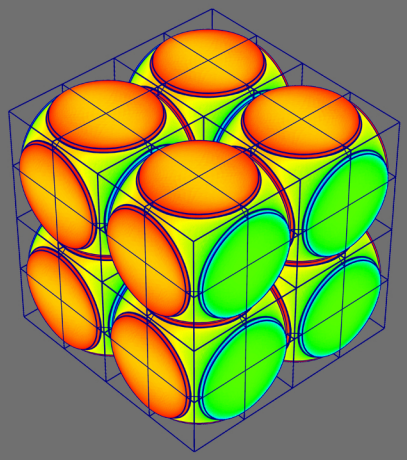
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В., Яхновский А.Д., Баймурзин Р.Р. Моделирование эффективных ядер релаксации и ползучести вязко-упругих композитов методом асимптотического осреднения. Математическое моделирование и численные методы, 2020, № 3, с. 22–46.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/227/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.189
13.01.2026 11:03:50

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2020-3-2246

Моделирование эффективных ядер релаксации и ползучести вязкоупругих композитов методом асимптотического осреднения

© Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин, С.В. Сборщиков, А.Д. Яхновский, Р.Р. Баймурзин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена задача о расчете интегральных характеристик вязкоупругости композиционных материалов, исходя из информации об аналогичных характеристиках компонентов композита и его микроструктуры. Предложен алгоритм для прогнозирования эффективных ядер релаксации и ползучести композитов с произвольной микроструктурой армирования. Алгоритм основан на использовании преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье, а также метода асимптотического осреднения для композитов при установившихся полигармонических колебаниях. В алгоритме используются экспоненциальные ядра релаксации и ползучести для исходных компонентов композита. Основой вычислительной процедуры предложенного алгоритма является конечно-элементное решение локальных задач вязкоупругости на ячейке периодичности композита. Результатом применения алгоритма является определение параметров экспоненциальных ядер релаксации и ползучести композиционных материалов, что позволяет получить решение задачи в полностью замкнутом виде. В качестве примера проведено численное моделирование вязкоупругих характеристик однонаправленно-армированных композитов на основе углеродных волокон и эпоксидной матрицы. Показано, что разработанный алгоритм позволяет получать эффективные ядра релаксации и ползучести композита с высокой точностью, без осцилляций, которые, как правило, сопровождают, методы обращения преобразований Фурье.

Ключевые слова: *композиты, вязкоупругость, ядра релаксации, ядра ползучести, комплексные модули упругости, однонаправленные композиты, метод асимптотического осреднения, метод конечного элемента, численное моделирование*

Введение. Полимерные композиционные материалы (ПКМ) проявляют существенные вязкоупругие свойства [1–7], которые широко используются при разработке демпфирующих конструкций авиационной, судостроительной и автомобильной промышленности. Различные методы расчета вязкоупругих свойств композитов, главным образом при циклических колебаниях, предложены в работах [1, 2, 8–12]. Для конструкций из ПКМ, длительно эксплуатирующихся при значительных механических нагрузках, важное значение имеет расчет деформаций ползучести композитов, в том числе — в зависимости от содержания их структурных компонентов — армирующих волокон, дисперсных частиц и др. Для решения этой задачи необходимо вычислять эффективные ядра релаксации и ползучести композита. Методы решения этой задачи рассматривались в работах [8, 9, 11, 13]. Эти методы

в основном основаны на приближенных алгоритмах расчета эффективных операторов вязкоупругости и применении преобразования Лапласа для обращения этих операторов. В [14] для расчета операторов вязкоупругости композитов предложено использовать метод асимптотического осреднения, а для обращения этих операторов предложено обобщение метода аппроксимации А.А. Ильюшина [15]. Различные варианты метода применения метода осреднения для расчета напряженно-деформированного состояния тонких вязкоупругих конструкций предложены в [16–20].

Целью настоящей статьи является построение алгоритма вычисления эффективных ядер релаксации и ползучести композитов на основе метода асимптотического осреднения для гармонических колебаний и применения обратного преобразования Фурье, с аналитическими аппроксимациями полученных функций. Показано, что такой способ обеспечивает высокую точность расчетов ядер релаксации и ползучести композитов.

Определяющие соотношения структурных компонентов вязкоупругих композитов. Рассмотрим композит периодической структуры, ячейка периодичности (ЯП) которого состоит из N компонентов [14, 21]. Все компоненты полагаем линейно-вязкоупругими. Определяющие соотношения всех компонентов задаются в виде интегральных соотношений вязкоупругости в форме Вольтерры [15, 22–24]

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} - \int_0^t {}^4\mathbf{K}(t-\tau)\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций, ${}^4\mathbf{C}$ — тензор модулей упругости, ${}^4\mathbf{K}(t)$ — тензор ядер релаксации.

Полагаем все компоненты композита изотропными, тогда тензоры ${}^4\mathbf{C}$ содержат 2 независимые константы, а тензоры ${}^4\mathbf{K}(t)$ — 2 независимые функции [14, 15, 24]

$${}^4\mathbf{C} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} + 2G\boldsymbol{\Delta} \tag{2}$$

$${}^4\mathbf{K}(t) = \left(K_1(t) - \frac{2}{3}K_2(t)\right)\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} + 2K_2(t)\boldsymbol{\Delta}, \tag{3}$$

где K, G — упругие константы компонент (K — модуль объёмного сжатия, G — модуль сдвига), $K_1(t)$ — ядро объемной релаксации, $K_2(t)$ — ядро сдвиговой релаксации, $\mathbf{E}$ — метрический тензор, $\boldsymbol{\Delta}$ —единичный тензор 4-го ранга [25].

Сделаем обычное допущение, справедливое для большинства изотропных материалов [14, 15, 24], об отсутствии объёмной релаксации для всех компонентов $K_1(t) \equiv 0$. Тогда

$$ {}^4\mathbf{K}(t) = 2K_2(t)\left(\mathbf{\Delta} - \frac{1}{3}\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}\right). \tag{4} $$

Обозначая интегральный оператор

$$ \breve{K}\varepsilon_{ij} = \int_0^t K_2(t-\tau)\varepsilon_{ij}(\tau)\,d\tau \tag{5} $$

соотношение (1) для компонент тензоров в декартовом базисе можно записать в матричном виде

$$ \{\sigma\} = \left[\breve{C}\right]\{\varepsilon\}, \tag{6} $$

где

$$ \left[\breve{C}\right] = [C] - \left[\breve{K}\right], $$

$$ [C] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1+2\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1+2\lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_1+2\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda_2 \end{array}\right) \tag{7} $$

$$ \left[\breve{K}\right] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{4}{3}\breve{K} & -\frac{2}{3}\breve{K} & -\frac{2}{3}\breve{K} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}\breve{K} & \frac{4}{3}\breve{K} & -\frac{2}{3}\breve{K} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}\breve{K} & -\frac{2}{3}\breve{K} & \frac{4}{3}\breve{K} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2\breve{K} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\breve{K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\breve{K} \end{array}\right), $$

$$ \{\sigma\} = \left(\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{8} $$

$$ \{\varepsilon\} = \left(\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{12}\right)^{\mathrm{T}}, $$

здесь $C_{1212} = \lambda_2$, $\breve{K}_{1212} = \breve{K}$, $\lambda_1 = K - 2/3G$, $\lambda_2 = G$, а σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций в декартовом базисе.

Обратные соотношения линейной вязкоупругости. Кроме прямых соотношений линейно-вязкоупругости (1) рассмотрим также обратные к ним соотношения [14, 15, 22, 24]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = {}^4\mathbf{\Pi}\cdot\cdot\boldsymbol{\sigma} + \int_0^t {}^4\mathbf{\Gamma}(t-\tau)\cdot\cdot\boldsymbol{\sigma}(\tau)\,d\tau, \tag{9}$$

где ${}^4\mathbf{\Pi}$ — тензор упругих податливостей, ${}^4\mathbf{\Gamma}(t)$ — тензор ядер ползучести. Для изотропных компонент композитов с нерелаксирующим объемом эти тензоры имеют вид аналогичный (2) и (4)

$${}^4\mathbf{\Pi} = -\frac{\nu}{E}\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\Delta},\quad {}^4\mathbf{\Gamma}(t) = 2\Gamma_2(t)\left(\boldsymbol{\Delta} - \frac{1}{3}\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}\right), \tag{10}$$

где ν, E — коэффициент Пуассона и модуль Юнга, связанные с K и G известными соотношениями [15]: $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$, $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, а $\Gamma_2(t)$ — ядро сдвиговой ползучести.

