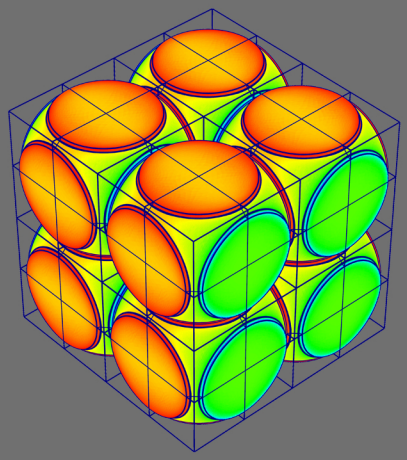
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Хайиткулов Б.Х. Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне. Математическое моделирование и численные методы, 2020, № 3, с. 85–98.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/230/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.210
01.02.2026 13:56:42

УДК 519.6 DOI: 10.18698/2309-3684-2020-8598

Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне

© Б.Х. Хайиткулов

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, 100174, Узбекистан

В данной работе разработан метод и алгоритм решения задач об оптимальном выборе плотности источников тепла на стержне таким образом, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла должны обеспечить заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном температурном коридоре. Строятся консервативные конечномерные аппроксимации исходной задачи в виде задачи линейного программирования. Приводится метод построения консервативных разностных схем для решения уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами, краткое описание разработанного программного приложения для построения расчётных сеток и решения уравнений. Предлагается и обосновывается новый метод численного решения нестационарных задач оптимального выбора источников тепла в стержне. Создано программное приложение для проведения численных экспериментов решения поставленной задачи. Приводятся описание основанного алгоритма и результатов численных экспериментов.

Ключевые слова: *нестационарные задачи, оптимальный выбор, источники тепла, уравнение теплопроводности, уравнение баланса, закон сохранения, интегро-интерполяционный метод, неявные схемы, консервативные схемы, симплекс-метод*

Введение. Одним из видов объектов, широко распространенных в различных областях человеческой деятельности, являются источники тепла на границе, обеспечивающие тепло в состоянии нестационарного теплового баланса с окружающей средой. Понятно, что температура внутри тела зависит от температуры греющей среды, находящейся на границе области. В типичной постановке задача об оптимальном выборе мощности греющей среды состоит в том, чтобы создаваемое источниками температурное поле внутри тела находилось в данном коридоре. Подобные задачи возникают в организации обогрева жилых и производственных помещений, теплиц и при необходимости поддержания заданного температурного режима в однородных и неоднородных твердых телах [1]. Они допускают ряд постановок, которые не эквивалентны из-за различий в критериях оптимизации. Здесь мы рассматриваем задачу нахождения плотности источников тепла минимальной мощности, которая обеспечивает заданный температурный режим в некотором теле в условиях ее нестационарного теплового баланса с окружающей средой. В работе [2] предложено решение задачи оптимального размещения источников в неоднородных средах, скалярные стационарные поля в которых описываются эллиптическими уравнениями. В основу алгоритмов решения задачи

положены эффективные способы оценки значений функционала на множестве возможных мест размещения источников, что дает возможность выбора оптимального варианта путем реализации метода ветвей и границ в каждом конкретном случае. В работе [3] исследуются задачи оптимального нагрева помещения на основе принципа максимума Понтрягина. Приведена методика расчетов оптимального управления переходными режимами при натопе помещения. Работа [4] посвящена формулировке в явном виде математической задачи по оптимизации теплоснабжения в смысле ее энергетической эффективности и поиску ее решений. В работе [5] рассмотрены случаи несжимаемой вязкой жидкости и предлагаются разностные схемы, отражающие свойства исходных уравнений: сеточная аппроксимация нелинейных членов переноса не дает вклада в баланс энергии и энтропии. Схемы строятся на неравномерной сетке в прямоугольнике интегро–интерполяционным методом. В работе [6] изучаются кинетические уравнения Больцмана на основе метода расщепления по физическим факторам, а также построен консервативный алгоритм численного решения. Дана формулировка соответствующих дискретных граничных и начальных условий. На ряде примеров показана эффективность метода, позволяющего значительно увеличить точность вычислений. В работе [7] изучена дифференциально–разностная задача управления процессом диффузии, получен аналог принципа максимума, позволяющий определить такие моменты включения и выключения максимальной мощности источника, при которых внутри параллелепипеда устанавливается допустимый уровень его концентрации при наблюдаемом уровне концентрации этого вещества на границе параллелепипеда. В работе [8] рассмотрена третья краевая задача параболического типа. Распределение тепла в рассматриваемом теле контролируется функцией, которая находится на границе тела; решена задача, в случае конфликта, о возможности перевода исходного положения тела в нужное состояние. С математической точки зрения эта задача относится к задачам оптимального управления [9, 10] для эллиптических краевых задач. Существование решения и общие свойства подобных задач для квадратичных целевых функционалов, а также приближенные методы их решения изучались рядом авторов [11–13]. Нашу задачу можно отнести также к обратным задачам теплопроводности, методы приближенного решения которых рассмотрены в [14]. В работах [15, 16] разработаны методы и алгоритмы решения нестационарных задач об оптимальном выборе плотности источников тепла на простых физических телах таким образом, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла должны обеспечить заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре, заполненной однородной или неоднородной средой.

