N_2-1,\\ u_i^0=u_0(x_i),\ i=0,1,\ldots,N_1,\\ u_0^{j+1}=\mu_1(t_{j+1}),\ u_{N_1}^{j+1}=\mu_2(t_{j+1}),\ \ j=0,1,\ldots,N_2-1.\end{cases} \quad (6)$$

Оператор $Lu=\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\chi(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ с начальным и краевым условием будет самосопряженным, положительно определенным в $L_2(D)$, а значит, он имеет ограниченный обратный оператор $G=L^{-1}$. С его помощью можно переформулировать задачу (1)–(3) как задачу на минимум функционала (1) при следующих условиях плотности источников:

$$f(\cdot,\cdot)\in L_2(D),\ \ f(x,t)\ge 0,\quad m(x,t)\le (Gf)(x,t)\le M(x,t). \quad (7)$$

Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{bmatrix}\left(\dfrac{1}{\tau}+\dfrac{\chi_{1\pm1/2}}{h^2}\right) & -\dfrac{\chi_{1+1/2}}{h^2} & 0 & \cdots & 0\\ -\dfrac{\chi_{i-1/2}}{h^2} & \left(\dfrac{1}{\tau}+\dfrac{\chi_{i\pm1/2}}{h^2}\right) & -\dfrac{\chi_{i+1/2}}{h^2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & -\dfrac{\chi_{i-1/2}}{h^2} & \left(\dfrac{1}{\tau}+\dfrac{\chi_{i\pm1/2}}{h^2}\right) & -\dfrac{\chi_{i+1/2}}{h^2}\\ 0 & \cdots & \cdots & -\dfrac{\chi_{(N_1-1)-1/2}}{h^2} & \left(\dfrac{1}{\tau}+\dfrac{\chi_{(N_1-1)\pm1/2}}{h^2}\right)\end{bmatrix}.$$

Получаем

$$G=A^{-1}.$$

Построим консервативную аппроксимацию (1)–(7) в виде задачи линейного программирования. Разобьём область D по x на N_1, и по t на N_2 равных частей: $D=\bigcup_{j=1}^{N_2}\bigcup_{i=1}^{N_1} D_i^j$, где $D_i^j=\{(x,t)$, $x_{i-1}\le x\le x_i$, $t_{j-1}\le t\le t_j\}$, $i=1,2,\ldots,N_1$, $j=1,2,\ldots,N_2$. Обозначим через $S_{N_1}^{N_2}(D)$ подпространство пространства $L_2(D)$, в котором определены кусочно-постоянные функции вида $f(x,t)=f_i^j$, $(x,t)\in D_i^j$ $(i=1,2,\ldots,N_1-1$, $j=1,2,\ldots,N_2)$. Введем в $S_{N_1}^{N_2}(D)$ базис, состоящий из функций $e_i^j(x,t)=1$, $(x,t)\in D_i^j$ и $e_i^j(x,t)=0$, $(x,t)\notin D_i^j$. Тогда $f(x,t)\approx\sum_{i=1}^{N_1-1} f_i^j e_i^j(x,t)$. Пусть $g_{ik}=(Ge_i^j,e_i^j)$, $(m(x,t),e_i^j(x,t))=m_i^j$, $(M(x,t),e_i^j(x,t))=M_i^j$ $i=\overline{1,N_1-1}$, $k=\overline{1,N_1-1}$, $j=\overline{1,N_2}$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(D)$. Подставим выражение для $f(x,t)$ в (1) и скалярно умножаем неравенства (7) на $e_i^j(x,t)$ в $L_2(D)$. Получим задачу линейного программирования

$$
\begin{gathered}
J_j\{f\}=\sum_{i=1}^{N_1-1}(mesD_i^j)f_i^j\to\min,\quad j=1,2,\ldots,N_2,\\
m_i^j\le\sum_{k=1}^{N_1-1} g_{ik}f_k^j\le M_i^j,\quad i=1,2,\ldots,N_1-1,\quad j=1,2,\ldots,N_2,\\
f_k^j\ge 0,\quad k=1,2,\ldots,N_1-1,\quad j=1,2,\ldots,N_2.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Решая задачу (8) численными методами, находим функцию $u_i^j=\sum_{k=1}^{N_1-1} g_{ik}f_k^j$, которая является решением краевой задачи (2) с f_k^j. При этом задача (8) решается симплекс-методом [18].