Обозначая интегральный оператор

$$\breve{\Gamma}\sigma_{ij} = \int_0^t \Gamma_2(t-\tau)\sigma_{ij}(\tau)\,d\tau \tag{11}$$

соотношение (9) записываем в матричном виде

$$\{\varepsilon\} = \left[\breve{\Pi}\right]\{\sigma\}, \tag{12}$$

где

$$\left[\breve{\Pi}\right] = [\Pi] + \left[\breve{\Gamma}\right], \tag{13}$$

$$[\Pi] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{array}\right), \tag{14}$$

$$\left[\breve{\Gamma}\right]=\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{4}{3}\breve{\Gamma} & -\frac{2}{3}\breve{\Gamma} & -\frac{2}{3}\breve{\Gamma} & 0 & 0 & 0\\
-\frac{2}{3}\breve{\Gamma} & \frac{4}{3}\breve{\Gamma} & -\frac{2}{3}\breve{\Gamma} & 0 & 0 & 0\\
-\frac{2}{3}\breve{\Gamma} & -\frac{2}{3}\breve{\Gamma} & \frac{4}{3}\breve{\Gamma} & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 2\breve{\Gamma} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\breve{\Gamma} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\breve{\Gamma}
\end{array}\right).$$

Матрицы $[\Pi]$ и $[C]$, а также матрицы-операторы вязко-упругости $\left[\breve{\Pi}\right]$ и $\left[\breve{C}\right]$ являются взаимообратными, т.е. имеют место следующие уравнения:

$$[\Pi][C]=[E],\ \left[\breve{\Pi}\right]\left[\breve{C}\right]\{\varepsilon\}=\{\varepsilon\}. \tag{15}$$

Второе уравнение в (15) представляет собой матричное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода для вычисления матричного оператора $\left[\breve{\Pi}\right]$ по заданному оператору $\left[\breve{C}\right]$, и наоборот.

Определяющие соотношения для вязкоупругих компонент композита при гармоническом нагружении. Для нахождения ядра ползучести $\Gamma_2(t)$ по заданному ядру релаксации $K_2(t)$, и наоборот, для изотропных компонентов композита необходимо решать интегральное уравнение Вольтерры

$$(\frac{1}{G}+4\breve{\Gamma})(G-\breve{K})\varepsilon_{12}=\varepsilon_{12}, \tag{16}$$

которое вытекает из матричного интегрального уравнения (15).

Для этой цели обычно применяют методы преобразований Лапласа [23], преобразования Фурье, приближенные методы аппроксимации [15] и другие методы.

Рассмотрим метод, основанный на преобразовании Фурье, который также далее применим и для расчета эффективных ядер релаксации и ползучести композита.

Рассмотрим гармоническое нагружение композита, когда тензоры напряжений и деформаций, а также вектор перемещений представляются в виде действительных частей комплексных величин, меняющихся по гармоническому закону

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\sigma}^{*}e^{i\omega t}\right),\ \boldsymbol{\varepsilon}=\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{*}e^{i\omega t}\right),\ \mathbf{u}=\mathrm{Re}\left(\mathbf{u}^{*}e^{i\omega t}\right), \tag{17}$$

где ω — частота колебаний, а $\boldsymbol{\sigma}^*$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ и $\mathbf{u}^*$ — тензоры и вектор комплексных амплитуд колебаний.

Тогда определяющие соотношения (1) и (9) для комплексных амплитуд принимают вид [14, 24]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^* &= {}^4\mathbf{C}^*(\omega)\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* &= {}^4\mathbf{\Pi}^*(\omega)\cdot\cdot\boldsymbol{\sigma}^*, \end{aligned} \tag{18}$$

где ${}^4\mathbf{C}^*(\omega)$ и ${}^4\mathbf{\Pi}^*(\omega)$ — тензоры комплексных модулей упругости и упругих податливостей

$$\begin{aligned} {}^4\mathbf{C}^*(\omega) &= {}^4\mathbf{C} - {}^4\mathbf{K}^*(\omega), \\ {}^4\mathbf{\Pi}^*(\omega) &= {}^4\mathbf{\Pi} + {}^4\mathbf{\Gamma}^*(\omega), \end{aligned} \tag{19}$$

здесь ${}^4\mathbf{K}^*(\omega)$ и ${}^4\mathbf{\Gamma}^*(\omega)$ — тензоры комплексных ядер релаксации и ползучести соответственно, определяемые следующим образом:

$${}^4\mathbf{K}^*(\omega) = \int_0^\infty \mathbf{K}(\tau)e^{-i\omega t}d\tau, \quad {}^4\mathbf{\Gamma}^*(\omega) = \int_0^\infty {}^4\mathbf{\Gamma}(\tau)e^{-i\omega t}d\tau. \tag{20}$$

Для изотропных компонентов композита из (3), (5) и (20) следует, что

$$\begin{aligned} {}^4\mathbf{K}^*(\omega) &= 2K_2^*(\omega)\left(\mathbf{\Delta} - \frac{1}{3}\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}\right), \\ {}^4\mathbf{\Gamma}^*(\omega) &= 2\Gamma_2^*(\omega)\left(\mathbf{\Delta} - \frac{1}{3}\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}\right), \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$K_2^*(\omega) = \int_0^\infty K_2(\tau)e^{-i\omega t}d\tau, \quad \Gamma_2^*(\omega) = \int_0^\infty \Gamma_2(\tau)e^{-i\omega t}d\tau, \tag{22}$$

— комплексные ядра релаксации и ползучести (сдвиговые).

Используя формулу Эйлера для комплексных чисел, из (21) выделяем действительную и мнимую части комплексного ядер релаксации и ползучести:

$$K_2^*(\omega) = K_2'(\omega) - iK_2''(\omega), \quad \Gamma_2^*(\omega) = \Gamma'_2(\omega) - i\Gamma''_2(\omega), \tag{23}$$

где Γ'_2, $\Gamma''_2(\omega)$ обозначены косинус и синус преобразования

$$\Gamma'_2(\omega) = \int_0^\infty \Gamma_2(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau, \quad \Gamma''_2(\omega) = \int_0^\infty \Gamma_2(\tau)\sin(\omega\tau)d\tau. \tag{24}$$

Если известно ядро ползучести $\Gamma_2(t)$, то, вычисляя для него комплексное ядро ползучести $\Gamma_2^*(\omega)$ по формуле (22), а затем тензор комплексных ядер релаксации ${}^4\mathbf{\Gamma}^*(\omega)$ — по формуле (21), тензор комплексных упругих податливостей ${}^4\mathbf{\Pi}^*(\omega)$ — по формуле (19), находим тензор ${}^4\mathbf{C}^*(\omega)$, как обратный к ${}^4\mathbf{\Pi}^*(\omega)$. Затем по первой формуле (19) вычисляем тензор ${}^4\mathbf{K}^*(\omega)$, он имеет структуру (21), поэтому по компонентам этого тензора находим $K_2^*(\omega)$. Из (16) находим явное выражение для $K_2^*(\omega)$

$$K_2^*(\omega) = G - \frac{1}{1/G + 4\Gamma_2^*(\omega)}. \tag{25}$$

Далее, используя обратное преобразование Фурье

$$K_2(t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_o^\infty K_2^*(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right), \tag{26}$$

находим ядро релаксации $K_2(\tau)$.

Вычисление комплексных модулей упругости для компонент композита для экспоненциальных ядер. Каждая вязкоупругая компонента композита имеет 1 ядро ползучести $\Gamma_2(t)$. Для аналитического представления этой функции применяются различные способы [14, 26, 27], наиболее широко распространенным является способ представления в виде суммы экспонент [28]

$$\Gamma_2(t) = \sum_{\gamma=1}^{n}\frac{B_\gamma}{\tau_\gamma}\exp\left(-\frac{t}{\tau_\gamma}\right), \tag{27}$$

где B_γ, τ_γ — константы ползучести материалов (компонент композита) $\gamma = 1\ldots n$. Ядро (25) — регулярное (ограниченная, гладкая, монотонноубывающая функция для всех $t \geq 0$).