В настоящей работе рассматривается задача нахождения распределения плотности источников тепла, которая обеспечивает заданный температурный режим при минимальной суммарной мощности этих источников. Предлагаются метод и алгоритм решения нестационарных задач при оптимальном выборе плотности источников тепла на стержне таким образом, чтобы температура находилась в заданных пределах. Создано программное приложение для проведения вычислительных экспериментов с помощью этого алгоритма.

Постановка задачи и ее консервативная аппроксимация. В прямоугольнике $D=\{a\le x\le b,\, 0\le t\le T\}$ требуется определить функцию $f(x,t)\ge 0$, доставляющую при каждом $t\in[0,T]$ минимум линейному функционалу

$$J\{f\}=\int_a^b f(x,t)dx\to\min, \tag{1}$$

при следующих условиях:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x,t),\ \ a<x<b,\, 0<t\le T,\\ u(x,0)=u_0(x),\ a\le x\le b,\\ u(a,t)=\mu_1(t),\ 0<t\le T,\\ u(b,t)=\mu_2(t),\ 0<t\le T,\end{gathered} \tag{2}$$

$$m(x,t)\le u(x,t)\le M(x,t),\ \ (x,t)\in D. \tag{3}$$

Здесь $u=u(x,t)$ — температура стержня в точке x в момент времени t; $\chi(x)>0$ — коэффициент теплопроводности; $u_0(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $m(x,t)$, $M(x,t)$ — заданные функции. Функции $m(x,t)$, $M(x,t)$ имеют смысл функций минимального и максимального профиля температуры в области D соответственно. Плотность источников тепла описывается квадратично интегрируемой функцией $f(x,t)$ в пространстве $L_2(D)$. Решение данной краевой задачи можно получить в аналитическом виде с использованием метода Фурье [17].

Введем в D равномерную по обеим переменным разностную сетку $\bar\omega_{h\tau}=\bar\omega_h\times\bar\omega_\tau=\{(x_i=ih,\, t_j=j\tau),\ i=0,1,\ldots,N_1,\ j=0,1,\ldots,N_2\}$ с шагами $h=(b-a)/N_1$, $\tau=T/N_2$.

Для получения однородных консервативных разностных схем воспользуемся интегро-интерполяционным методом.

В основе дифференциального уравнения теплопроводности лежит интегральный закон сохранения тепла (уравнение баланса):

$$\int_{x}^{x+\Delta x} u(\xi,t+\Delta t)d\xi - \int_{x}^{x+\Delta x} u(\xi,t)d\xi =$$
$$= \int_{t}^{t+\Delta t} W(x,\tau)d\tau - \int_{t}^{t+\Delta t} W(x+\Delta x,\tau)d\tau + \int_{t}^{t+\Delta t}\int_{x}^{x+\Delta x} f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{4}$$

где Δt и Δx произвольные числа, $u(x,t)$ — температура, $W(x,t)$ — поток тепла

$$W(x,t) = -\chi(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Для получения разностного уравнения рассмотрим интегральное уравнение баланса тепла на элементарной ячейке сетки на отрезке $x_{i-1/2} \le x \le x_{i+1/2}$ за промежуток времени $t_j \le t \le t_{j+1}$:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_{j+1})dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_j)dx =$$
$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i-1/2},t)dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i+1/2},t)dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x,t)dxdt.$$

Аппроксимируем входящие в уравнение баланса интегралы приближенными формулами [17]

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_{j+1})dx \approx hu_i^{j+1}; \quad \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_j)dx \approx hu_i^{j}; \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i-1/2},t)dt \approx \tau W_{i-1/2}^{j+1};$$
$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i+1/2},t)dt \approx \tau W_{i+1/2}^{j+1}; \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x,t)dxdt \approx \tau h f_i^{j+1},$$
$$W_{i+1/2}^{j+1} = -\chi_{i+1/2}\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_i^{j+1}}{h}; \quad W_{i-1/2}^{j+1} = -\chi_{i-1/2}\frac{u_i^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{h}.$$

При этом $\chi_{i\pm1/2}$ определяется равенствами

$$\chi_{i+1/2} = \chi\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right), \quad \chi_{i-1/2} = \chi\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right),$$
$$\chi_i = \chi(x_i), \quad f_i^{j+1} = f(x_i,t_{j+1}).$$

После такой замены интегральное уравнение баланса тепла превращается в дискретное уравнение баланса тепла для элементарной ячейки

$$hu_i^{j+1} - hu_i^{j} = \tau W_{i-1/2}^{j+1} - \tau W_{i+1/2}^{j+1} + \tau h f_i^{j+1},$$

которое после деления на τh дает разностное уравнение

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}\left[\chi_{i+1/2}\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_i^{j+1}}{h}-\chi_{i-1/2}\frac{u_i^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{h}\right]+f_i^{j+1}. \qquad (5)$$

Интегро-интерполяционным методом мы получили дискретное уравнение баланса тепла (5) только для элементарной ячейки. Эту задачу в полной математической постановке будем решать интегро–интерполяционным методом на равномерной сетке.

