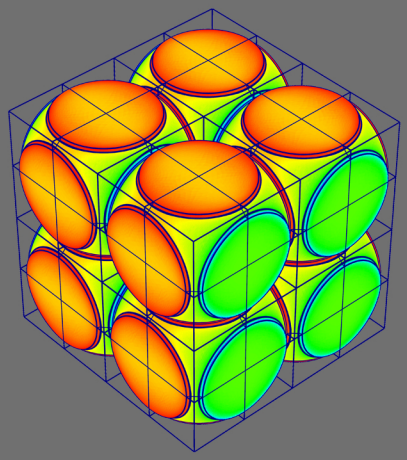
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Подлазов А. В. Двумерная самоорганизованно-критическая модель Манны для песчаных сред. Математическое моделирование и численные методы, 2014, №3 (3), с. 89-110

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/23/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.210
01.02.2026 13:55:51

УДК 519.6

Двумерная самоорганизованно-критическая модель Манны для песчаных сред

© А.В. Подлазов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия

Представлено полное решение модели Манны — двумерной консервативной модели типа кучи песка с изотропными в среднем правилами передачи песчинок. Показатели распределений лавин по основным характеристикам (размер, площадь, периметр, длительность, кратность опрокидывания) определены для этой модели как аналитически, так и численно.

Предлагаемое решение основано на пространственно-временной декомпозиции лавин, описываемых посредством слоев и волн опрокидывания, а также на разделении движения песчинок на направленное и ненаправленное. Первый процесс может интерпретироваться в терминах динамики активных частиц, для которых описываются некоторые физические свойства.

Ключевые слова: *самоорганизованная критичность, масштабная инвариантность, степенные распределения, конечно-размерный скейлинг, модель типа кучи песка, модель Манны, слои опрокидывания, волны опрокидывания.*

Введение. Важнейшим признаком сложного поведения является *масштабная инвариантность*, т. е. отсутствие у описывающих его величин собственных характерных значений. Возникновение масштабно-инвариантных свойств у открытых нелинейных систем обычно связано с их самоорганизацией в критическое состояние [1, 2]. В работе изучается модель Манны [3] — двумерная изотропная консервативная самоорганизованно-критическая модель типа кучи песка. Используется четырехчастичный вариант правил данной модели, предложенный в работе [4] (в разных вариантах правил свойства этой модели одинаковы, но выбранный вариант наиболее удобен для сравнения с другими моделями типа кучи песка).

Целью исследования модели является аналитическое и численное определение показателей степенных распределений, которым подчиняются происходящие в ней события. Основой для этого служит декомпозиция их динамики как в пространственно-временном, так и в симметричном отношении. Возникающий при этом простой и удобный понятийный аппарат также следует рассматривать как важный результат работы.

1. *Правила модели.* Модель Манны представляет собой двумерную ортогональную решетку размером $L \times L$, в ячейках которой находятся целые числа. Эти числа традиционно интерпретируются как количество песчинок. Если число в ячейке превышает установленный порог, она объявляется неустойчивой и опрокидывается. При этом из нее изымаются четыре песчинки, каждая из которых передается одной из

ячеек, имеющей с данной общую сторону (если ячейка находится на краю решетки, то передаваемые за него песчинки необратимо теряются). Выбор новой ячейки для каждой песчинки осуществляется случайным образом (правила изотропны). При наличии нескольких неустойчивых ячеек они опрокидываются одновременно — в ходе одного шага времени.

Элементарное событие, в результате которого система переходит от одного устойчивого состояния к другому, инициируется добавлением песчинки в одну из ячеек. Алгоритм ее выбора не влияет на свойства модели. В настоящей работе для добавления инициирующей песчинки случайным образом выбирается одна из четырех центральных ячеек решетки (L — четное число).

Если в результате добавления песчинки ячейка теряет устойчивость, то песчинки, переданные при ее опрокидывании соседним, могут нарушить их устойчивость и т. д. Цепная реакция опрокидываний, продолжающаяся до тех пор, пока в системе сохраняются неустойчивые ячейки, называется *лавиной*.

Далее рассматриваются следующие основные характеристики лавины:

- *размер* (количество произошедших опрокидываний) N;
- *площадь* (число опрокинувшихся ячеек) S;
- *периметр* (число ячеек, получивших песчинку, но не опрокинувшихся, включая песчинки, выпавшие за край решетки) C;
- *длительность* (число шагов времени) T.

Кроме того, рассматриваются две производные характеристики:

- *кратность опрокидывания* (средняя) $M = N/S$;
- *радиус* (характерная линейная протяженность) области лавины $R \sim \sqrt{S}$.

Независимо от начального состояния системы после некоторого количества событий она приходит в критическое состояние, в котором происходящие процессы являются масштабно-инвариантными, а все перечисленные характеристики лавин подчиняются *степенным распределениям* с плотностью вероятности вида

$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)}, \tag{1}$$

где α — *характеристический показатель*. Целью работы является определение его значений для всех характеристик лавины, т. е. полное решение модели.

2. *О решении критических моделей.* Для критических систем достаточно типична ситуация, когда разные по своим правилам модели обладают одним и тем же набором показателей. В этом случае говорят, что эти модели относятся к одному и тому же классу универсальности.

Наряду с моделью Манны [3] в теории самоорганизованной критичности известны две родственных ей модели типа кучи песка. Первая из них — модель Бака — Танга — Визенфельда (БТВ) [1], единственное отличие которой от модели Манны состоит в том, что песчинки из опрокинувшейся ячейки распределяются между ее соседками не случайно, а строго поровну. Вторая — модель Жанга [5], которая оперирует нецелыми числами, что позволяет при опрокидывании неустойчивой ячейки поровну поделить между ее соседями все содержимое (а не фиксированное значение). По аналогии с моделью Жанга возможно рассмотрение модификации модели Манны, в которой из опрокинувшейся ячейки изымаются и передаются соседним все имеющиеся там песчинки. Однако эта модификация попадает в тот же класс универсальности, что и исходная модель, и потому самостоятельного интереса не представляет.

На сегодняшний день достоверно не известно, относятся ли модели Манны и Жанга к одному или к разным классам универсальности. Но даже если эти классы различны, точно установлено, что модель БТВ не принадлежит ни к одному из них [4, 6, 7], хотя ее правила подчиняются тем же симметриям и законам сохранения, что и правила двух других моделей. Данное обстоятельство не позволяет применять для теоретического решения таких моделей перенормировочные методы, неплохо зарекомендовавшие себя при изучении обычных критических явлений. Так, использование блочного преобразования в работах [8, 9] вылилось в ошибочное отнесение к одному классу универсальности моделей БТВ и Манны, а использование метода динамической ренормгруппы в работах [10, 11] — моделей БТВ и Жанга.

К настоящему моменту теоретическое решение имеют только три двумерных модели типа кучи песка: детерминированная направленная модель Дхара — Рамасвами [12], которая была решена еще ее авторами, ее стохастический аналог — модель Пастор-Саторраса — Веспигнани [13], которая была решена в работах [14, 15], и дискретная модель Федеров [16], решенная в работе [18] на основе представлений о спонтанной анизотропии. В отличие от всех перечисленных рассматриваемая в настоящей работе модель Манны обладает изотропной динамикой, что требует существенно иных подходов.