Подставляя выражения (25) в (23), находим действительную и мнимую части комплексных ядер релаксации для экспоненциальных ядер [24]

$$\Gamma'_2(\omega) = \sum_{\gamma=1}^{n}\frac{B_\gamma}{1+(\omega\tau_\gamma)^2},\ \ \Gamma''_2(\omega) = \sum_{\gamma=1}^{n}\frac{B_\gamma\omega\tau_\gamma}{1+(\omega\tau_\gamma)^2}. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (23), (21), а затем в (21) в (19), получаем соответствующее выражение для тензора ${}^4\mathbf{\Pi}^*(\omega)$ для экспоненциальных ядер.

Расчёт эффективных вязкоупругих комплексных моделей упругости композитов методом асимптотического осреднения. Для вычисления эффективных вязкоупругих характеристик композитов при гармоническом нагружении применим метод асимптотического осреднения [14]. Используя вариант данного метода, предложенный в [12], для достижения указанной цели необходимо рассмотреть серию локальных задач L_{pq} на 1/8 ячейке периодичности (ЯП) $\tilde{V}_\xi = \{\xi_i \mid 0 < \xi_i < a_i\}$ в безразмерных локальных координатах ξ_i при гармоническом нагружении:

$$\begin{gathered}
\nabla_\xi \cdot \boldsymbol{\sigma}^*_{(pq)} = 0, \quad \text{в } \tilde{V}_\xi \\
\boldsymbol{\sigma}^*_{(pq)} = {}^4\mathbf{C}^*(\omega) \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*_{(pq)}, \quad \text{в } \tilde{V}_\xi \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s \\
\boldsymbol{\varepsilon}^*_{(pq)} = \frac{1}{2}\left(\nabla_\xi \otimes \mathbf{u}^*_{(pq)} + \nabla_\xi \otimes \mathbf{u}^{*T}_{(pq)}\right), \text{в } \tilde{V}_\xi \\
[\mathbf{u}^*_{(pq)}] = 0, \quad \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}^*_{(pq)}] = 0, \quad \text{на } \Sigma_{\xi\alpha N}
\end{gathered} \tag{29}$$

где a_i — длины ребер 1/8 ЯП по координатным направлениям, $\Sigma_s = \{\xi_s = 0\}$ — координатные плоскости, $\Sigma'_s = \{\xi_s = a_s\}$ — торцевые плоскости ЯП, $\Sigma_{\xi\alpha N}$ — поверхность раздела компонентов в ЯП, $\nabla_\xi = \mathbf{e}_s \partial / \partial \xi_s$ — набла-оператор относительно локальных координат ξ_i, $\mathbf{e}_s$ — векторы декартова (ортонормированного) базиса, ориентированного по ребрам ЯП. В (29) обозначены также $\boldsymbol{\sigma}^*_{(pq)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*_{(pq)}$, $\mathbf{u}^*_{(pq)}$ — тензоры комплексных амплитуд напряжений, деформаций и векторов перемещений в ЯП L_{pq}.

К задачам (27) присоединяются граничные условия на поверхностях Σ_s и Σ'_s.

$$\begin{aligned}
&\text{если } p = q: \ \mathbf{u}^*_{(pp)} \cdot \mathbf{e}_s = \frac{1}{2}\vartheta_s \bar{\varepsilon}^*_{pp} \delta_{sp}, \ \mathbf{e}_s \cdot \boldsymbol{\sigma}^*_{(pp)} \cdot \mathbf{e}_h = 0, \ \mathbf{e}_s \cdot \boldsymbol{\sigma}^*_{(pp)} \cdot \mathbf{e}_h = 0, \\
&\qquad s \neq h \neq r \neq s, \\
&\text{если } p \neq q: \ \mathbf{u}^*_{(pq)} \cdot \mathbf{e}_h = \frac{1}{4}\vartheta_s \bar{\varepsilon}^*_{pq} \delta_{sp}, \ \mathbf{e}_s \cdot \boldsymbol{\sigma}^*_{(pq)} \cdot \mathbf{e}_s = 0, \ \mathbf{u}^*_{(pq)} \cdot \mathbf{e}_r = 0, \\
&\qquad s \neq h \neq r \neq s,
\end{aligned} \tag{30}$$

здесь $\vartheta_s = 0$ — на Σ_s и $\vartheta_s = 1$ — на Σ'_s, а $\bar{\varepsilon}^*_{pq}$ — заданные компоненты тензора комплексных амплитуд средних деформаций композита в базисе $\mathbf{e}_s$. По немым индексам p и q здесь и далее суммирования нет.

Для численного решения локальных задач L_{pq} (29), (30) используется метод конечного элемента. Программная реализация решения этих задач осуществлена в программном комплексе SMCM, разработанном на кафедре «Вычислительная математика и математическая физика» и НОЦ «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана [29].

После решения локальных задач L_{pq} (29), (30) находим компоненты эффективного тензора комплексных модулей упругих композитов ${}^4\bar{\mathbf{C}}^*(\omega)$.

$$C^*_{ijpq}(\omega) = \frac{< \sigma^*_{ij(pq)} >}{\bar{\varepsilon}^*_{pq}}, \tag{31}$$

здесь обозначены средние напряжения по ЯП $\tilde{V}_\xi$

$$< \sigma^*_{ij(pq)} >= 8\int\limits_{\tilde{V}_\xi} \sigma^*_{ij(pq)} d\tilde{V}_\xi . \tag{32}$$

Эффективный тензор комплексных податливостей композита ${}^4\bar{\mathbf{\Pi}}^*(\omega)$ вычисляем как тензор, обратный к ${}^4\bar{\mathbf{C}}^*(\omega)$, т.е. удовлетворяющий

$${}^4\bar{\mathbf{\Pi}}^*(\omega)\cdot\cdot{}^4\bar{\mathbf{C}}^*(\omega) = {}^4\mathbf{\Delta}. \tag{33}$$

Вычислим по формуле (31) тензор ${}^4\bar{\mathbf{C}}$ — эффективный тензор модулей упругости композита для случая чисто упругих компонентов, для которых ядра релаксации равны нулю $K_2(t) = 0$, а также ${}^4\bar{\mathbf{\Pi}}$ — обратный к нему тензор эффективных упругих податливостей композита

$${}^4\bar{\mathbf{\Pi}}\cdot\cdot{}^4\bar{\mathbf{C}} = {}^4\mathbf{\Delta}. \tag{34}$$

Тогда эффективные тензоры ядер релаксации и ядер ползучести композиционного материала ${}^4\bar{\mathbf{K}}^*(\omega)$ и ${}^4\bar{\mathbf{\Gamma}}^*(\omega)$ находим с помощью следующей формулы

$${}^4\bar{\mathbf{K}}^*(\omega) = {}^4\bar{\mathbf{C}} - {}^4\bar{\mathbf{C}}^*(\omega),\ \ {}^4\bar{\mathbf{\Gamma}}^*(\omega) = {}^4\bar{\mathbf{\Pi}}^*(\omega) - {}^4\bar{\mathbf{\Pi}}. \tag{35}$$

Если ЯП композита имеет группой симметрии [25] — группу ортотропии с главными осями анизотропии $O\mathbf{e}_s$, то тензоры ${}^4\bar{\mathbf{K}}^*(\omega)$ и ${}^4\bar{\mathbf{\Gamma}}^*(\omega)$ являются индифферентными относительно группы ортотропии с главными осями ортотропии $O\mathbf{e}_s$. Обозначая их

компоненты $\bar{K}^{*}_{ijkl}(\omega)$ и $\bar{\Gamma}^{*}_{ijkl}(\omega)$ в базисе $O\mathbf{e}_s$, разделим их на действительную и мнимую части

$$\begin{aligned} \bar{K}^{*}_{ijkl}(\omega) &= \bar{K}^{/}_{ijkl}(\omega) - i\bar{K}^{//}_{ijkl}(\omega), \\ \bar{\Gamma}^{*}_{ijkl}(\omega) &= \bar{\Gamma}^{/}_{ijkl}(\omega) - i\bar{\Gamma}^{//}_{ijkl}(\omega). \end{aligned} \tag{36}$$

Тогда, применяя обратные косинус- и синус-преобразования Фурье

$$\begin{aligned} \bar{K}_{ijkl}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty} \bar{K}^{/}_{ijkl}(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega t + \frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty} \bar{K}^{//}_{ijkl}(\omega)\sin(\omega t)\,d\omega t, \\ \bar{\Gamma}_{ijkl}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty} \bar{\Gamma}^{/}_{ijkl}(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega t + \frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty} \bar{\Gamma}^{//}_{ijkl}(\omega)\sin(\omega t)\,d\omega t, \end{aligned} \tag{37}$$

находим эффективные ядра релаксации $\bar{K}_{ijkl}(t)$ и эффективные ядра ползучести композита $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$.