Неявная консервативная разностная схема для задачи (2) имеет вид [17]:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\left[\chi_{i+1/2}\dfrac{u_{i+1}^{j+1}-u_i^{j+1}}{h^2}-\chi_{i-1/2}\dfrac{u_i^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right]+f_i^{j+1}, \\ i=1,2,\ldots,N_1-1,\ \ j=0,1,\ldots,N_2-1, \\ u_i^0=u_0(x_i),\ \ i=0,1,\ldots,N_1, \\ u_0^{j+1}=\mu_1(t_{j+1}),\ \ u_{N_1}^{j+1}=\mu_2(t_{j+1}),\ \ j=0,1,\ldots,N_2-1. \end{cases} \qquad (6)$$

Оператор $Lu=\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\chi(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ с начальным и краевым условием будет самосопряженным, положительно определенным в $L_2(D)$, а значит, он имеет ограниченный обратный оператор $G=L^{-1}$. С его помощью можно переформулировать задачу (1)–(3) как задачу на минимум функционала (1) при следующих условиях плотности источников:

$$f(\cdot,\cdot)\in L_2(D),\ \ f(x,t)\ge 0,\quad m(x,t)\le (Gf)(x,t)\le M(x,t). \qquad (7)$$

Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{bmatrix} \left(\dfrac{1}{\tau}+\dfrac{\chi_{1\pm1/2}}{h^2}\right) & -\dfrac{\chi_{1+1/2}}{h^2} & 0 & \ldots & 0 \\ -\dfrac{\chi_{i-1/2}}{h^2} & \left(\dfrac{1}{\tau}+\dfrac{\chi_{i\pm1/2}}{h^2}\right) & -\dfrac{\chi_{i+1/2}}{h^2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -\dfrac{\chi_{i-1/2}}{h^2} & \left(\dfrac{1}{\tau}+\dfrac{\chi_{i\pm1/2}}{h^2}\right) & -\dfrac{\chi_{i+1/2}}{h^2} \\ 0 & \ldots & \ldots & -\dfrac{\chi_{(N_1-1)-1/2}}{h^2} & \left(\dfrac{1}{\tau}+\dfrac{\chi_{(N_1-1)\pm1/2}}{h^2}\right) \end{bmatrix}.$$

Получаем

$$G=A^{-1}.$$

Построим консервативную аппроксимацию (1)–(7) в виде задачи линейного программирования. Разобьём область D по x на N_1, и по t на N_2 равных частей: $D=\bigcup_{j=1}^{N_2}\bigcup_{i=1}^{N_1} D_i^j$, где $D_i^j=\{(x,t)$, $x_{i-1}\le x\le x_i$, $t_{j-1}\le t\le t_j\}$, $i=1,2,\ldots,N_1$, $j=1,2,\ldots,N_2$. Обозначим через $S_{N_1}^{N_2}(D)$ подпространство пространства $L_2(D)$, в котором определены кусочно-постоянные функции вида $f(x,t)=f_i^j$, $(x,t)\in D_i^j$ $(i=1,2,\ldots,N_1-1$, $j=1,2,\ldots,N_2)$. Введем в $S_{N_1}^{N_2}(D)$ базис, состоящий из функций $e_i^j(x,t)=1$, $(x,t)\in D_i^j$ и $e_i^j(x,t)=0$, $(x,t)\notin D_i^j$. Тогда $f(x,t)\approx\sum_{i=1}^{N_1-1} f_i^j e_i^j(x,t)$. Пусть $g_{ik}=(Ge_i^j,e_i^j)$, $(m(x,t),e_i^j(x,t))=m_i^j$, $(M(x,t),e_i^j(x,t))=M_i^j$ $i=\overline{1,N_1-1}$, $k=\overline{1,N_1-1}$, $j=\overline{1,N_2}$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(D)$. Подставим выражение для $f(x,t)$ в (1) и скалярно умножаем неравенства (7) на $e_i^j(x,t)$ в $L_2(D)$. Получим задачу линейного программирования

$$J_j\{f\}=\sum_{i=1}^{N_1-1}(mesD_i^j)\,f_i^j\to\min,\quad j=1,2,\ldots,N_2,$$

$$m_i^j\le\sum_{k=1}^{N_1-1}g_{ik}f_k^j\le M_i^j,\quad i=1,2,\ldots,N_1-1,\quad j=1,2,\ldots,N_2, \tag{8}$$

$$f_k^j\ge 0,\quad k=1,2,\ldots,N_1-1,\quad j=1,2,\ldots,N_2.$$

Решая задачу (8) численными методами, находим функцию $u_i^j=\sum_{k=1}^{N_1-1}g_{ik}f_k^j$, которая является решением краевой задачи (2) с f_k^j. При этом задача (8) решается симплекс-методом [18].