Решение самоорганизованно-критических моделей непосредственно на основе их правил является нетривиальной задачей, для которой нет общих алгоритмов. Ключом здесь служит формулировка *промежуточной модели*, описывающей коллективную динамику для исходной модели и тем самым позволяющей устанавливать количественную связь между различными характеристиками лавин, что существенно упрощает анализ распределений вероятности.

В данной работе предлагается и исследуется такая промежуточная модель. Следует особо отметить, что она не выводится из правил

модели Манны, а основывается на общем представлении о геометрии и динамике возникающих в ней лавин, в свою очередь опирающемся на физическую интуицию и компьютерное моделирование. То же можно сказать и про степенной вид распределений, который прямо не следует ни из исходной, ни из промежуточной модели. Подтверждением правильности таких теоретических построений в общем случае может быть только соответствие полученных значений показателей результатам компьютерного моделирования. Поэтому в статье уделено особое внимание анализу его результатов.

Заметим, что попытки интенсивного компьютерного исследования модели Манны предпринимались ранее и другими авторами. В частности, в работах [19–21] некоторые показатели были определены с погрешностью, достаточно низкой для того, чтобы стало возможным угадывание их точных значений, которые выражаются дробями со сравнительно небольшими числителем и знаменателем.

Кроме того, в работе [22] был предложен способ аналитического определения показателя α_T посредством описания динамики числа неустойчивых ячеек как случайного блуждания, которое предполагается несмещенным, некоррелированным и независимым от времени. Однако это предположение нетривиально, поскольку, например, для модели БТВ оно просто не выполняется. Для модели Манны в обсуждаемой работе оно проверялось только численно, но не было обосновано теоретически, так что полученный результат можно считать аналитическим лишь с серьезными оговорками. Тем не менее он показывает один из потенциальных путей получения частичного решения данной модели, если используемые свойства блуждания будут объяснены.

В настоящей статье избран иной путь, основанный на построении промежуточной модели и анализе зависимостей между различными характеристиками лавин. Для предлагаемого решения среди них ключевыми оказываются средняя кратность опрокидывания M и периметр области лавины C, которые другими авторами, как правило, вообще не рассматриваются. Внимание обычно уделяется более традиционным характеристикам, таким как размер лавины N, ее площадь S и длительность T, ограничиваясь которыми получить решение не удается.

3. *О степенных распределениях.* Формула (1) является математической идеализацией и применима только в промежуточной асимптотике. Более адекватной реальности является запись

$$u(x) = x^{-(1+\alpha)} h\left(x/x_1\right), \tag{2}$$

где функция $h(\xi)$ примерно постоянна при $\xi \ll 1$ и убывает быстрее любой степени аргумента при $\xi \to \infty$ [17, 18].

Ограничение диапазона степенной статистики значением x_1 обусловлено конечностью размеров системы, не позволяющей ей порождать сколь угодно крупные события. В силу масштабной инвариантности критического состояния для величин, подчиняющихся распределению (2), характерный размер события x_1, крупного настолько, что оно уже не помещается в систему размера L, масштабируется как некоторая его степень

$$x_1 \sim L^{\nu}. \tag{3}$$

Сочетание формул (2) и (3) позволяет определить скейлинговое поведение и для среднего размера события

$$\langle x \rangle = \int xu(x)\,dx \sim L^{б}, \tag{4}$$

где $\sigma = \nu(1-\alpha)$.

Для некоторых характеристик лавины *скейлинговые показатели* ν и σ можно установить из общих соображений. Для рассматриваемой модели это удается сделать в двух случаях.

Во-первых, площадь области лавины, очевидно, ограничена площадью решетки:

$$S_1 \sim L^2, \text{ или } \nu_S = 2. \tag{5}$$

Во-вторых, движение каждой отдельно взятой песчинки по решетке представляет собой случайное блуждание. Чтобы покинуть решетку, добравшись от ее середины до края, песчинке надо пройти дистанцию порядка L ячеек, что требует порядка L^2 шагов. Поскольку каждая лавина начинается добавлением одной песчинки в систему, то и покидать ее в стационарном состоянии будет в среднем одна песчинка. Таким образом,

$$\langle N \rangle \sim L^2, \text{ или } \sigma_N = 2. \tag{6}$$

Ситуация, когда скейлинговые показатели, определяемые непосредственно на основе правил, относятся к разным характеристикам лавины, является типичной. Поэтому для теоретического исследования самоорганизованно-критических моделей принципиально важен учет не только статистических свойств отдельных характеристик лавины, но и их взаимосвязей. При одновременном рассмотрении для одной и той же лавины двух характеристик x и y зависимость между ними можно записать в виде

$$y \sim x^{\gamma_{yx}}. \tag{7}$$

Воспользовавшись формулой преобразования вероятностей $u_x(x)\,dx = u_y(y)\,dy$, получим соотношение для характеристических показателей

$$\gamma_{yx} = \alpha_x / \alpha_y . \tag{8}$$

Записав связь между размерами крупных событий $y_1 \sim x_1^{\gamma_{yx}}$, получим соотношение и для скейлинговых показателей

$$\gamma_{yx} = \nu_y / \nu_x . \tag{9}$$

Геометрия области лавины. Первый элемент предлагаемой промежуточной модели — описание взаимного расположения ячеек, совершивших определенное количество опрокидываний в ходе лавины.

1. *Слои опрокидывания.* Область лавины представляется как последовательность слоев, внутри которых кратность опрокидывания одинакова (рис. 1). Для модели БТВ, правила которой строго детерминированы, такое описание было бы строгим [23]. Однако для модели Манны в силу случайного характера раздачи песчинок при опрокидывании ячеек оно является лишь приближением. Тем не менее поскольку основанные на нем расчеты находятся в прекрасном согласии с результатами моделирования, будем считать точность такого приближения удовлетворительной.

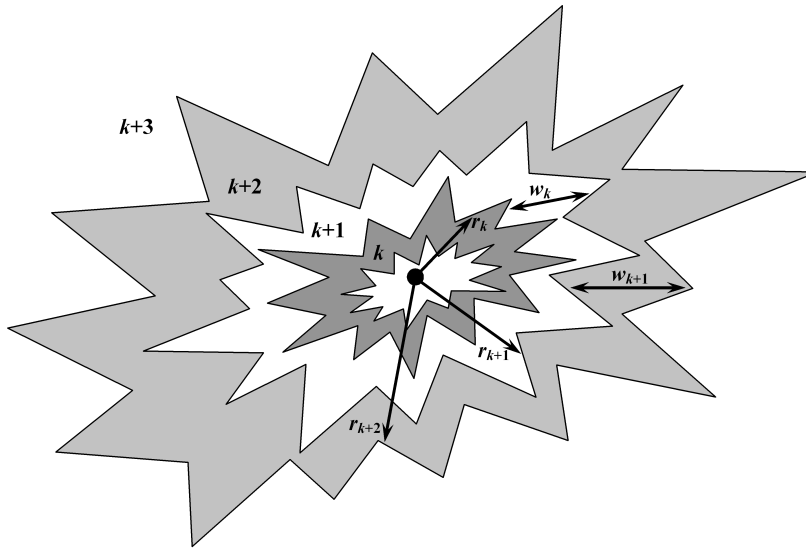


Рис. 1. Схематичное представление слоев опрокидывания. Увеличение номера слоя соответствует уменьшению кратности опрокидывания. Изрезанность границ слоев обеспечивает возрастание их ширины вместе с радиусом (в случае гладкой границы слои имели бы постоянную ширину)

Нумеровать слои области лавины будем из ее глубины наружу, начиная с единицы, т. е. если в данный момент времени максимальная кратность опрокидывания для рассматриваемой лавины равна m, то она состоит из слоев с номерами $1 \le k \le m$, на которых произошло

$m+1-k$ опрокидываний. Здесь и далее прописными буквами станем обозначать характеристики лавины, относящиеся ко всей ее области, а соответствующими строчными буквами с индексом k — значения этих характеристик для k-го слоя.