Описание алгоритмов и результатов численных экспериментов. Для приближенного решения задачи (1)–(8) разработано программное приложение, написанное на языке C#, в котором не используются сторонние математические библиотеки. Данное программное приложение позволяет принимать все необходимые входные данные: константы, коэффициенты, параметры сеток, в том числе начальное и краевые условия, функции температур в виде скриптов на языке C#. Для представления результатов разработаны графические модули. Программное приложение использует сведение задачи к задаче (8) при равномерном разбиении области по каждой координатной оси. На блок-схеме приведен общий алгоритм решения задачи с использованием численного метода для вычисления функции f_i^j (рис. 1).

Эксперимент 1. Найдем оптимальную плотность распределения источников на отрезке. В качестве расчётной области возьмём отрезок $x \in [0, 1]$ с функцией теплопроводности $\chi(x) = x^2$ м²/с. Для определения начальных и граничных условий зададим функцию $u_0(x) = 2 + x^2$ м/с, $\mu_1(t) = 2 + t^2$ м/с, $\mu_2(t) = 3 + t^2$ м/с. Ограничивающие температурные кривые зададим функциями $m(x,t) = 1 + x^2 + t^2$ K, $M(x,t) = 4 + x^2 + t^2$ K, окончание времени $T = 1$. Расчётная сетка с числом источников $N_2 \times (N_1 - 1) = 50 \times 49$. На рис. 2 представлен результат численного решения задачи (8). При численном решении минимум значения функционала равен $J_{\min} = 2952,69$ K·м/с. На рис. 2 показаны результаты минимальных (границы с синим цветом), максимальных (границы с красным цветом) и приближенных (зеленым цветом) значений температур. Для иллюстрации эффективности разработанного метода на рис. 3 показано оптимальное распределение источников в виде поверхности различного цвета.