Описание алгоритмов и результатов численных экспериментов. Для приближенного решения задачи (1)–(8) разработано программное приложение, написанное на языке C#, в котором не используются сторонние математические библиотеки. Данное программное приложение позволяет принимать все необходимые входные данные: константы, коэффициенты, параметры сеток, в том числе начальное и краевые условия, функции температур в виде скриптов на языке C#. Для представления результатов разработаны графические модули. Программное приложение использует сведение задачи к задаче (8) при равномерном разбиении области по каждой координатной оси. На блок-схеме приведен общий алгоритм решения задачи с использованием численного метода для вычисления функции f_i^j (рис. 1).

Эксперимент 1. Найдем оптимальную плотность распределения источников на отрезке. В качестве расчётной области возьмём отрезок $x \in [0,1]$ с функцией теплопроводности $\chi(x) = x^2$ м^2/с. Для определения начальных и граничных условий зададим функцию $u_0(x) = 2 + x^2$ м/с, $\mu_1(t) = 2 + t^2$ м/с, $\mu_2(t) = 3 + t^2$ м/с. Ограничивающие температурные кривые зададим функциями $m(x,t) = 1 + x^2 + t^2$ К, $M(x,t) = 4 + x^2 + t^2$ К, окончание времени $T = 1$. Расчётная сетка с числом источников $N_2 \times (N_1 - 1) = 50 \times 49$. На рис. 2 представлен результат численного решения задачи (8). При численном решении минимум значения функционала равен $J_{\min} = 2952,69$ К·м/с. На рис. 2 показаны результаты минимальных (границы с синим цветом), максимальных (границы с красным цветом) и приближенных (зеленым цветом) значений температур. Для иллюстрации эффективности разработанного метода на рис. 3 показано оптимальное распределение источников в виде поверхности различного цвета.