Для аналитического представления эффективных ядер $\bar{K}_{ijkl}(t)$ и $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$ используем экспоненциальные функции

$$\bar{K}_{ijkl}(t) = \sum_{\gamma=1}^{\bar{n}} \frac{A^{(\gamma)}_{ijkl}}{\bar{\tau}_{\gamma}} \exp\left(-\frac{t}{\bar{\tau}_{\gamma}}\right), \quad \bar{\Gamma}_{ijkl}(t) = \sum_{\gamma=1}^{\bar{n}} \frac{\bar{B}^{(\gamma)}_{ijkl}}{\bar{\psi}_{\gamma}} \exp\left(-\frac{t}{\bar{\psi}_{\gamma}}\right), \tag{38}$$

где $A^{(\gamma)}_{ijkl}$, $\bar{B}^{(\gamma)}_{ijkl}$, $\bar{\tau}_{\gamma}$, $\bar{\psi}_{\gamma}$ — константы аппроксимации, которые находим из условия наилучшей аппроксимации ядер $\bar{K}_{ijkl}(t)$ и $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$ с помощью (38).

Эффективные функции релаксации и ползучести композита в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijkl}(t) &= \bar{C}_{ijkl} - \sum_{\gamma=1}^{\bar{n}} A^{(\gamma)}_{ijkl}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\bar{\tau}_{\gamma}}\right)\right), \\ \bar{\Pi}_{ijkl}(t) &= \bar{\Pi}_{ijkl} + \sum_{\gamma=1}^{\bar{n}} B^{(\gamma)}_{ijkl}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\bar{\psi}_{\gamma}}\right)\right). \end{aligned} \tag{39}$$

Результаты численного моделирования полей концентрации амплитуд напряжений. В соответствии с разработанной методикой было проведен расчет ядер релаксации и ползучести для однонаправленных композитов на основе эпоксидной матрицы и углеродных волокон. Волокна считались упругими изотропнымии, а матрица — вязкоупругой.

При численных расчетах использовались следующие значения упругих характеристик матрицы (модуль упругости E_m и коэффициент Пуассона ν_m), а также волокон (модуль упругости E_f и коэффициент Пуассона ν_f):

$$E_m = 3{,}0 \text{ ГПа}, \ \nu_m = 0{,}35, \ \ E_f = 200 \text{ ГПа}, \ \nu_f = 0{,}25.$$

Коэффициент армирования 1D композита был принят равным 0,6.

Функция ползучести эпоксидной матрицы при одноосном растяжении $\Pi_m(t)$ была взята из экспериментальных данных работы [13]. Для аналитической аппроксимации этой функции было использовано экспоненциальное ядро ползучести (27)

$$\Pi_m(t) = \frac{1}{E_m} + \frac{4}{3}\sum_{\gamma=1}^{n} B_\gamma \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_\gamma}\right)\right), \ \Gamma_2(t) = \frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial t}\Pi_m(t). \qquad (40)$$

Были получены следующие значения констант ползучести матрицы

$$\begin{gathered} B_1 = 0{,}081 \text{ ГПа}^{-1}, \ B_2 = 0{,}283 \text{ ГПа}^{-1}, \ B_3 = 0{,}824 \text{ ГПа}^{-1}, \\ \tau_1 = 5{,}91 \cdot 10^3 \text{ с}, \ \tau_2 = 1{,}2 \cdot 10^7 \text{ с}, \ \tau_3 = 1{,}8 \cdot 10^8 \text{ с}. \end{gathered} \qquad (41)$$

График функции $\Pi_m(t)$, полученный экспериментально по данным работы [13], и с помощью аналитической аппроксимации экспериментальных данных по формулам (38), показан на рис. 1, на котором введено $\bar{t} = t / t_0$ — безразмерное время, а $t_0 = 1{,}8 \cdot 10^8$ с — максимальное значение времени эксперимента.

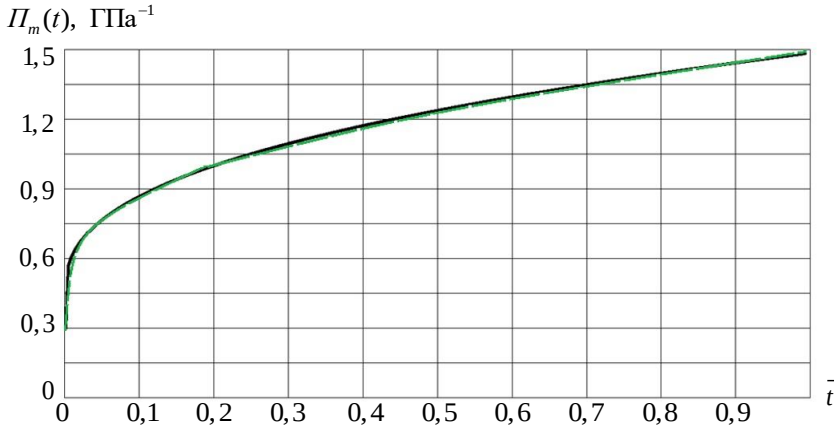


Рис. 1. Функция ползучести $\Pi_m(t)$ эпоксидной матрицы (пунктиром показаны экспериментальные значения по данным [13]), $\bar{t}$ — безразмерное время

Найденные константы B_γ и τ_γ (41) с помощью (23) и (28) были использованы для вычисления комплексного ядра сдвиговой ползучести $\Gamma_2^*(\omega)$ — как функции от частоты. Далее был образован тензор ${}^4\mathbf{\Gamma}^*(\omega)$ (21), по нему составлен ${}^4\mathbf{\Pi}^*(\omega)$ — тензор комплексных упругих податливостей. Обращением этого тензора вычислен тензор комплексных модулей упругости ${}^4\mathbf{C}^*(\omega)$ и тензор ${}^4\mathbf{K}^*(\omega)$ по (19). С помощью формул (25) были вычислены значения функции $K_2^*(\omega)$. Для аналитической аппроксимации этой функции была использована модель экспоненциальных ядер

$$K_2(t) = \sum_{\gamma=1}^{m} \frac{A_\gamma}{\tau_\gamma} \exp\left(-\frac{t}{\tau_\gamma}\right), \tag{42}$$

которая приводит к дробно-рациональным выражениям для комплексного ядра сдвиговой релаксации матрицы

$$K_2^{'}(\omega) = \sum_{\gamma=1}^{m} \frac{A_\gamma}{1+(\omega\tau_\gamma)^2}, \quad K^{''}{}_2(\omega) = \sum_{\gamma=1}^{m} \frac{A_\gamma \tau_\gamma \omega}{1+(\tau_\gamma\omega)^2}. \tag{43}$$

На рис. 2 и 3 показаны графики функций $K_2^{'}(\omega)$ и $K^{''}{}_2(\omega)$ для эпоксидной матрицы.