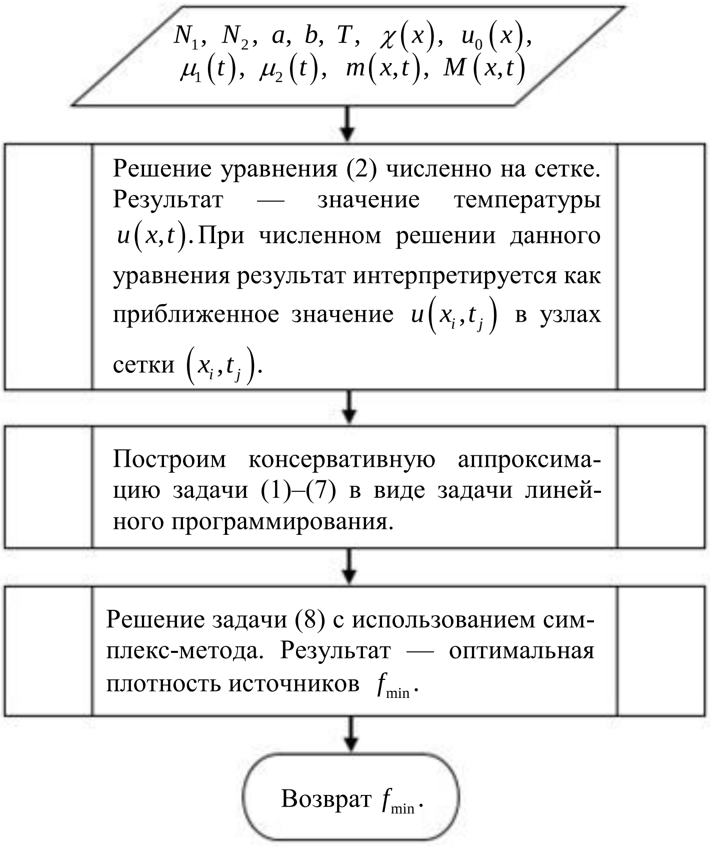

Рис. 1. Блок-схема общего алгоритма решения задачи

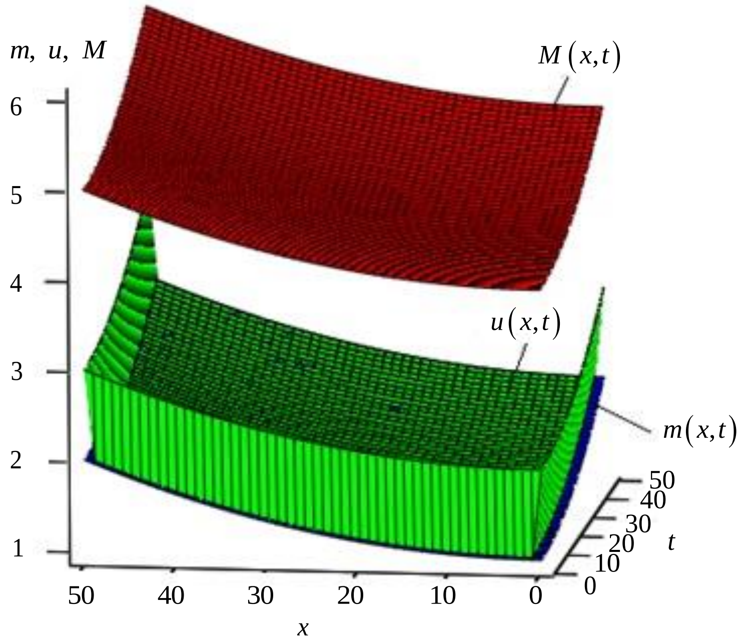

Рис. 2. График решения задачи (8), эксперимент 1

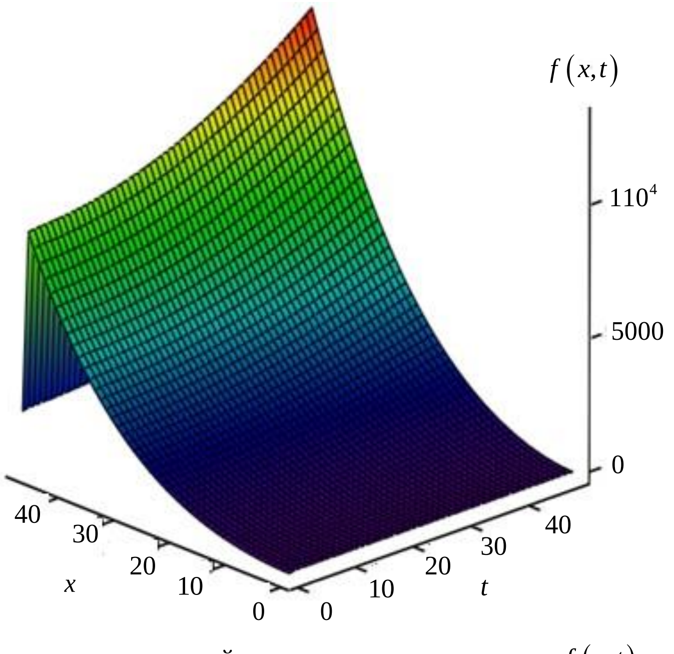

Рис. 3. Распределение оптимальной плотности источников тепла $f(x,t)$, эксперимент 1

Эксперимент 2. При тех же входных параметрах области проведём вычисления с функцией теплопроводности $\chi(x) = 1 + x$ м²/с. Расчётная сетка с числом источников $N_2 \times (N_1 - 1) = 50 \times 49$.

На рис. 4 представлен результат численного решения задачи (8).

При численном решении минимум значения функционала равен $J_{\min} = 3982{,}68$ К · м/с. На рис. 4 показаны результаты минимальных (границы с синим цветом), максимальных (границы с красным цветом) и приближенных (зеленым цветом) значений температур. Для иллюстрации эффективности разработанного метода на рис. 5 показано оптимальное распределение источников в виде поверхности различного цвета.