В силу масштабной инвариантности критического состояния характерный радиус области лавины дается степенной зависимостью

$$R \sim m^{\gamma} \sim M^{\gamma} \tag{10}$$

(появление в этой и последующих формулах средней кратности опрокидывания M пояснено далее). Поскольку показатель γ, связывающий радиус и кратность, фигурирует далее во многих формулах, для удобства будем опускать у него индексы, сохраняя их для всех прочих показателей связи.

Чтобы описать слои, сделаем еще одно важное допущение относительно динамики лавины. Предположим, что при появлении новых слоев границы уже имеющиеся не испытывают систематического смещения в какую-либо сторону, подвергаясь лишь флуктуациям. Это предположение является очень сильным и неочевидным. Будучи справедливым для модели Манны, оно не выполняется для модели БТВ. И хотя причины, обусловливающие данное фундаментальное различие между моделями, удалось теоретически объяснить [7], окончательным подтверждением сделанного предположения, по всей видимости, можно считать только совпадение результатов проведенного на его основе теоретического анализа и компьютерного эксперимента.

Опираясь на сделанное предположение, запишем для характерной величины внешнего *радиуса* k-го слоя выражение

$$r_k \sim k^{\gamma}, \tag{11}$$

превращающееся в частном случае $k=m$ в зависимость (10). Поскольку, очевидно, $r_0=0$, для удобства выкладок далее формально будем использовать и нулевой слой, не содержащий ячеек.

Характерная *ширина* k-го слоя

$$w_k \cong \frac{dr_k}{dk} \sim k^{\gamma-1} \sim r_k^{1-1/\gamma}, \tag{12}$$

а его площадь

$$s_k \sim r_k w_k \sim k^{2\gamma-1} \sim r_k^{2-1/\gamma}.$$

Суммированием по слоям лавины находим ее размер

$$N = \sum_{k=0}^{m} \left(m+1-k\right) s_k \sim m^{2\gamma+1} \sim M^{2\gamma+1} \tag{13}$$

и площадь затронутой ею области

$$S = \sum_{k=0}^{m} s_k \sim m^{2\gamma} \sim M^{2\gamma}. \qquad (14)$$

Из формул (13) и (14) получим

$$M = N/S \sim m.$$

Поэтому здесь и далее при проведении выкладок с точностью до коэффициента не различаем среднюю M и максимальную m кратности опрокидывания, называя их просто кратностью опрокидывания.

2. *Распределение лавин по кратности опрокидывания.* Предположения о пространственной структуре лавины и общего анализа правил модели оказывается достаточно для определения показателя распределения лавин по кратности опрокидывания α_M. Для этого сначала выразим его через показатель распределения лавин по размеру, применив соотношение (8) к формуле (13):

$$\alpha_M = (2\gamma + 1)\alpha_N.$$

Сочетание формул (13) и (14) дает связь между характеристиками лавины

$$S^{2\gamma+1} \sim N^{2\gamma},$$

которая в силу соотношения (9) приводит к выражению

$$2\gamma\nu_N = (2\gamma + 1)\nu_S.$$

Запишем показатель для среднего размера лавины (4):

$$\sigma_N = \nu_N(1 - \alpha_N) = \nu_S \frac{2\gamma + 1}{2\gamma}\left(1 - \frac{\alpha_M}{2\gamma + 1}\right) = \nu_S\left(1 + \frac{1 - \alpha_M}{2\gamma}\right).$$

Отсюда с учетом равенства $\sigma_N = \nu_S$ (см. формулы (5) и (6)) найдем

$$\alpha_M = 1. \qquad (15)$$

3. *Структура границы слоев*. Для полного описания слоев необходимо рассмотреть не только их взаиморасположение, но и геометрию границ.

Определим *периметр* слоя как длину его внешней границы. Она не является гладкой линией, образуя складки, соизмеримые с шириной слоя (12) (см. рис. 1). Поэтому его периметр не пропорционален радиусу (11). Назовем *фронтом* слоя усредненное положение его

внешней границы. Поскольку усреднение сглаживает ее складки, длину фронта уже можно считать пропорциональной радиусу слоя. Количество складок границы определяется длиной фронта, что позволяет записать для периметра выражение

$$c_k \sim r_k w_k \sim s_k \sim k^{2\gamma-1} \sim r_k^{2-1/\gamma}. \qquad (16)$$

В частности, периметр области лавины равен периметру ее внешнего слоя:

$$C = c_m \sim m^{2\gamma-1} \sim M^{2\gamma-1} \sim R^{2-1/\gamma}. \qquad (17)$$

Наглядное представление о фрактальных свойствах границы дает величина, которую можно назвать *глубиной* области лавины

$$D = S/C.$$

Если бы граница области лавины была гладкой линией, глубина была бы пропорциональна радиусу. Однако, как следует из формул (14) и (17),

$$D \sim M. \qquad (18)$$

Соответственно $\alpha_D = \alpha_M = 1$. Соотношение (4) дает значение $\sigma = 0$ при $\alpha = 1$, т. е. следует ожидать не степенного, а лишь логарифмического увеличения средних значений кратности и глубины с ростом размера решетки, что подтверждается результатами моделирования, приведенными на рис. 2.

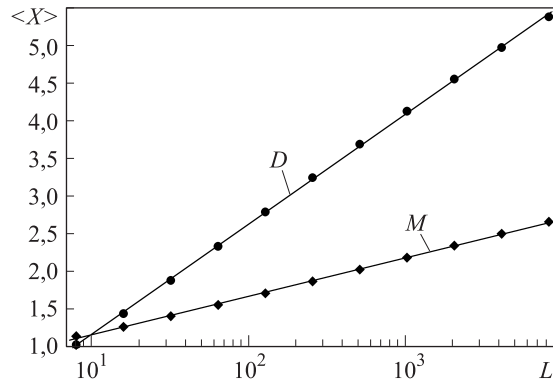


Рис. 2. Средние глубина лавины и кратность опрокидывания. Логарифмическая зависимость от L средних значений этих характеристик подтверждает для них тривиальное единичное значение показателя, найденное на основе общих соображений о пространственной структуре лавины. Прямыми линиями показаны аппроксимации экспериментальных зависимостей

Обратим внимание именно на линейную зависимость $\langle D \rangle$ и $\langle M \rangle$ от $\log L$ для модели Манны, означающую отсутствие каких-либо неучтенных логарифмических поправок к используемым формулам. Поправки такого рода, несомненно, должны возникать в модели БТВ, для которой средняя кратность опрокидывания, как показывают результаты моделирования, растет медленнее логарифма размера системы. А формула (18) для модели БТВ, принадлежащей к другому классу универсальности, не выполняется, вследствие чего средняя глубина области лавины для этой модели дается некоторой степенью размера решетки меньшей единицы (возможно, тоже с логарифмическими поправками).

Динамика лавины. Второй элемент промежуточной модели — описание процесса формирования слоев и введение представления об ответственных за него активных частицах.