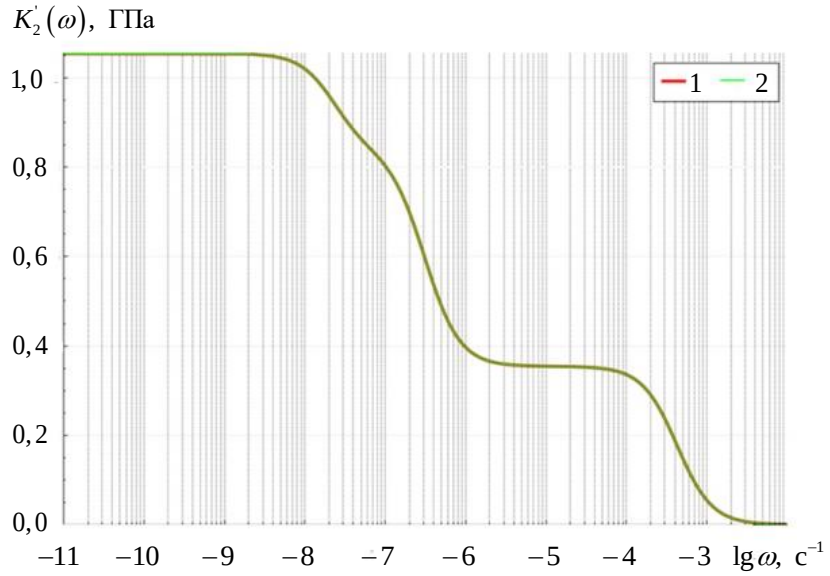


Рис. 2. Функции $K_2^{'}(\omega)$ в полулогарифмических координатах для эпоксидной матрицы:
1 — графики, построенные по формуле (25), 2 — аппроксимация помощью (43)

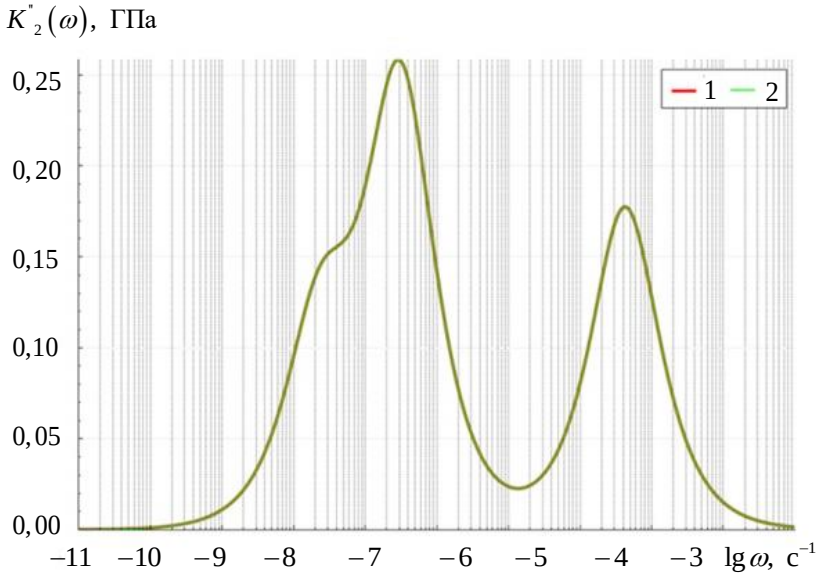


Рис. 3. Функции $K''_2(\omega)$ в полулогарифмических координатах для эпоксидной матрицы:
1 — графики, построенные по формуле (25), 2 — аппроксимация помощью (43)

Были получены следующие значения констант

$$A_1 = 0,354 \text{ ГПа}, \quad A_2 = 0,483 \text{ ГПа},$$
$$A_3 = 0,2175 \text{ ГПа},$$
$$\tau_1 = 1,8\cdot 10^3 \text{ с}, \quad \tau_2 = 1,8\cdot 10^7 \text{ с}, \tag{44}$$
$$\tau_3 = 1,8\cdot 10^8 \text{ с}.$$

График функции сдвиговой релаксации эпоксидной матрицы, построенный с помощью сдвигового ядра релаксации (42)

$$R_2(t) = G - \sum_{\gamma=1}^{m} A_\gamma \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_\gamma}\right)\right) \tag{45}$$

показан на рис. 4.

На рис. 5 показана КЭ-сетка, использованная для решения локальных задач вязкоупругости (29), (30). Использовался тетраэдальный четырехузловой конечный элемент, количество узлов: 2812, количество конечных элементов: 15388, количество граничных элементов: 1368. Ось трансверсальной изотропии 1D композита направлена по оси $O\xi_1$.

Матрицы компонент тензоров ${}^4\overline{\mathbf{C}}$ и ${}^4\overline{\mathbf{\Pi}}$ для 1D композита, вычисленные по формулам (31) и (33) имеют вид (все значения в ГПа и ГПа$^{-1}$, соответственно):

$$
{}^{4}\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 120,9 & 6,3 & 6,3 & 0 & 0 & 0 \\ 6,3 & 15,2 & 6,7 & 0 & 0 & 0 \\ 6,3 & 6,7 & 15,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8,6 \end{pmatrix},
$$

$$
{}^{4}\overline{\mathbf{\Pi}} = \begin{pmatrix} 0,0085 & -0,0024 & -0,0024 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0024 & 0,0820 & -0,0340 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0024 & -0,0340 & 0,0820 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1160 \end{pmatrix}.
$$

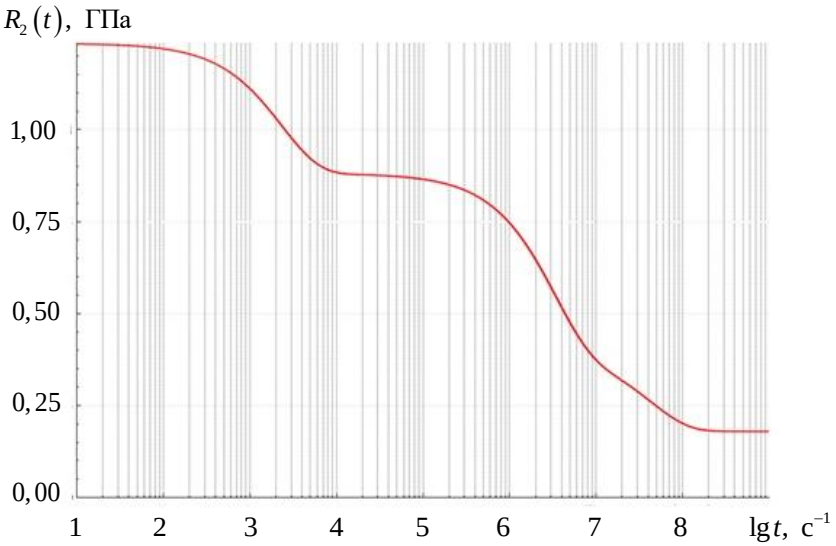


Рис. 4. Функция релаксации $R_2(t)$ в полулогарифмических координатах для эпоксидной матрицы, построенная по (44) и (45)

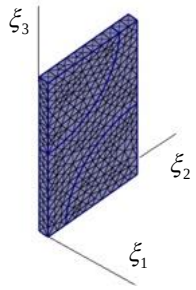


Рис. 5. КЭ сетка для ЯП 1D композита

На рис. 6–11 показаны графики эффективных комплексных ядер релаксации композита $\bar{K}^{/}_{ijkl}(\omega)$ и $\bar{K}^{//}_{ijkl}(\omega)$ для нескольких независимых компонент трансверсально-изотропного 1D композита.

Для аналитической аппроксимации этих функций использовались экспоненциальные зависимости (38). Графики комплексных ядер релаксации композита $\bar{K}^{/}_{ijkl}(\omega)$ и $\bar{K}^{//}_{ijkl}(\omega)$ в целом повторяют графики комплексных ядер $K^{'}_{2}(\omega)$ и $K^{''}_{2}(\omega)$ матрицы: для действительных частей $\bar{K}^{/}_{ijkl}(\omega)$ и $K^{'}_{2}(\omega)$ имеется 3 характерных интервала частот, на которых реализуется максимальные значения производных этих функций (по абсолютной величине) — на этих интервалах происходит резкое падение функций $\bar{K}^{/}_{ijkl}(\omega)$ и $K^{'}_{2}(\omega)$.

Для мнимых частей $\bar{K}^{//}_{ijkl}(\omega)$ и $K^{''}_{2}(\omega)$ существуют по 3 характерных локальных экстремума, которые достигаются для матрицы и композита для одних и тех же значений частот. Максимальные значения $\bar{K}^{//}_{1111}(\omega)$ меньше максимумов функции $K^{'}_{2}(\omega)$ для матрицы, а функции $\bar{K}^{//}_{2222}(\omega)$ и $\bar{K}^{//}_{1212}(\omega)$ имеют большие значения максимумов, чем $K^{'}_{2}(\omega)$.