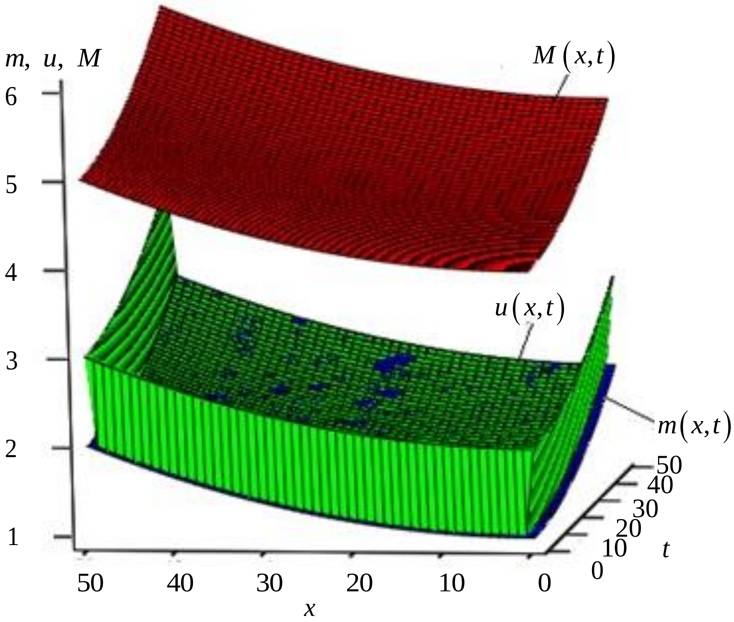

Рис. 4. График решения задачи (8), эксперимент 2

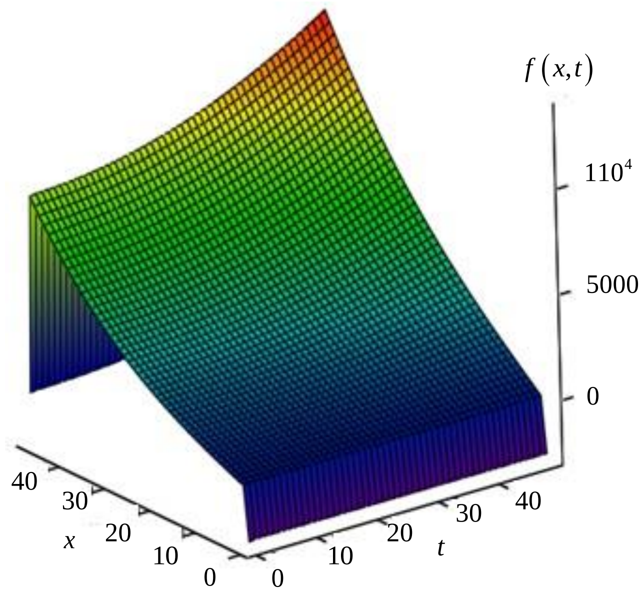

Рис. 5. Распределение оптимальной плотности источников тепла $f(x,t)$, эксперимент 2

Эксперимент 3. При тех же входных параметрах области проведём вычисления с функцией теплопроводности

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 0,5, \\ 2, & 0,5 < x < 1. \end{cases} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Расчётная сетка с числом источников $N_2 \times (N_1 - 1) = 50 \times 49$. На рис. 6 представлен результат численного решения задачи (8). При численном решении минимум значения функционала равен $J_{\min} = 4430,7$ К·м/с. На рис. 6 показаны результаты минимальных (границы с синим цветом), максимальных (границы с красным цветом) и приближенных (зеленым цветом) значений температур. Для иллюстрации эффективности разработанного метода на рис. 7 показано оптимальное распределение источников в виде поверхности различного цвета.