1. *Физика активных частиц.* Внутри слоя ячейки (в среднем) отдают соседним и получают от них одно и то же число песчинок. Однако на границе слоев этот баланс нарушается, так как ячейки внутреннего слоя отдают больше, чем получают от ячеек внешнего, т. е. количество песчинок, передаваемых слоем вовне, определяется его периметром (16), в каждой точке которого происходит передача песчинки.

Введем понятие *активных частиц*, под которыми будем понимать песчинки, которые в ходе лавины покидают слой без компенсации. Количество активных частиц на k-м слое равно разности числа отданных наружу и полученных изнутри песчинок:

$$a_k \cong \frac{dc_k}{dk} \sim k^{2\gamma-2} \sim r_k^{2-2/\gamma}. \tag{19}$$

Активные частицы перемещаются из глубины области лавины к ее периферии, тогда как остальные песчинки — в случайном направлении. Таким образом, развитие лавины представляет собой сочетание направленного и ненаправленного движений. Подобное разделение имеет смысл только в критическом состоянии. В докритическом состоянии активные частицы будут утрачивать этот статус, не достигая границ области лавины, а в сверхкритическом даже вынос вовне всех активных частиц не будет приводить к завершению лавины из-за продолжающегося появления новых активных частиц.

Далее рассматривается поведение активных частиц с кинематической, динамической и телеологической точек зрения, что неизменно приводит к полученным выше формулам. Смысл такого дублирования состоит в прояснении физического смысла активных частиц и их свойств.

• Кинематика. Перенос активных частиц вовне уместно связать с движением фронтов. На единицу длины фронта приходится

$\tau_k \sim \dfrac{a_k}{r_k} \sim k^{\gamma-2} \sim r_k^{1-2/\gamma}$ активных частиц. Следовательно, число шагов времени, необходимых для продвижения участка фронта, «обслуживаемого» одной активной частицей, пропорционально его длине:

$$\delta t_k \sim \frac{\delta r_k}{\tau_k} \sim \frac{\delta r_k}{r_k^{1-2/\gamma}}.$$

Таким образом, скорость движения k-го фронта

$$v_k \sim \frac{\delta r_k}{\delta t_k} \sim r_k^{1-2/\gamma}, \tag{20}$$

а время, которое он находится в пути с момента своего появления,

$$t_k \sim r_k^{2/\gamma} \sim k^2. \tag{21}$$

• Динамика. Плотность активных частиц на k-м слое

$$\rho_k \sim \frac{a_k}{s_k} \sim k^{-1} \sim r_k^{-1/\gamma}.$$

В качестве причины движения фронтов наружу можно рассматривать взаимное отталкивание активных частиц [**5**]. Его энергия внутри k-го слоя (т. е. включая более глубокие)

$$U_k \sim \sum_{i=0}^{k} s_i \rho_i^2 \sim \sum_{i=0}^{k} i^{2\gamma-3} \sim k^{2\gamma-2} \sim r_k^{2-2/\gamma}.$$

Приравняв скорость движения фронтов силе отталкивания

$$v_k \sim -\frac{dU_k}{dr_k} \sim r_k^{1-2/\gamma},$$

еще раз получим формулу (20).

• Телеология. Активные частицы совершают направленное движение, которому можно приписать очевидную цель. В силу определения (19) полное количество активных частиц суть периметр лавины, который они образуют, а в ходе ее развития активные частицы проявляют себя в виде некоторой доли опрокидываний. Следовательно, *активность*, понимаемая как среднее число опрокидываний за шаг

$$A = \frac{N}{T},$$

с точностью до коэффициента совпадет с полным числом активных частиц, т. е.

$$A \sim C. \tag{22}$$

Сочетание этих формул с формулами (13) и (17) приводит к соотношению

$$T \sim M^2, \tag{23}$$

являющемуся частным случаем формулы (21).

Зависимость (23) может быть обобщена до вида (21) тем же способом, которым ранее был осуществлен переход от частной формулы для радиуса (10) к ее общему виду (11).

2. *Волны опрокидывания*. Развитие лавины во времени можно представить как последовательность *волн опрокидывания*, идущих из глубины к периферии, увеличивающую кратность опрокидывания и число слоев. Для модели БТВ, для которой изначально была предложена такая декомпозиция [23], она является математически строгой, но на физическом уровне строгости она применима и для модели Манны.

Очередная волна может как достигнуть, так и не достигнуть границ уже затронутой лавиной области. В первом случае к ней добавляется новый внешний слой, во втором происходит разделение одного из внутренних слоев на два. Если считать все, что находится вне зоны распространения волны, пока не затронутой областью, то подстановка радиуса этой зоны в формулу (10) дает число слоев m, которое может не только увеличиваться (как происходит при развитии лавины), но и уменьшаться (как происходит при ее затухании). В самоорганизованно-критическом состоянии его среднее изменение

$$\langle \Delta m \rangle = 0. \tag{24}$$

В самом деле, при $\langle \Delta m \rangle < 0$, лавина, инициированная добавлением песчинки, быстро затухает, как правило, не достигая краев решетки, что ведет к увеличению ее заполнения. С другой стороны, при $\langle \Delta m \rangle > 0$ лавина с ненулевой вероятностью неограниченно распространяется, достигая краев решетки во множестве мест и вынося много песчинок, что ведет к уменьшению заполнения. Возникающая отрицательная обратная связь и обеспечивает выполнение условия (24), означающего диффузионное изменение кратности со временем, описываемое формулой (23). Возможность обоснования этой формулы без привлечения представления об активных частицах служит дополнительным обоснованием его адекватности.

3. *Поток песчинок*. С помощью формул (19) и (20) запишем выражение для потока частиц через k-й слой:

$$j_k = v_k a_k \sim r_k^{3-4/\gamma}.$$

Он не должен зависеть ни от номера слоя, ни от числа слоев, ибо выносит ту самую песчинку, добавлением которой инициирована лавина.

Таким образом, $\gamma = 4/3$. Полученное значение позволяет с помощью формул (13), (14), (17) и (23) определить показатели связи для кратности опрокидывания, которые в силу формул (8) и (15) совпадают с характеристическими показателями: $\gamma_{MN} = \alpha_N = 3/11$, $\gamma_{MS} = \alpha_S = 3/8$, $\gamma_{MC} = \alpha_C = 3/5$ и $\gamma_{MT} = \alpha_T = 1/2$. На их основе с помощью формул (5) и (9) вычисляются и скейлинговые показатели $\nu_N = 11/4$, $\nu_C = 5/4$, $\nu_T = 3/2$ и $\nu_M = 3/4$.

Сравнение с компьютерным экспериментом.

1. *Метод конечно-размерного скейлинга.* Формулы (2) и (3) ограничивают область промежуточной асимптотики, где плотность распределения может быть аппроксимирована формулой (1). Приближенный характер степенной записи плотности затрудняет непосредственное определение характеристического показателя на основе
результатов компьютерного эксперимента. Можно лишь убедиться в правильности известного из теории значения показателя доумножением плотности на соответствующую степень аргумента, в результате чего график в области промежуточной асимптотики становится примерно горизонтальным.