Рис. 6. Функции $\bar{K}^{'}_{1111}(\omega)$ в полулогарифмических координатах для 1D композита:

1 — графики, построенные по формуле (35), 2 — аппроксимация помощью (38)

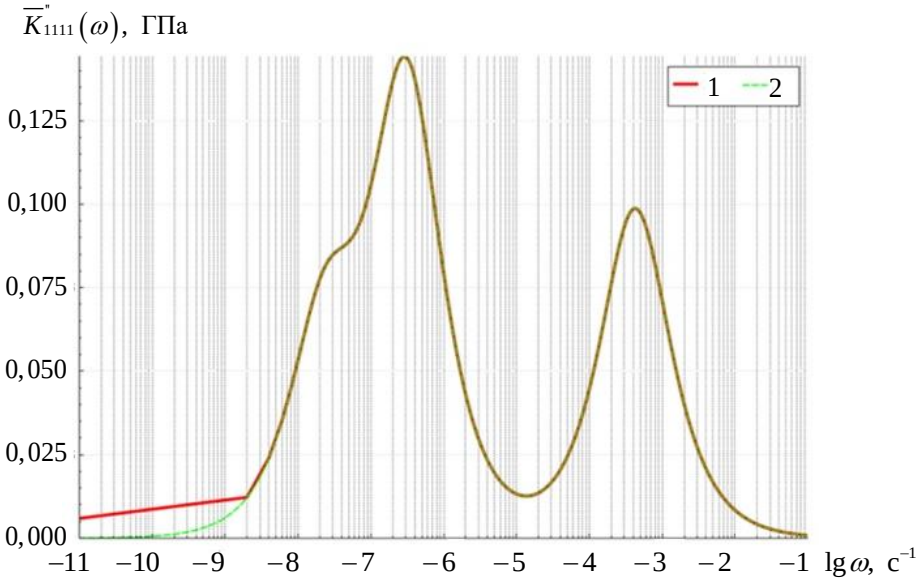


Рис. 7. Функции $\overline{K}''_{1111}(\omega)$ в полулогарифмических координатах для 1D композита:

1 — графики, построенные по формуле (35), 2 — аппроксимация помощью (38)

Рис. 8. Функции $\overline{K}'_{2222}(\omega)$ в полулогарифмических координатах для 1D композита:

1 — графики, построенные по формуле (35), 2 — аппроксимация помощью (38)

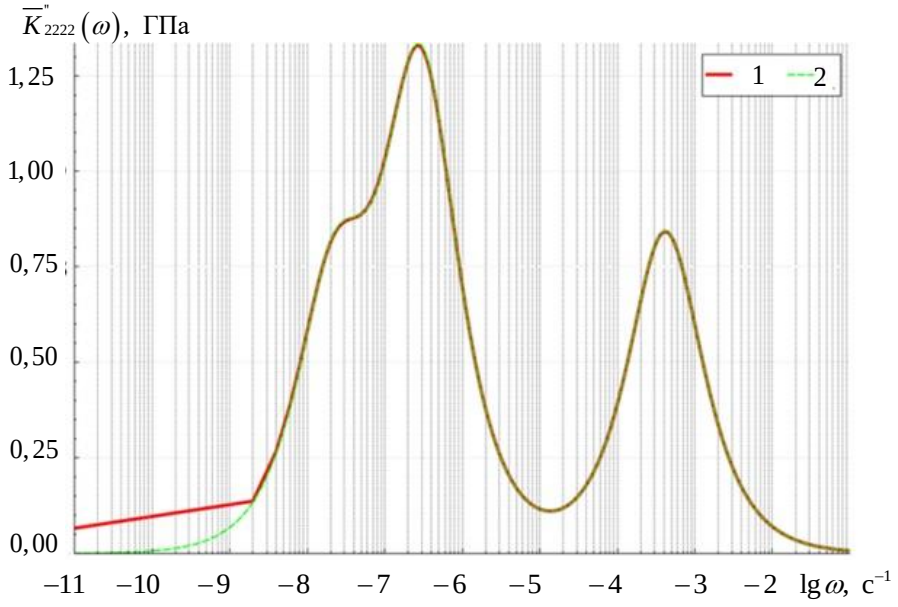


Рис. 9. Функции $\overline{K}''_{2222}(\omega)$ в полулогарифмических координатах для 1D композита:

1 — графики, построенные по формуле (35), 2 — аппроксимация помощью (38)

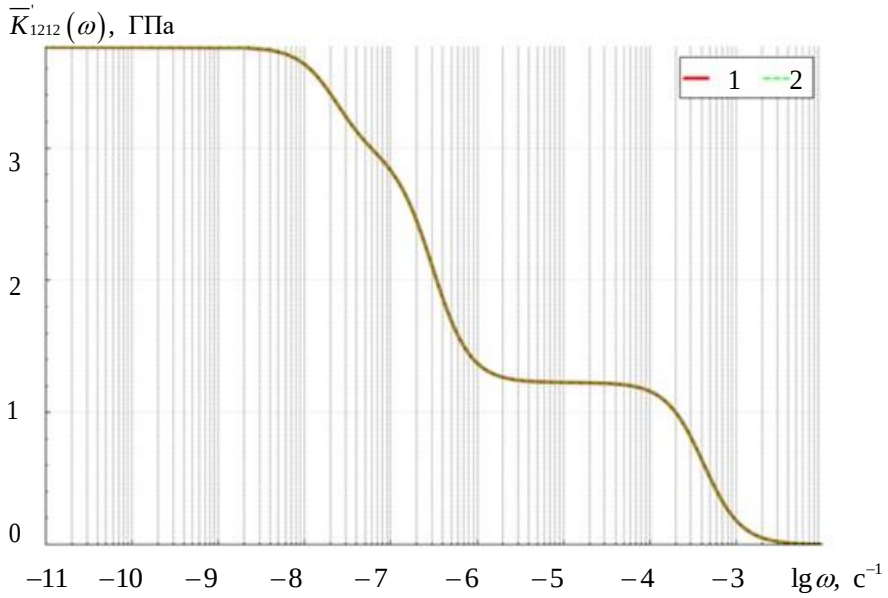


Рис. 10. Функции $\overline{K}'_{1212}(\omega)$ в полулогарифмических координатах для 1D композита:

1 — графики, построенные по формуле (35), 2 — аппроксимация помощью (38)

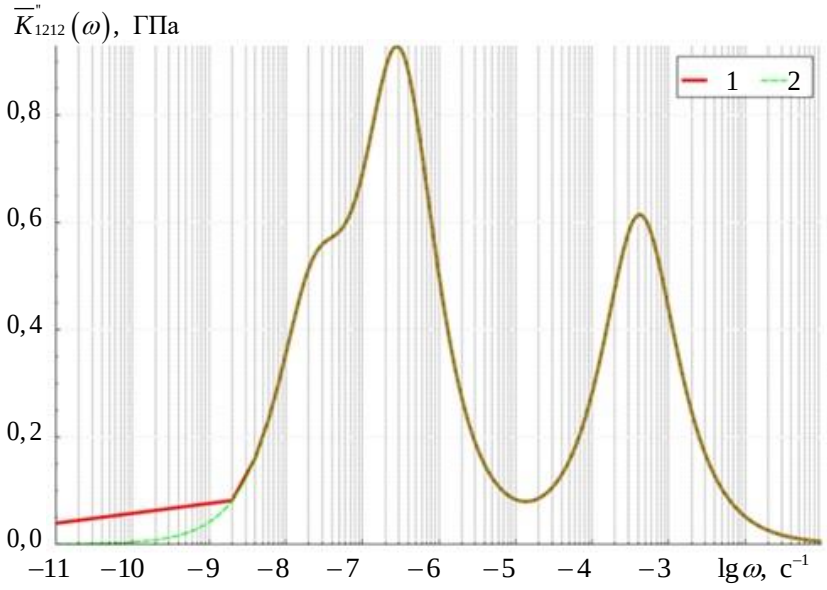


Рис. 11. Функции $\overline{K}'_{1212}(\omega)$ в полулогарифмических координатах для 1D композита:
1 — графики, построенные по формуле (35), 2 — аппроксимация помощью (38)

На рис. 12–15 представлены графики эффективных функций ползучести 1D композита, вычисленные по формулам (39). Характер поведения этих функций подобен функции ползучести $\Pi_m(t)$ матрицы, однако, максимальные значения всех функций композита $\overline{\Pi}_{ijkl}(t)$ по абсолютной величине, существенно меньше, максимальных значений функции $\Pi_m(t)$. Изменения функция ползучести композита в направлении армирования $\overline{\Pi}_{1111}(\overline{t})$ малы: величина относительного изменения $\Delta\overline{\Pi}_{1111} = \overline{\Pi}_{1111}(1)/\overline{\Pi}_{1111}(0) - 1$ составляют 0,014, в то время как аналогичные относительные изменения функций ползучести в поперечном направлении и при поперечном сдвиге составляют: $\Delta\overline{\Pi}_{2222} = 2{,}04$ и $\Delta\overline{\Pi}_{1212} = 5{,}82$. Аналогичное значение $\Delta\Pi_m = \Pi_m(1)/\Pi_m(0) - 1$ для эпоксидной матрицы также составляет $\Delta\Pi_m = 5{,}82$. Эти результаты находятся в полном согласии с имеющимися экспериментальными данными о вязкоупругих свойствах 1D композитов [13].