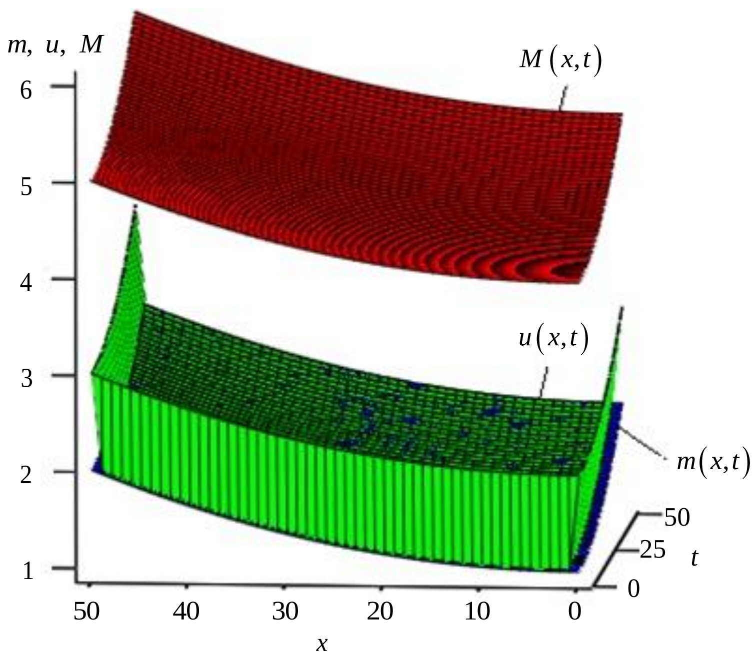

Рис. 6. График решения задачи (8), эксперимент 3

Выводы. В работе исследован вопрос о принципиальной возможности численного решения задачи нахождения плотности источников тепла минимальной суммарной мощности, которая обеспечивает заданный температурный режим в области, заполненной неоднородной неподвижной средой. Разработаны алгоритмы численного решения этой задачи, основанные на ее сведении к решению консервативной конечномерной задачи (8) линейного программирования. В результате проведенных вычислительных экспериментов для неподвижной неоднородной среды подтверждена эффективность разработанных алгоритмов и всей методики в целом.

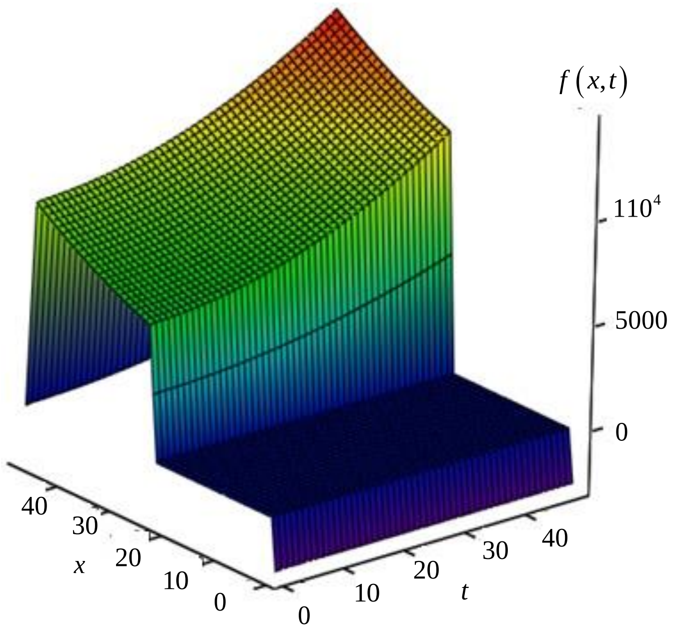

Рис. 7. Распределение оптимальной плотности источников тепла $f(x,t)$, эксперимент 3

Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований (проект ОТ-Ф4-33).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бутковский А.Г. *Методы управления системами с распределенными параметрами*. Москва, Наука, 1975, 568 с.

[2] Ахметзянов А.В, Кулибанов В.Н. Оптимальное размещение источников для стационарных скалярных полей. *Автоматика и телемеханика*, 1999, № 6, с. 50–58.

[3] Мирская С.Ю, Сидельников В.И. Экономичный обогрев помещения как задача оптимального управления. *Технико-технологические проблемы сервиса*, 2014, № 4(30), с. 75–78.