Более продуктивным оказывается метод конечно-размерного скейлинга, основанный на переходе от представления плотности в виде (2) к записи [17, 18] вида:

$$u(x) = L^{-\beta} g\left(xL^{-\nu}\right). \tag{25}$$

Если рассматривать выражение $L^{\beta} u\left(x\right)$ как функцию от $L^{-\nu}x$, то графики, полученные при разных значениях L, совместятся, а эквивалентность представлений (2) и (25) требует степенного поведения функции $g\left(\xi\right)$ при малых аргументах и выполнения скейлингового соотношения

$$\beta = \nu\left(1+\alpha\right). \tag{26}$$

Таким образом, для экспериментального определения показателя α не нужно компенсировать влияние неизвестных скейлинговых функций $h\left(\xi\right)$ и $g\left(\xi\right)$. Достаточно, подобрав подходящие значения β и ν, воспользоваться соотношением (26).

На рис. 3–7 показан конечно-размерный скейлинг результатов компьютерного моделирования при теоретически определенных значениях скейлинговых показателей. Прекрасное совпадение графиков доказывает правильность проведенных расчетов.

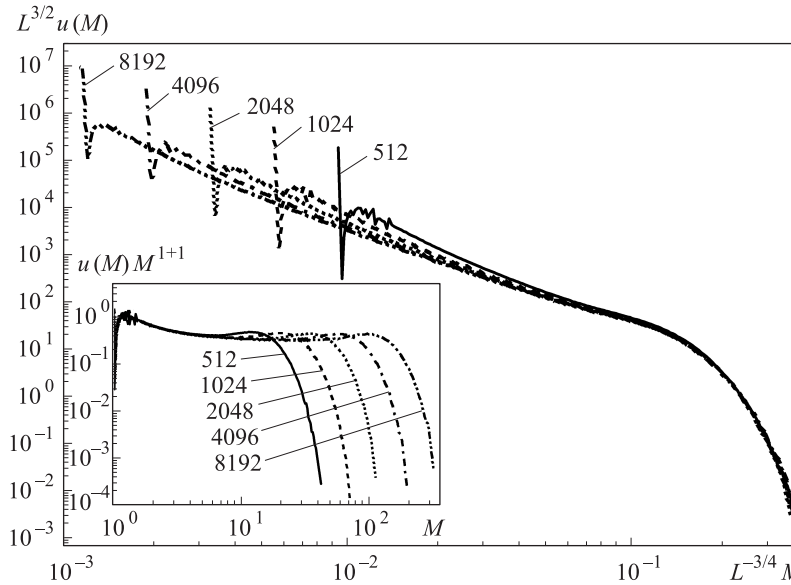


Рис. 3. Распределение лавин по кратности опрокидывания. Показатели: $\alpha_M = 1;\ \nu_M = 3/4;\ \beta_M = 3/2$

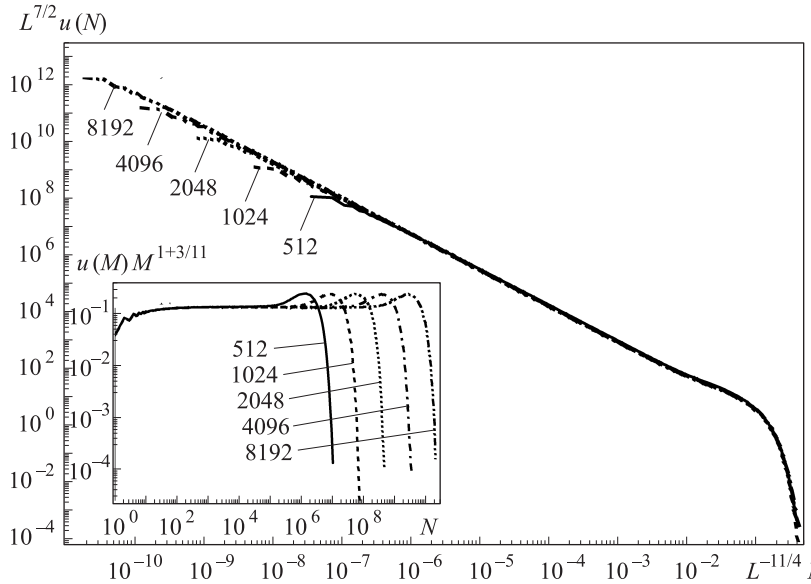


Рис. 4. Распределение лавин по размеру. Показатели: $\alpha_N = 3/11;\ \nu_N = 11/4;$ $\beta_N = 7/2$

Дополнительным аргументом служат врезки к рисункам, на которых проведена компенсация степенного множителя из формулы (2) с помощью известных значений характеристических показателей. В результате графики становятся в промежуточной асимптотике горизонтальными, а их «горбики» выстраиваются на одной высоте.

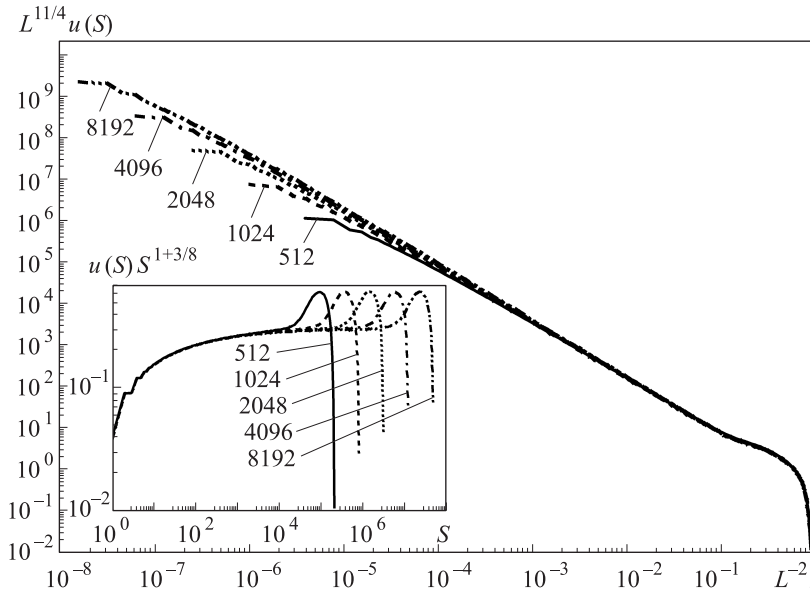


Рис. 5. Распределение лавин по площади. Показатели: $\alpha_S = 3/8$; $\nu_S = 2$; $\beta_S = 11/4$

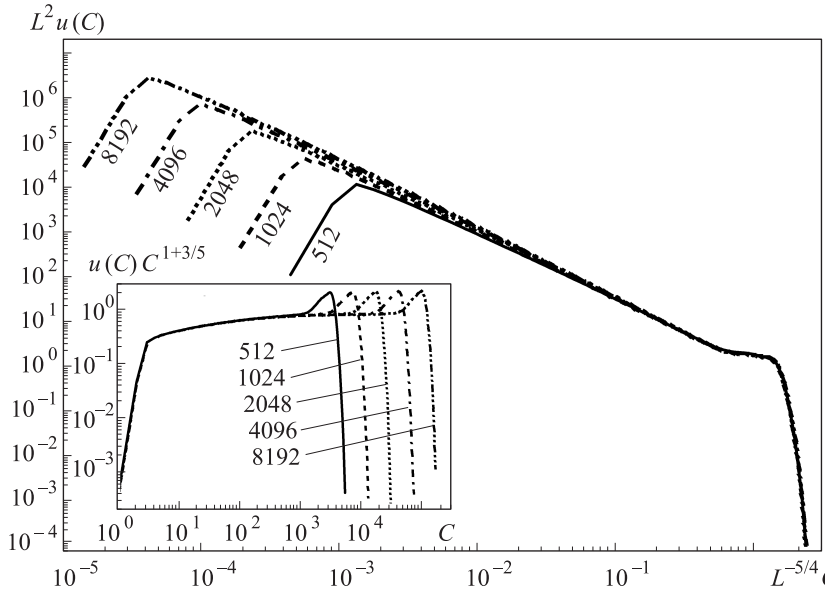


Рис. 6. Распределение лавин по периметру. Показатели: $\alpha_C = 3/5$; $\nu_C = 5/4$; $\beta_C = 2$

2. *Статистика падений.* Представление (25) имеет большую общность, нежели формула (2), позволяя работать и нестепенным распределениям лавин по числу падений F.