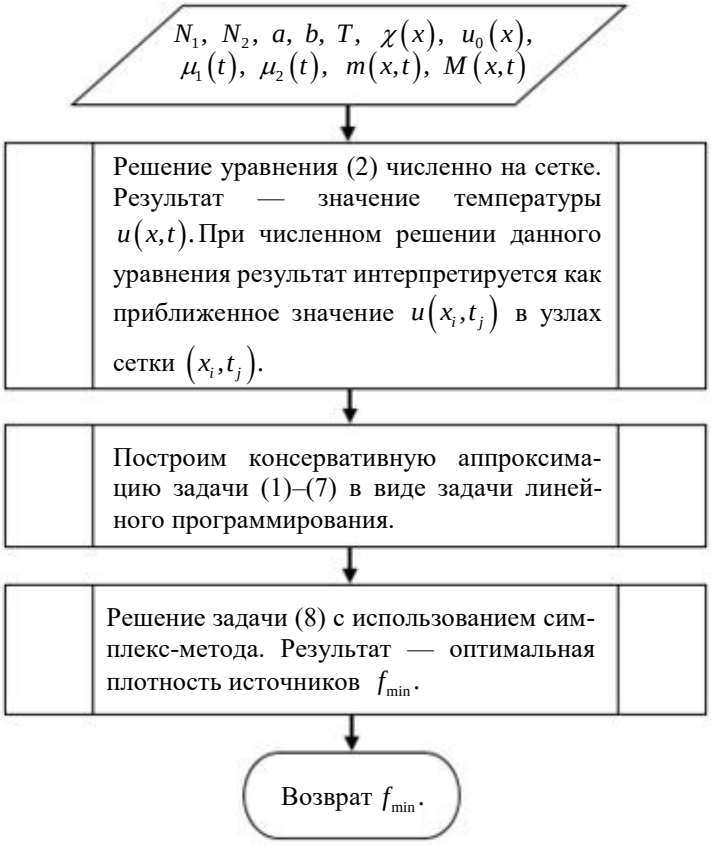


Рис. 1. Блок-схема общего алгоритма решения задачи

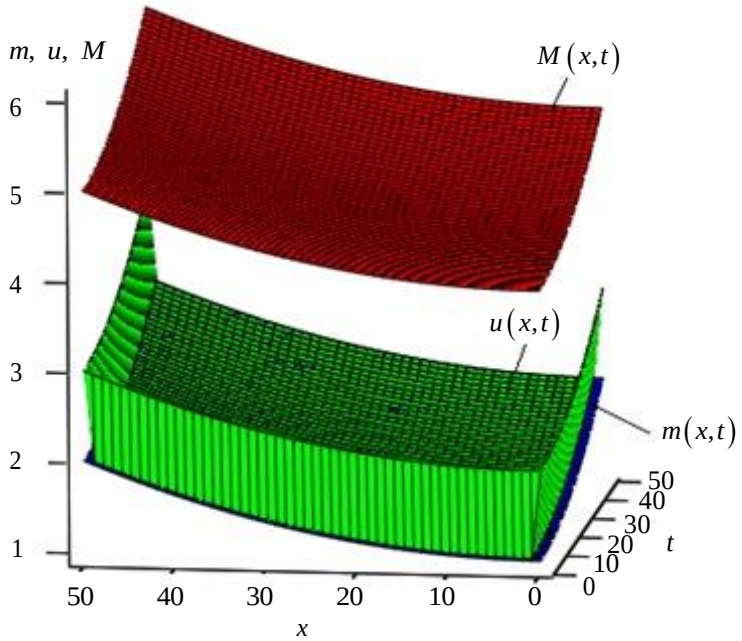


Рис. 2. График решения задачи (8), эксперимент 1

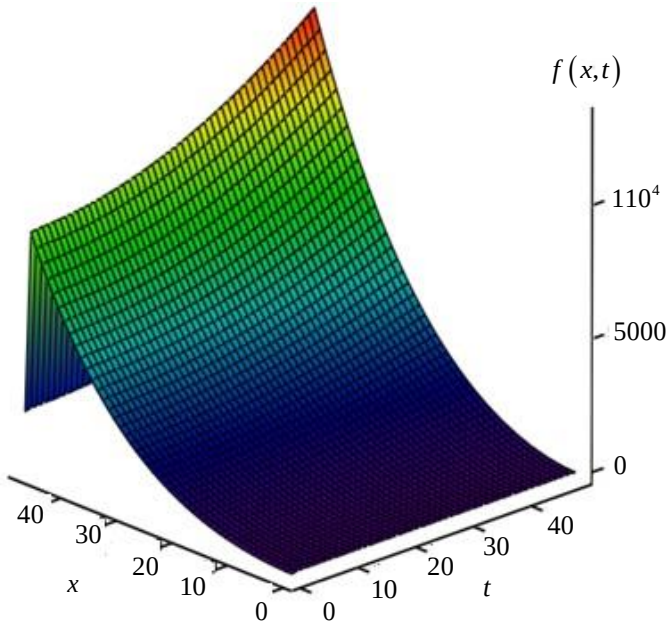


Рис. 3. Распределение оптимальной плотности источников тепла $f(x,t)$, эксперимент 1

Эксперимент 2. При тех же входных параметрах области проведём вычисления с функцией теплопроводности $\chi(x)=1+x$ м^2/с. Расчётная сетка с числом источников $N_2\times(N_1-1)=50\times 49$.

На рис. 4 представлен результат численного решения задачи (8).

При численном решении минимум значения функционала равен $J_{\min} = 3982{,}68$ К·м/с. На рис. 4 показаны результаты минимальных (границы с синим цветом), максимальных (границы с красным цветом) и приближенных (зеленым цветом) значений температур. Для иллюстрации эффективности разработанного метода на рис. 5 показано оптимальное распределение источников в виде поверхности различного цвета.