[4] Сабденов К.О, Байтасов Т.М. Оптимальное (энергоэффективное) теплоснабжение здания в системе центрального отопления. *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*, 2015, т. 326, № 8. с. 53–60.

[5] Моисеенко Б.Д, Фрязинов И.В. Консервативные разностные схемы для уравнений несжимаемой вязкой жидкости в переменных Эйлера. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1981, т. 21, № 5, с. 1180–1191.

[6] Аристов В.В, Черемисин Ф.Г. Консервативный метод расщепления для решения уравнения Больцмана. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1980, т. 20, № 1, с. 191–207.

[7] Исламов Г.Г, Коган Ю.В. Дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2008, вып. 1, с. 121–126.

[8] Тухтасинов М.Т., Абдуолимова Г.М., Хайиткулов Б.Х. Граничное управление распространением тепла в ограниченном теле. *Бюллетень Института математики*, 2019, № 5, с. 1–10.

[9] Агошков В.И. *Методы оптимального управления и сопряжённых уравнений в задачах математической физики*. Москва, ИВМ РАН, 2003, 256 с.

[10] Егоров А.И. *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*. Москва, Наука, 1978, 464 с.

[11] Лионс Ж.Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*. Москва, Мир, 1972, 412 с.

[12] Федоренко Р.П. *Приближённое решение задач оптимального управления*. Москва, Наука, 1978, 497 с.

[13] Васильева М.В., Васильев В.И., Тырылгин А.А. Консервативная разностная схема для задач фильтрации в трещиноватых средах. *Математические заметки СВФУ*, 2018, т. 25, № 4, с. 84–101.

[14] Алифанов О.М. *Обратные задачи теплообмена*. Москва, Машиностроение, 1988, 280 с.

[15] Khaitkulov B.Kh. Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body. *Solid State Technology*, 2020, vol. 63, iss. 4, pp. 583−592.

[16] Хайиткулов Б.Х. Численное решение нестационарной задачи об оптимальном выборе источников тепла в стержне. *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, 2020, № 5 (29), с. 141−146.

[17] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики. 7-е изд.* Москва, Наука, 2004, 798 с.

[18] Сигал И.Х., Иванова А.П. *Методы оптимизации. Начальный курс. Курс лекций по дисциплине “Методы оптимизации”. Часть 2. Симплекс-метод и смежные вопросы, элементы теории двойственности, многокритериальная оптимизация*. Москва, МИИТ, 2006, 104 с.

Статья поступила в редакцию 12.11.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Хайиткулов Б.Х. Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 3, с. 85–98.

Хайиткулов Бобомурод Хайитович — аспирант кафедры «Алгоритмы и технологии программирования» Национального Университета Узбекистана. Область научных интересов: приближенные и численные методы решения уравнений математической физики и задач оптимального управления, математическое моделирование. ORCID: 0000-0001-7449-3950. e-mail: b.hayitqulov@mail.ru

Conservative difference schemes for the optimal selection of the location of heat sources in the rod

© B.Kh. Khayitkulov

National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174, Uzbekistan

In this paper, we have developed a method and an algorithm for solving the problem of the optimal selection of the density of heat sources on the rod in such a way that the temperature inside the considered area is within the specified limits is developed. In this case, the *heat sources must provide the specified temperature regime of the minimum total power and temperature in the specified temperature corridor. Conservative finite-dimensional approximations of the original problem are constructed in the form of a linear programming problem. A method for constructing conservative difference schemes for solving the heat conduction equation with variable coefficients, a brief description of the developed software application for constructing computational grids and solving equations is presented. A new method for the numerical solution of non-stationary problems of optimal selection of heat sources in a rod is proposed and substantiated. A software application has been created for carrying out numerical experiments to solve the problem. The description of the based algorithm and the results of numerical experiments are given.*

Keywords: *nonstationary problems, optimal selection, heat sources, heat equation, balance equation, conservation law, integro-interpolation method, implicit schemes, conservative schemes, simplex method*

REFERENCES

[1] Butkovskiy A.G. *Metody upravlenija sistemami s raspredelennymi parametrami* [Methods of controlling distributed parameter systems]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 568 p.