Вероятность того, что лавина не помещается в систему размера L, составляет

$$\mathrm{Prob}\{x > x_1\} = \int_{x_1}^{\infty} u(x)\,dx \cong \int_{L^{\nu}}^{\infty} L^{-\beta} g\left(xL^{-\nu}\right)dx = L^{\nu-\beta}\int_{1}^{\infty} g(\xi)\,d\xi \sim L^{-\varepsilon},$$

где *универсальный показатель* $\varepsilon = \beta - \nu$ не зависит от того, какая именно характеристика лавины рассматривается [18, 21]. Для характеристик, распределенных степенным образом, соотношение (26) дает более удобную запись: $\varepsilon = \alpha\nu$, делающую постоянство универсального показателя очевидным в силу формул (8) и (9). Для модели Манны $\varepsilon = 1/4$.

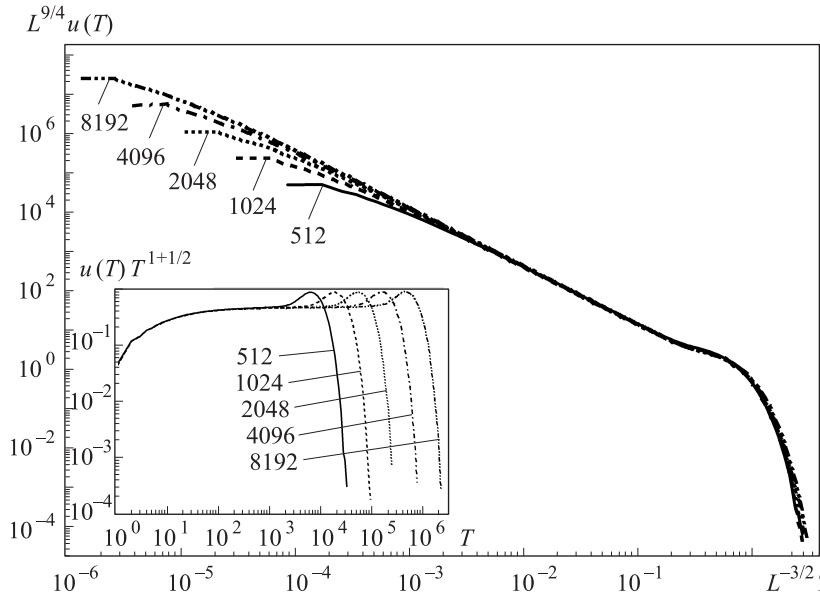


Рис. 7. Распределение лавин по длительности. Показатели: $\alpha_T = 1/2$; $\nu_T = 3/2$; $\beta_T = 9/4$

Выбор для добавления инициирующей песчинки центральных ячеек, максимально удаленных от края решетки, делает возможным падение за него только в результате крупнейших лавин. Таким образом, универсальный показатель определяет зависимость от размера решетки доли тех событий, в ходе которых происходят падения (см. врезку на рис. 8). Заметим, что поскольку падения не описываются степенным распределением, для них размер крупного события F_1, задаваемого формулой (3), и размер события, не помещающегося в систему, — не одно и то же. Не помещается любое событие с $F > 0$, поскольку для его возникновения лавина должна дойти от точки инициации до края решетки.

Определим скейлинговые показатели формулы (25) для величины F.

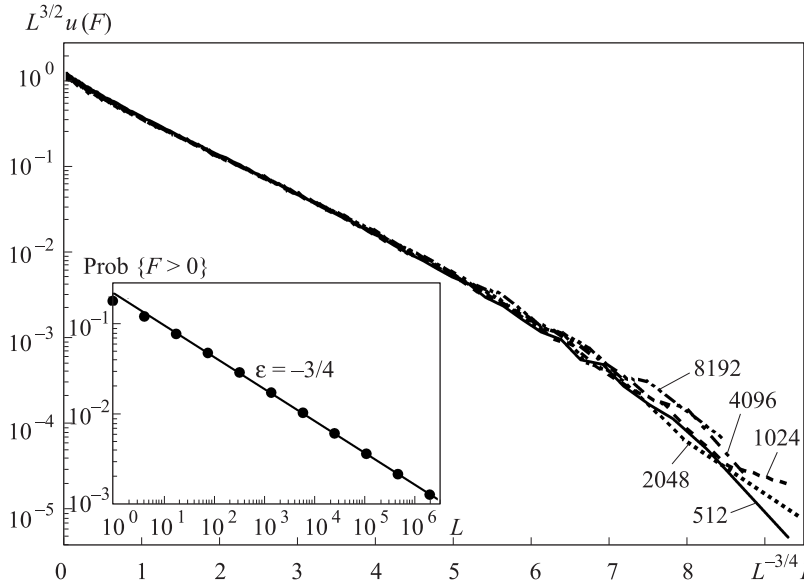


Рис. 8. Распределение лавин по числу падений. Показатели: $\nu_F = 3/4$; $\beta_F = 3/2$. Плотность убывает не как степень аргумента, а экспоненциально. Вероятность того, что за край упадет хотя бы одна песчинка, убывает как $L^{-\varepsilon}$

За один шаг моделирования в систему добавляется одна песчинка, значит, в стационарном состоянии в среднем одна ее и покидает, т. е. $\langle F \rangle = 1$ и $\sigma_F = 0$.

По аналогии с формулой (4) можно вывести соотношение $\sigma_F = 2\nu_F - \beta_F$, откуда $2\nu_F = \beta_F$, что дает β_F и ν_F, совпадающие с β_M и ν_M, в чем позволяет убедиться рис. 8.

Достижение лавиной края решетки в отдельных точках можно рассматривать как независимые события, что подтверждается экспоненциальным видом распределения лавин по падениям (см. рис. 8). Ширина внешнего слоя крупнейшей лавины $W \sim L^{1/4}$. Характерное расстояние между точками, где она достигает края решетки, имеет тот же порядок в силу изотропии правил модели.

Таким образом, вновь получаем для крупнейшего падения $F_1 \sim L^{3/4}$.

3. *Взаимосвязь характеристик лавины.* Наконец, скейлинговый подход применим и к анализу взаимозависимостей различных характеристик лавины. Чисто степенной вид (7) они имеют тоже только в промежуточной асимптотике, отклоняясь от него на краях диапазона значений, принимаемых характеристиками. Однако при делении значений по обеим осям на L^{ν} графики совмещаются (рис. 9, 10), что позволяет находить показатель связи с помощью формулы (9).