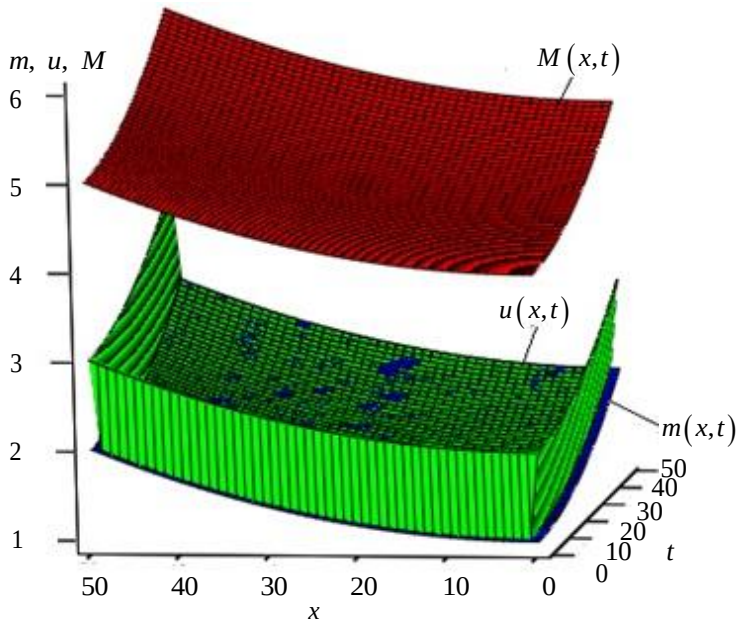


Рис. 4. График решения задачи (8), эксперимент 2

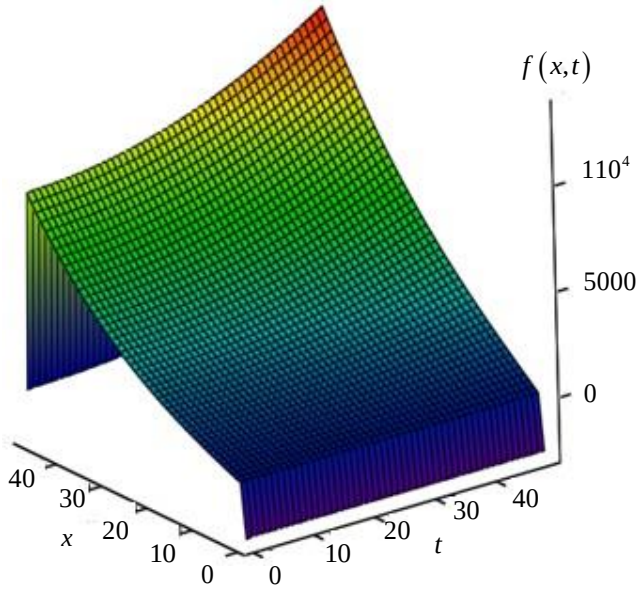


Рис. 5. Распределение оптимальной плотности источников тепла $f(x,t)$, эксперимент 2

Эксперимент 3. При тех же входных параметрах области проведём вычисления с функцией теплопроводности

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & 0<x<0,5,\\ 2, & 0,5<x<1.\end{cases}\ \text{м}^2/\text{с}.$$

Расчётная сетка с числом источников $N_2\times(N_1-1)=50\times 49$. На рис. 6 представлен результат численного решения задачи (8). При численном решении минимум значения функционала равен $J_{\min}=4430{,}7$ К·м/с. На рис. 6 показаны результаты минимальных (границы с синим цветом), максимальных (границы с красным цветом) и приближенных (зеленым цветом) значений температур. Для иллюстрации эффективности разработанного метода на рис. 7 показано оптимальное распределение источников в виде поверхности различного цвета.

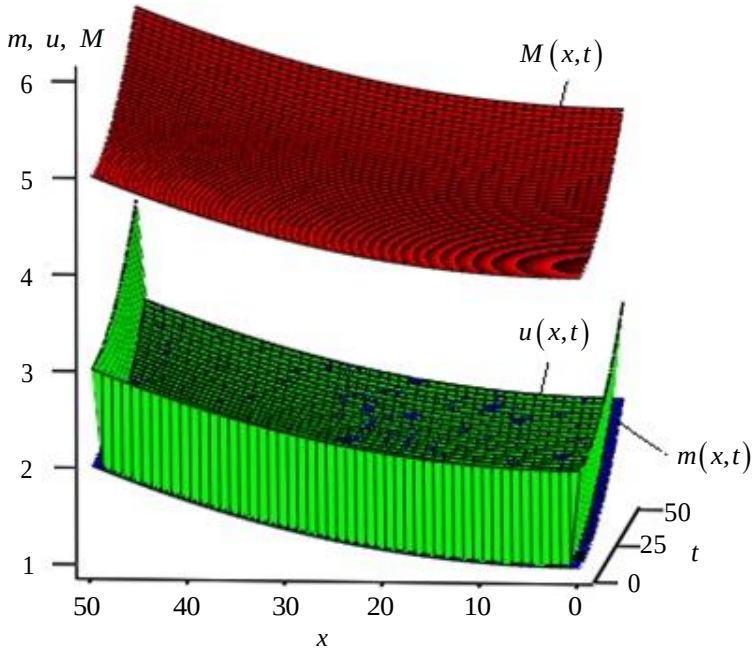


Рис. 6. График решения задачи (8), эксперимент 3

Выводы. В работе исследован вопрос о принципиальной возможности численного решения задачи нахождения плотности источников тепла минимальной суммарной мощности, которая обеспечивает заданный температурный режим в области, заполненной неоднородной неподвижной средой. Разработаны алгоритмы численного решения этой задачи, основанные на ее сведении к решению консервативной конечномерной задачи (8) линейного программирования. В результате проведенных вычислительных экспериментов для неподвижной

неоднородной среды подтверждена эффективность разработанных алгоритмов и всей методики в целом.