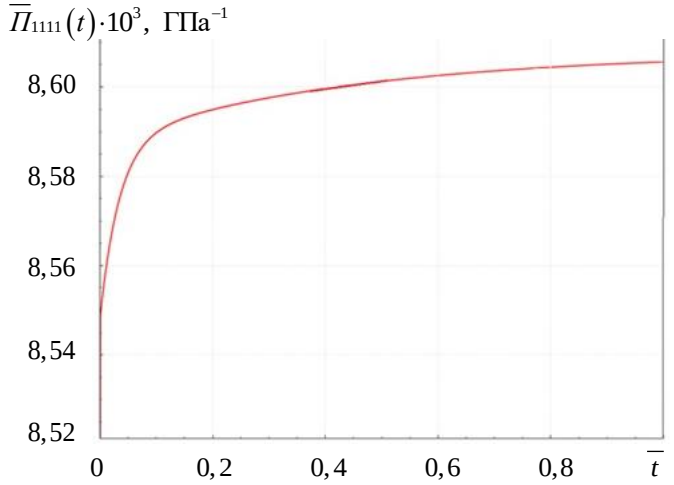


Рис. 12. Эффективная функция ползучести 1D композита $\overline{\Pi}_{1111}(t)$

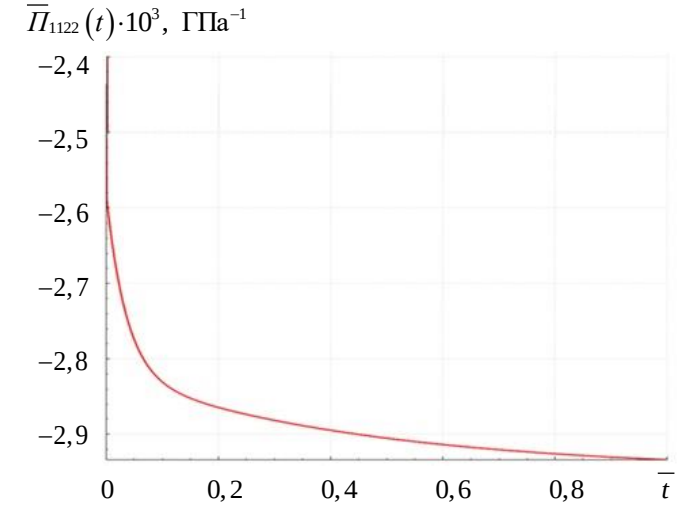


Рис. 13. Эффективная функция ползучести 1D композита $\overline{\Pi}_{1122}(t)$

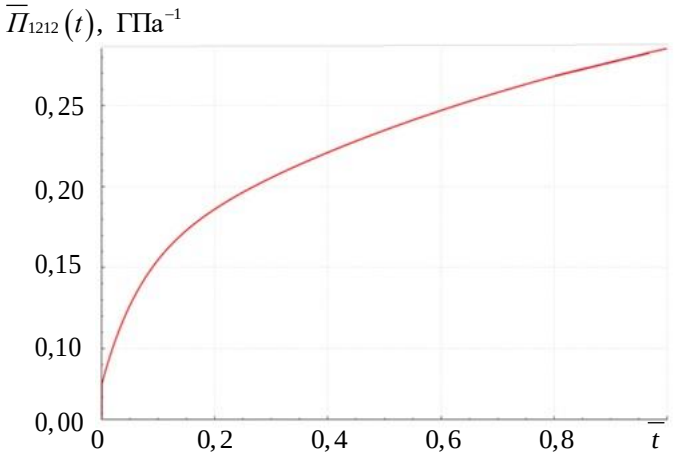


Рис. 14. Эффективная функция ползучести 1D композита $\overline{\Pi}_{1212}(t)$

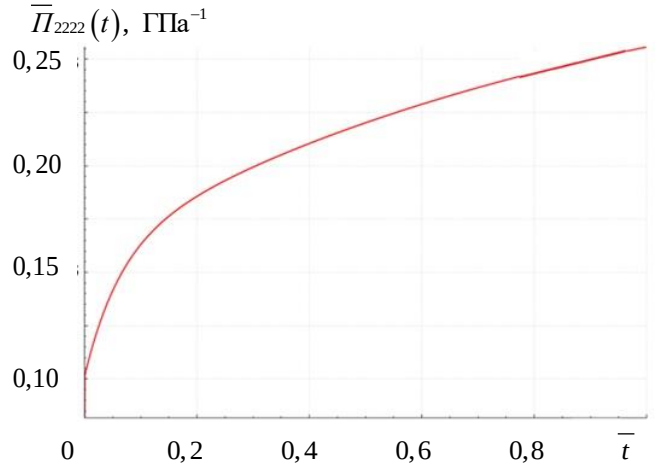


Рис. 15. Эффективная функция ползучести 1D композита $\overline{\Pi}_{2222}(t)$

Выводы. Предложен алгоритм вычисления эффективных функций и ядер релаксации и ползучести композитов с периодической структурой, основанный на основе использовании метода асимптотического осреднения для гармонических колебаний, применения обратного преобразования Фурье, и аналитической аппроксимациями ядер ползучести и релаксации в виде сумм экспонент. Проведен пример расчета функций и ядер ползучести и релаксации для случая однонаправленного композита, который показал, что предложенный алгоритм обеспечивает высокую точность расчетов ядер релаксации и ползучести композитов, а также обладает хорошей устойчивостью и отсутствием осцилляций, которые возникают, как правило, при обращении преобразования Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Shapery R. Viscoelastic behavior and analysis of composite materials. *Mechanics of Composite Materials*, 1974, vol. 4, pp. 85–168.

[2] Hashin Z. Complex moduli of viscoelastic composites: I. General theory and application to particulate composites. *International Journal of Solids and Structures*, 1970, vol. 6, no. 5, pp. 539–552.

[3] Chen C.P., Lakes R.S. Analysis of high loss viscoelastic composites. *Journal Materials Science*, 1993, vol. 28, pp. 4299–4304.

[4] Friebel C., Doghri I., Legat V. General mean-field homogenization schemes for viscoelastic composites containing multiple phases of coated inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, pp. 2513–2541.

[5] Shibuya Y. Evaluation of creep compliance of carbon-fiber-reinforced composites by homogenization theory. *JSME International Journal Series A Solid Mechanics and Material Engineering*, 1997, vol. 40, pp. 313–319.

[6] Haasemann G, Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites. *Technische Mechanik*, 2010, vol. 3, no. 1–3, pp. 122–135.

[7] Masoumi S., Salehi M., Akhlaghi M. Nonlinear viscoelastic analysis of laminated composite plates — a multi scale approach. *International Journal of Recent advances in Mechanical Engineering*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 11–18.

[8] Tran A.B., Yvonnet J., He Q.–C., Toulemonde C., Sanahuja J. A simple computational homogenization method for structures made of linear heterogeneous viscoelastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, vol. 200, pp. 2956–2970.

[9] Matzenmiller A, Gerlach S. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber–matrix bonding. *Computational Materials Science*, 2004, vol. 29, iss. 3, pp. 282–300.

[10] Imaoka S. Analyzing Viscoelastic materials. *Ansys Advantage*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 46–47.

[11] Cavalcante M.A.A., Marques, S.P.C. Homogenization of periodic materials with viscoelastic phases using the generalized FVDAM theory. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 87, pp. 43–53.

[12] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 28–48.

[13] Максимов Р.Д., Плуме Э.З. Ползучесть однонаправленно армированных полимерных композитов. *Механика композитных материалов*, 1984, № 2, с. 215–223.

[14] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 324 с.

[15] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. Москва, Наука, 1970, 356 с.

[16] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2014, № 10, с. 359–382.

[17] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2014, № 7, с. 243–265.