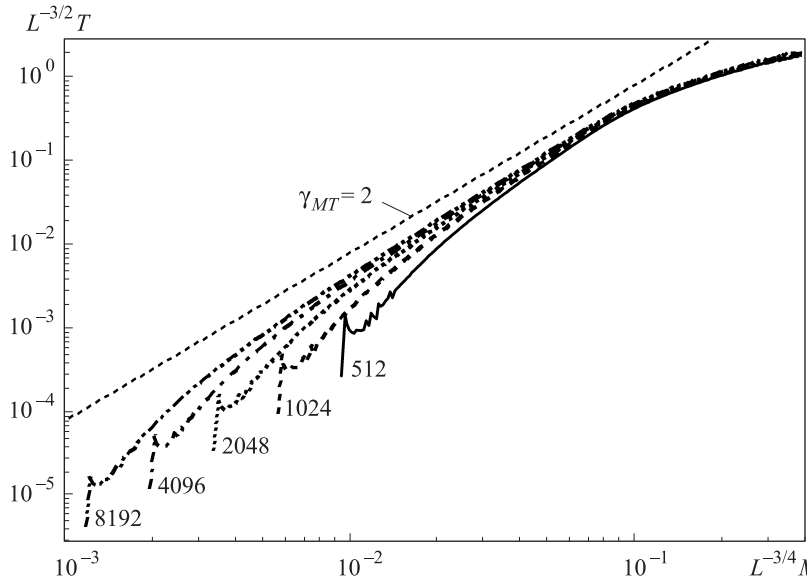


Рис. 9. Связь средней кратности опрокидывания и длительности лавины. Показатели: $\nu_M = 3/4$; $\nu_T = 3/2$; $\gamma_{MT} = 2$ (см. формулу (23))

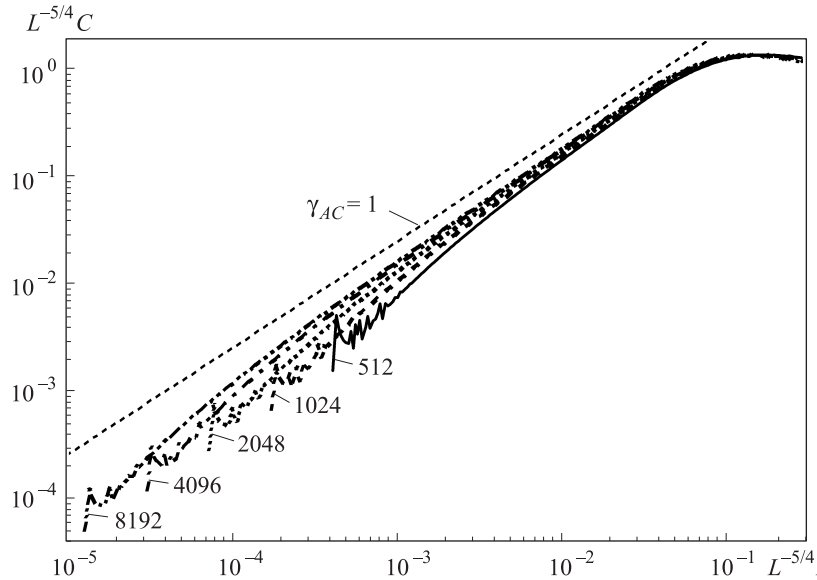


Рис. 10. Связь активности в ходе лавины и ее периметра. Показатели: $\nu_A = \nu_C = 5/4$; $\gamma_{AC} = 1$ (см. формулу (22))

Выводы. Для самоорганизованно-критической модели Манны предложена промежуточная модель. В ее терминах область лавины рассматривается как набор вложенных слоев опрокидывания убывающей наружу кратности. Увеличение кратности опрокидывания и появление новых слоев связано с прохождением последовательных

волн опрокидывания. Развитие лавины характеризуется постоянным потоком песчинок из ее глубины на периферию, который описывается в терминах активных частиц, обладающих интуитивно ясными физическими свойствами. Промежуточная модель допускает простое теоретическое исследование, основные результаты которого, подтвержденные компьютерным моделированием исходной модели, сведены в таблицу.

Характеристические и скейлинговые показатели, показатели связи

Показатель	α	ν	β	σ	N	S	T	C	M	R
Размер N	3/11	11/4	7/2	2	–	11/8	11/6	11/5	11/3	11/4
Площадь S	3/8	2	11/4	5/4	8/11	–	4/3	8/5	8/3	2
Длительность T	1/2	3/2	9/4	3/4	6/11	3/4	–	6/5	2	3/2
Периметр C	3/5	5/4	2	1/2	5/11	5/8	5/6	–	5/3	5/4
Кратность M	1	3/4	3/2	0	3/11	3/8	1/2	3/5	–	3/4
Радиус R	3/4	1	7/4	1/4	4/11	1/2	2/3	4/5	4/3	–

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00617 и 14-01-00773).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality. *Phys. Rev. A.*, 1988, vol. 38, no.1, pp. 364–374.

[2] Бак П. *Как работает природа: Теория самоорганизованной критичности. Синергетика: от прошлого к будущему*. Москва, Либроком, 2013, 276 с.

[3] Manna S.S. Two-state model of self-organized criticality. *J. Phys. A: Math. Gen*., 1991, vol. 24, pp. L363–L639.

[4] Milshtein E., Biham O., Solomon S. Universality classes in isotropic, Abelian, and non-Abelian sandpile models. *Phys. Rev. E.*, 1998, vol. 58, no. 1, pp. 303–310.

[5] Zhang Y.-C. Scaling theory of self-organized criticality. *Phys. Rev. Lett*., 1989, vol. 63, no. 5, pp. 470−473.

[6] Ben-Hur A., Biham O. Universality in sandpile models. *Phys. Rev. E*., 1996, vol. 53, no. 2, pp. R1317–R1320.

[7] Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В. Сравнение двумерных изотропных консервативных самоорганизованно-критических моделей типа кучи песка. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 2, с. 119–128.

[8] Pietronero L., Vespignani A., Zapperi S. Renormalization scheme for self-organized criticality in sandpile models. *Phys. Rev. Lett*., 1994, vol. 72, no. 11, pp. 1690−1693.