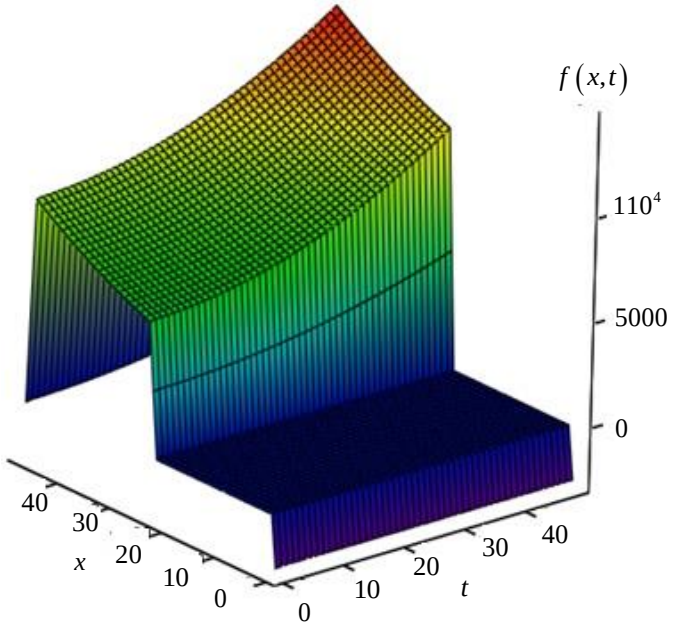


Рис. 7. Распределение оптимальной плотности источников тепла $f(x,t)$, эксперимент 3

Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований (проект ОТ-Ф4-33).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бутковский А.Г. *Методы управления системами с распределенными параметрами*. Москва, Наука, 1975, 568 с.

[2] Ахметзянов А.В, Кулибанов В.Н. Оптимальное размещение источников для стационарных скалярных полей. *Автоматика и телемеханика*, 1999, № 6, с. 50–58.

[3] Мирская С.Ю, Сидельников В.И. Экономичный обогрев помещения как задача оптимального управления. *Технико-технологические проблемы сервиса*, 2014, № 4(30), с. 75–78.

[4] Сабденов К.О, Байтасов Т.М. Оптимальное (энергоэффективное) теплоснабжение здания в системе центрального отопления. *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*, 2015, т. 326, № 8. с. 53–60.

[5] Моисеенко Б.Д, Фрязинов И.В. Консервативные разностные схемы для уравнений несжимаемой вязкой жидкости в переменных Эйлера. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1981, т. 21, № 5, с. 1180–1191.

[6] Аристов В.В, Черемисин Ф.Г. Консервативный метод расщепления для решения уравнения Больцмана. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1980, т. 20, № 1, с. 191–207.

[7] Исламов Г.Г, Коган Ю.В. Дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2008, вып. 1, с. 121–126.

[8] Тухтасинов М.Т., Абдуолимова Г.М., Хайиткулов Б.Х. Граничное управление распространением тепла в ограниченном теле. *Бюллетень Института математики*, 2019, № 5, с. 1–10.
[9] Агошков В.И. *Методы оптимального управления и сопряжённых уравнений в задачах математической физики*. Москва, ИВМ РАН, 2003, 256 с.
[10] Егоров А.И. *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*. Москва, Наука, 1978, 464 с.
[11] Лионс Ж.Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*. Москва, Мир, 1972, 412 с.
[12] Федоренко Р.П. *Приближённое решение задач оптимального управления*. Москва, Наука, 1978, 497 с.
[13] Васильева М.В., Васильев В.И., Тырылгин А.А. Консервативная разностная схема для задач фильтрации в трещиноватых средах. *Математические заметки СВФУ*, 2018, т. 25, № 4, с. 84–101.
[14] Алифанов О.М. *Обратные задачи теплообмена*. Москва, Машиностроение, 1988, 280 с.
[15] Khaitkulov B.Kh. Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body. *Solid State Technology*, 2020, vol. 63, iss. 4, pp. 583−592.
[16] Хайиткулов Б.Х. Численное решение нестационарной задачи об оптимальном выборе источников тепла в стержне. *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, 2020, № 5 (29), с. 141−146.
[17] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики. 7-е изд.* Москва, Наука, 2004, 798 с.
[18] Сигал И.Х., Иванова А.П. *Методы оптимизации. Начальный курс. Курс лекций по дисциплине "Методы оптимизации". Часть 2. Симплекс-метод и смежные вопросы, элементы теории двойственности, многокритериальная оптимизация*. Москва, МИИТ, 2006, 104 с.

Статья поступила в редакцию 12.11.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Хайиткулов Б.Х. Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 3, с. 85–98.

Хайиткулов Бобомурод Хайитович — аспирант кафедры «Алгоритмы и технологии программирования» Национального Университета Узбекистана. Область научных интересов: приближенные и численные методы решения уравнений математической физики и задач оптимального управления, математическое моделирование. ORCID: 0000-0001-7449-3950. e-mail: b.hayitqulov@mail.ru

Conservative difference schemes for the optimal selection of the location of heat sources in the rod

© B.Kh. Khayitkulov

National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174, Uzbekistan

In this paper, we have developed a method and an algorithm for solving the problem of the optimal selection of the density of heat sources on the rod in such a way that the temperature inside the considered area is within the specified limits is developed. In this case, the

heat sources must provide the specified temperature regime of the minimum total power and temperature in the specified temperature corridor. Conservative finite-dimensional approximations of the original problem are constructed in the form of a linear programming problem. A method for constructing conservative difference schemes for solving the heat conduction equation with variable coefficients, a brief description of the developed software application for constructing computational grids and solving equations is presented. A new method for the numerical solution of non-stationary problems of optimal selection of heat sources in a rod is proposed and substantiated. A software application has been created for carrying out numerical experiments to solve the problem. The description of the based algorithm and the results of numerical experiments are given.