[18] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А., Ерасов В.С., Яковлев Н.О. Моделирование и разработка трехслойных композиционных материалов с сотовым заполнителем. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2014, № 5, с. 66-82.

[19] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с.18–36.

[20] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.

[21] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984, 352 с.

[22] Москвитин Б.В. *Сопротивление вязкоупругих материалов*. Москва, Наука, 1972, 328 с.

[23] Christensen R.M. *Theory of Viscoelasticity — 2nd Edition*. New York, Academic Press, 1982, 356 p.

[24] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[25] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

[26] Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твёрдых тел*. Москва, Наука, 1977, 384 с.

[27] Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций*. Москва, Физматлит, 2005, 576 с.

[28] Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига, Зинатне, 1980, 572 с.

[29] Свидетельство № 2018614767 *Программа MultiScale_SMCM для многомасштабного моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций из композиционных материалов, на основе метода многоуровневой асимптотической гомогенизации и конечно-элементного решения трехмерных задач теории упругости*: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ / Ю.И. Димитриенко, С.В. Сборщиков, Ю.В. Юрин; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана — № 2018677684; заявл. 21.02.2018; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 17.04.2018. — [1].

Статья поступила в редакцию 03.10.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В., Яхновский А.Д., Баймурзин Р.Р. Моделирование эффективных ядер релаксации и ползучести вязкоупругих композитов методом асимптотического осреднения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 3, с. 22–46.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Юрин Юрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Сборщиков Сергей Васильевич — научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: servasbor@gmail.com

Яхновский Алексей Денисович — магистрант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yahnovskiy@gmail.com

Баймурзин Радмир Расимович — магистрант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: radmir200@mail.ru

Modeling of effective relaxation and creep kernels of viscoelastic composites by asymptotic averaging method

© Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin, S.V. Sborschikov, A.D. Yahnovskiy, R.R. Baymurzin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The problem of calculating the integral characteristics of the viscoelasticity of composite materials is considered, based on information on similar characteristics of the composite components and its microstructure. An algorithm is proposed for predicting the effective relaxation and creep kernels of composites with an arbitrary reinforcement microstructure. The algorithm is based on the Fourier transform application and the inverse Fourier transform, as well as the method of asymptotic averaging for composites under steady-state polyharmonic vibrations. The algorithm uses exponential relaxation and creep kernels for the initial components of the composite. The basis of the computational procedure of the proposed algorithm is the finite element solution of local viscoelasticity problems over the composite periodicity cell. The result of the algorithm application is the determination of the exponential relaxation and creep kernels parameters for composite materials, which makes it possible to obtain a problem solution in a completely closed form. As an example, a numerical simulation of the viscoelastic-tic characteristics of unidirectionally reinforced carbon /epoxy composites has been carried out. It is shown that the developed algorithm allows one to obtain effective relaxation and creep kernels of the composite with high accuracy, without oscillations, which, as a rule, ac-company the methods of inverting Fourier transforms.

Keywords*: composites, viscoelasticity, relaxation kernels, creep kernels, complex elastic moduli, unidirectional composites, asymptotic averaging method, finite element method, numerical simulation*

REFERENCES

[1] Shapery R. Viscoelastic behavior and analysis of composite materials. *Mechanics of Composite Materials*, 1974, vol. 4, pp. 85–168.

[2] Hashin Z. Complex moduli of viscoelastic composites: I. General theory and application to particulate composites. *International Journal of Solids and Structures*, 1970, vol. 6, no. 5, pp. 539–552.

[3] Chen C.P., Lakes R.S. Analysis of high loss viscoelastic composites. *Journal Materials Science*, 1993, vol. 28, pp. 4299–4304.

[4] Friebel C., Doghri I., Legat V. General mean-field homogenization schemes for viscoelastic composites containing multiple phases of coated inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, pp. 2513–2541.

[5] Shibuya Y. Evaluation of creep compliance of carbon-fiber-reinforced composites by homogenization theory. *JSME International Journal Series A Solid Mechanics and Material Engineering*, 1997, vol. 40, pp. 313–319.

[6] Haasemann G, Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites. *Technische Mechanik*, 2010, vol. 3, no. 1–3, pp. 122–135.

[7] Masoumi S., Salehi M., Akhlaghi M. Nonlinear viscoelastic analysis of laminated composite plates — a multi scale approach. *International Journal of Recent advances in Mechanical Engineering*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 11–18.

[8] Tran A.B., Yvonnet J., He Q.–C., Toulemonde C., Sanahuja J. A simple computational homogenization method for structures made of linear heterogeneous viscoelastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, vol. 200, pp. 2956–2970.

[9] Matzenmiller A, Gerlach S. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber–matrix bonding. *Computational Materials Science*, 2004, vol. 29, iss. 3, pp. 282–300.

[10] Imaoka S. Analyzing Viscoelastic materials. *Ansys Advantage*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 46–47.

[11] Cavalcante M.A.A., Marques, S.P.C. Homogenization of periodic materials with viscoelastic phases using the generalized FVDAM theory. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 87, pp. 43–53.

[12] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Finite element modulation of effective viscoelastic properties of unilateral composite materials. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 28–48.

[13] Maksimov R.D., Plume E.Z. Creep in unidirectionally reinforced polymer composites. *Mechanics of Composite Materials*, vol. 20, no. 2, pp. 149–157.

[14] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1984, 324 p.

[15] Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoj teorii termovyazkouprugosti* [Fundamentals of the mathematical theory of thermovyazcoelasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 356 p.

[16] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Yakovlev D.O. Asimptoticheskaya teoriya vyazkouprugosti mnogoslojnyh tonkih kompozitnyh plastin [Asymptotic theory of viscoelasticity of multilayer thin composite plates]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of Bauman MSTU], 2014, no. 10, pp. 359–382.

[17] Dimitrienko Y.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Prozorovsky A.A. Mnogomasshtabnoe konechno-elementnoe modelirovanie trekhslojnyh sotovyh kompozitnyh konstrukcij [Multiscale finite element modeling of three-layer honeycomb composite structures]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of Bauman MSTU], 2014, no. 7, pp. 243–265.

[18] Dimitrienko Yu.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Prozorovsky A.A., Erasov V.S., Yakovlev N.O. Modeling and development of three-layer sandwich composite materials with honeycomb core. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2014, no. 5, pp. 66–82.

[19] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Yurin Y.V. Asymptotic theory of thermocreep for multilayer thin plates. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 18–36.

[20] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Asymptotic theory of constructive-orthotropic plates with two-periodic structures. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–56.

[21] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of the composite material mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.

[22] Moskvitin B.V. *Soprotivlenie vyazkouprugih materialov* [Resistance of viscoelastic materials]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 328 p.

[23] Christensen R.M. *Theory of Viscoelasticity — 2nd Edition*. New York, Academic Press, 1982, 356 p.

[24] Dimitrienko Yu. I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[25] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 367 p.

[26] Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoj mekhaniki tvyordyh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 384 p.

[27] Gorshkov A.G., Starovoitov E I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistyh vyazko-uprugoplasticheskih elementov konstrukcij* [Mechanics of layered viscoelastic structural elements]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 576 p.

[28] Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie polimernyh i kompozitnyh materialov* [Resistance of polymer and composite materials]. Riga, Zinatne Publ., 1980, 572 p.

[29] Certificate no. 2018614767 *Programma MultiScale_SMCM dlya mnogomasshtabnogo modelirovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya konstrukcij iz kompozicionnyh materialov, na osnove metoda mnogourovnevoj asimptoticheskoj gomogenizacii i konechno-elementnogo resheniya trekhmernyh zadach teorii uprugosti* [MultiScale_SMCM program for multiscale modeling of the stress-strain state of structures made of composite materials, based on the method of multilevel asymptotic homogenization and finite element solution of three-dimensional problems of elasticity theory]: certificate of ofic. registration of computer programs/ Yu.I. Dimitrienko, S.V. Sborshchikov, Yu.V. Yurin; applicant and copyright holder: BMSTU — no. 2018677684; application 21.02.2018; registered in the register of computer programs 17.04.2018 — [1].

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Yurin Yu.V., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Senior researcher of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Sborschikov S.V., researcher of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: servasbor@gmail.com

Yahnovskiy A.D., undergraduate, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, employee of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yahnovskiy@gmail.com

Baymurzin R.R., undergraduate, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, employee of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: radmir200@mail.ru