[9] Vespignani A., Zapperi S., Pietronero L. Renormalization approach to the self-organized critical behavior of sandpile models. *Phys. Rev. E.*, 1995, vol. 51, no. 3, pp. 1711−1724.
[10] Díaz-Guilera A. Dynamic renormalization group approach to self-organized critical phenomena. *Europhys. Lett.*, 1994, vol. 26, no. 3, p. 177.
[11] Corral Á., Díaz-Guilera A. Symmetries and fixed point stability of stochastic differential equations modeling self-organized criticality. *Phys. Rev. E.*, 1997, vol. 55, no. 3, pp. 2434−2445.
[12] Dhar D., Ramaswamy R. Exactly solved model of self-organized critical phenomena. *Phys. Rev. Lett.*, 1989, vol. 63, no. 16, pp. 1659−1662.
[13] Pastor-Satorras R., Vespignani A. Universality classes in directed sandpile models. *J. Phys. A: Math. Gen*, 2000, no. 33, pp. L33–L39.
[14] Paczuski M., Bassler K.E. Theoretical results for sandpile models of SOC with multiple topplings. *Phys. Rev. E.*, 2000, vol. 62, no. 4, pp. 5347−5352.
[15] Kloster M., Maslov S., Tang C. Exact solution of stochastic directed sandpile model. *Phys. Rev. E.*, 2001, vol. 63, no. 2, pp. 026111.
[16] Feder H.J.S., Feder J. Self-organized criticality in a stick-slip process. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, vol. 66, no. 20, pp. 2669−2672.
[17] Kadanoff L.P., Nagel S.R., Wu L., Zhou S. Scaling and universality in avalanches. *Phys. Rev. A.*, 1989, vol. 39, no. 12, pp. 6524−6537.
[18] Подлазов А.В. Двумерные самоорганизованно-критические модели типа кучи песка с анизотропной динамикой распространения активности. *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2012, т. 20, № 6, с. 25−46.
[19] Lübeck S., Usadel K.D. Bak-Tang-Wiesenfeld sandpile model around upper critical dimension. *Phys. Rev. E.*, 1997, vol. 56, no. 5, pp. 5138−5143.
[20] Chessa A., Vespignani A., Zapperi S. Critical exponents in stochastic sandpile models. *Comput. Phys. Commun*, 1999, vol. 121–122, pp. 299–302.
[21] Lübeck S. Moment analysis of the probability distributions of different sandpile models. *Phys. Rev. E.*, 2000, vol. 61, no. 1, pp. 204−209.
[22] Lübeck S., Usadel K.D. Numerical determination of the avalanche exponents of the Bak-Tang-Wiesenfeld model. *Phys. Rev. E.*, 1997, vol. 55, no. 4, pp. 4095−4099.
[23] Ivashkevich E.V., Ktitarev D.V., Priezzhev V.B. Waves of topplings in an Abelian sandpile. *Physica A.*, 1994, vol. 209, pp. 347−360.

Статья поступила в редакцию 02.09.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Подлазов А.В. Двумерная самоорганизованно-критическая модель Манны для песчаных сред. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 89–110.

Подлазов Андрей Викторович родился в 1973 г., окончил Московский физико-технический институт в 1996 г. Канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Автор 70 научных статей и двух монографий в области теории самоорганизованной критичности и теории масштабно-инвариантных процессов, а также теоретической демографии, математической истории и развития системы образования. e-mail: Tiger@Keldysh.ru

Two-dimensional self-organized critical Manna model

© A.V. Podlazov

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047, Russia

We propose a full solution for Manna model, two-dimensional conservative sand pile model with isotropic rules of grains redistribution on average. We determined the general properties indices of avalanches distribution (size, area, perimeter, duration, the multiplicity of topplings) for the model both analytically and numerically. The solution is based on spatio-temporal decomposition of avalanches described in terms of toppling layers and waves and on division of the motion of grains into directed and undirected types. The former of the two is treated as the dynamics of active particles with some physical properties described.

Keywords: *self-organized criticality, scale invariance, power-series distribution, finite-size scaling, sandpile models, Manna model, layers of toppling, waves of toppling.*

REFERENCES

[1] Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality. *Phys. Rev. A.*, 1988, vol. 38, no. 1, pp. 364−374.

[2] Bak P. *Kak rabotaet priroda: teoriya samoorganizovannoy kritichnosti. Sinergetika: ot proshlogo k budushchemu*. [Workings of Nature: Theory of Self-organized Criticality. Synergetics: From Past to Future]. Moscow, Librokom Publ., 2013, no. 66, 276 p.

[3] Manna S.S. Two-state model of self-organized criticality. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1991, vol. 24, pp. L363–L639.

[4] Milshtein E., Biham O., Solomon S. Universality classes in isotropic, Abelian, and non-Abelian sandpile models. *Phys. Rev. E.*, 1998, vol. 58, no. 1, pp. 303–310.

[5] Zhang Y.-C. Scaling theory of self-organized criticality. *Phys. Rev. Lett.*, 1989, vol. 63, no. 5, pp. 470−473.

[6] Ben-Hur A., Biham O. Universality in sandpile models. *Phys. Rev. E.*, 1996, vol. 53, no. 2, pp. R1317–R1320.

[7] Malinetskiy G.G., Podlazov A.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye Nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2012, no. 2, pp. 119–128.

[8] Pietronero L., Vespignani A, Zapperi S. Renormalization scheme for self-organized criticality in sandpile models. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, vol. 72, no. 11, pp. 1690−1693.

[9] Vespignani A., Zapperi S., Pietronero L. Renormalization approach to the self-organized critical behavior of sandpile models. *Phys. Rev. E.*, 1995, vol. 51, no. 3, pp. 1711−1724.

[10] Díaz-Guilera A. Dynamic renormalization group approach to self-organized critical phenomena. *Europhys. Lett.*, 1994, vol. 26, no. 3, p. 177.

[11] Corral Á., Díaz-Guilera A. Symmetries and fixed point stability of stochastic differential equations modeling self-organized criticality. *Phys. Rev. E.*, 1997, vol. 55, no. 3, pp. 2434−2445.

[12] Dhar D., Ramaswamy R. Exactly solved model of self-organized critical phenomena. *Phys. Rev. Lett.*, 1989, vol. 63, no. 16, pp. 1659−1662.

[13] Pastor-Satorras R., Vespignani A. Universality classes in directed sandpile models. *J. Phys. A: Math. Gen*, 2000, no. 33, pp. L33–L39.
[14] Paczuski M., Bassler K.E. Theoretical results for sandpile models of SOC with multiple topplings. *Phys. Rev. E*., 2000, vol. 62, no. 4, pp. 5347−5352.
[15] Kloster M., Maslov S., Tang C. Exact solution of stochastic directed sandpile model. *Phys. Rev. E*., 2001, vol. 63, no. 2, pp. 026111.
[16] Feder H.J.S., Feder J. Self-organized criticality in a stick-slip process. *Phys. Rev. Lett*., 1991, vol. 66, no. 20, pp. 2669−2672.
[17] Kadanoff L.P., Nagel S.R., Wu L., Zhou S. Scaling and universality in avalanches. *Phys. Rev. A*., 1989, vol. 39, no. 12, pp. 6524−6537.
[18] Podlazov A.V. *Izvestiya Vuzov. Prikladnaya Nelineynaya Dinamika – Proceedings of the universities: Applied Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 20, no. 6, pp. 25−46.
[19] Lübeck S., Usadel K.D. Bak-Tang-Wiesenfeld sandpile model around upper critical dimension. *Phys. Rev. E.*, 1997, vol. 56, no. 5, pp. 5138−5143.
[20] Chessa A., Vespignani A., Zapperi S. Critical exponents in stochastic sandpile models. *Comput. Phys. Commun*, 1999, vol. 121–122, pp. 299–302.
[21] Lübeck S. Moment analysis of the probability distributions of different sandpile models. *Phys. Rev. E.*, 2000, vol. 61, no. 1, pp. 204−209.
[22] Lübeck S., Usadel K.D. Numerical determination of the avalanche exponents of the Bak-Tang-Wiesenfeld model. *Phys. Rev. E*., 1997, vol. 55, no. 4, pp. 4095−4099.
[23] Ivashkevich E.V., Ktitarev D.V., Priezzhev V.B. Waves of topplings in an Abelian sandpile. *Physica A*., 1994, vol. 209, pp. 347−360.

Podlazov A.V. (b. 1973) graduated from the Moscow Institute of Physics and Technology in 1996. Ph.D., a senior research fellow at Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences. Author of 70 scientific publications and of two monographs in the field of theory of self-organized criticality and scale-invariant processes, theoretic demography, mathematical history and development of education system. e-mail: Tiger@Keldysh.ru