[2] Akhmetzyanov A.V., Kulibanov V.N. Optimal source placement of stationary scalar fields. *Automation and Remote Control*, 1999, vol. 60, iss. 6, pp. 797–804.

[3] Mirskay S.Yu., Sidelnikov V.I. Efficient heating of the room as the optimal control problem. *Tehniko-tehnologicheskie problemy servisa* [Technical and Technological Problems of Service], 2014, no. 4(30), pp. 75–78.

[4] Sabdenov K.O., Baytasov T.M. Optimal (energy efficient) heat supply to buildings in central heating system. *Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov* [News of Tomsk Polytechnic University. Geo-Resource Engineering], 2015, vol. 326, no. 8, pp. 53–60.

[5] Moiseenko B.D., Fryazinov I.V. Conservative difference schemes for the equations of an incompressible viscous fluid in Euler variables. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1981, vol. 21, iss. 5, pp. 108–120.

[6] Aristov V.V., Cheremisin F.G. The conservative splitting method for solving Boltzmann's equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1980, vol. 20, iss. 1, pp. 208–225.

[7] Islamov G.G., Kogan Yu.V. The difference-differential problem of control by diffusion process. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Komp'juternye nauki* [Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki], 2008, iss. 1, pp. 121–126.

[8] Tukhtasinov M., Abduolimova G.M., Khayitkulov B.Kh. Granichnoe upravlenie rasprostraneniem tepla v ogranichennom tele [Boundary control of heat propagation in a bounded body]. *Bjulleten' Instituta matematiki* [Bulletin of the Institute of Mathematics], 2019, no. 1, pp. 1–10.

[9] Agoshkov V.I. *Metody optimal'nogo upravlenija i soprjazhjonnyh uravnenij v zadachah matematicheskoj fiziki* [Optimal control methods and conjugate equations in problems of mathematical physics]. Moscow, IVM RAN Publ., 2003, 256 p.

[10] Egorov A.I. *Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi processami* [Optimal control of thermal and diffusion processes]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 464 p.

[11] Lions Zh.L. *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravnenijami s chast-nymi proizvodnymi* [Optimal control of systems described by partial differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1972, 412 p.

[12] Fedorenko R.P. *Priblizhjonnoe reshenie zadach optimal'nogo upravlenija* [An approximate solution of optimal control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 497 p.

[13] Vasil'eva M.V., Vasil'ev V.I., Tyrylgin A.A. Conservative difference scheme for filtering problems in fractured media. *Mathematical Notes of NEFU*, 2018, vol. 25, no. 4, pp. 84–101.
[14] Alifanov O.M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse heat transfer problems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 280 p.
[15] Khaitkulov B.Kh. Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body. *Solid State Technology*, 2020, vol. 63, iss. 4, pp. 583−592.
[16] Khayitkulov B.Kh. Numerical solution of the non-stationary problem of optimal selection of heat sources in a rod. *Problems of Computational and Applied Mathematics*, 2020, no. 5 (29), pp. 141−146.
[17] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravnenija matematicheskoj fiziki. 7-e izd.* [Equations of Mathematical Physics. 7-th Edition]. Moscow, Nauka Publ., 2004, 798 p.
[18] Sigal I.Kh., Ivanova A.P. *Metody optimizacii. Nachal'nyj kurs. Kurs lekcij po discipline “Metody optimizacii”. Chast 2. Simpleks-metod i smezhnye voprosy, jelementy teorii dvojstvennosti, mnogokriterial'naja optimizacija* [Optimization methods. Initial course. A course of lectures on the discipline “Methods of optimization”. Part 2. Simplex method and related issues, elements of duality theory, multicriteria optimization]. Moscow, MIIT Publ., 2006, 104 p.

Khayitkulov B.Kh., PhD student of the Department of Algorithms and Programming Technologies of the National University of Uzbekistan. Research interests: approximate and numerical methods for solving equations of mathematical physics and optimal control problems, mathematical modeling. ORCID: 0000-0001-7449-3950.
e-mail: b.hayitqulov@mail.ru