Keywords: *nonstationary problems, optimal selection, heat sources, heat equation, balance equation, conservation law, integro-interpolation method, implicit schemes, conservative schemes, simplex method*

REFERENCES

[1] Butkovskiy A.G. *Metody upravlenija sistemami s raspredelennymi parametrami* [Methods of controlling distributed parameter systems]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 568 p.

[2] Akhmetzyanov A.V., Kulibanov V.N. Optimal source placement of stationary scalar fields. *Automation and Remote Control*, 1999, vol. 60, iss. 6, pp. 797–804.

[3] Mirskay S.Yu., Sidelnikov V.I. Efficient heating of the room as the optimal control problem. *Tehniko-tehnologicheskie problemy servisa* [Technical and Technological Problems of Service], 2014, no. 4(30), pp. 75–78.

[4] Sabdenov K.O., Baytasov T.M. Optimal (energy efficient) heat supply to buildings in central heating system. *Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov* [News of Tomsk Polytechnic University. Geo-Resource Engineering], 2015, vol. 326, no. 8, pp. 53–60.

[5] Moiseenko B.D., Fryazinov I.V. Conservative difference schemes for the equations of an incompressible viscous fluid in Euler variables. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1981, vol. 21, iss. 5, pp. 108–120.

[6] Aristov V.V., Cheremisin F.G. The conservative splitting method for solving Boltzmann's equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1980, vol. 20, iss. 1, pp. 208–225.

[7] Islamov G.G., Kogan Yu.V. The difference-differential problem of control by diffusion process. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Komp'juternye nauki* [Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki], 2008, iss. 1, pp. 121–126.

[8] Tukhtasinov M., Abduolimova G.M., Khayitkulov B.Kh. Granichnoe upravlenie rasprostraneniem tepla v ogranichennom tele [Boundary control of heat propagation in a bounded body]. *Bjulleten' Instituta matematiki* [Bulletin of the Institute of Mathematics], 2019, no. 1, pp. 1–10.

[9] Agoshkov V.I. *Metody optimal'nogo upravlenija i soprjazhjonnyh uravnenij v zadachah matematicheskoj fiziki* [Optimal control methods and conjugate equations in problems of mathematical physics]. Moscow, IVM RAN Publ., 2003, 256 p.

[10] Egorov A.I. *Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi processami* [Optimal control of thermal and diffusion processes]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 464 p.

[11] Lions Zh.L. *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravnenijami s chast-nymi proizvodnymi* [Optimal control of systems described by partial differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1972, 412 p.

[12] Fedorenko R.P. *Priblizhjonnoe reshenie zadach optimal'nogo upravlenija* [An approximate solution of optimal control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 497 p.

[13] Vasil'eva M.V., Vasil'ev V.I., Tyrylgin A.A. Conservative difference scheme for filtering problems in fractured media. *Mathematical Notes of NEFU*, 2018, vol. 25, no. 4, pp. 84–101.
[14] Alifanov O.M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse heat transfer problems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 280 p.
[15] Khaitkulov B.Kh. Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body. *Solid State Technology*, 2020, vol. 63, iss. 4, pp. 583−592.
[16] Khayitkulov B.Kh. Numerical solution of the non-stationary problem of optimal selection of heat sources in a rod. *Problems of Computational and Applied Mathematics*, 2020, no. 5 (29), pp. 141−146.
[17] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravnenija matematicheskoj fiziki. 7-e izd.* [Equations of Mathematical Physics. 7-th Edition]. Moscow, Nauka Publ., 2004, 798 p.
[18] Sigal I.Kh., Ivanova A.P. *Metody optimizacii. Nachal'nyj kurs. Kurs lekcij po discipline "Metody optimizacii". Chast 2. Simpleks-metod i smezhnye voprosy, jelementy teorii dvojstvennosti, mnogokriterial'naja optimizacija* [Optimization methods. Initial course. A course of lectures on the discipline "Methods of optimization". Part 2. Simplex method and related issues, elements of duality theory, multicriteria optimization]. Moscow, MIIT Publ., 2006, 104 p.

Khayitkulov B.Kh., PhD student of the Department of Algorithms and Programming Technologies of the National University of Uzbekistan. Research interests: approximate and numerical methods for solving equations of mathematical physics and optimal control problems, mathematical modeling. ORCID: 0000-0001-7449-3950. e-mail: b.hayitqulov@mail.ru