



Математическое моделирование и численные методы

Валишин А.А., Туманов И.А., Ахунд-заде М.Р. Компьютерное построение сети эквидистант сложных негладких кривых на местности. Математическое моделирование и численные методы. 2020. № 2. с. 95–106.

Источник: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/224/>

Компьютерное построение сети эквидистант сложных негладких кривых на местности

© А.А. Валишин, И.А. Туманов, М. . Ахунд-заде

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Эквидистанта некоторой кривой — это множество точек, равноудаленных от этой кривой, т.е. множество концов равных отрезков, отложенных в определённом направлении на нормалях к кривой. Создается эквидистанта на базе уже существующих базовых кривых (сплайнов, функций), ее внешний вид определяется видом кривой и величиной смещения. Проблема построения эквидистантных линий имеет основополагающее значение в различных областях техники: при создании программ для станков с числовым программным управлением (ЧПУ), в проектировании трассировки печатных плат, при проектировании трубопроводов. В этом случае проводится только осевая линия, а затем строятся эквидистантные линии контуров самой трубы. Эквидистанты широко применяют в геологии, при разработке строительных и архитектурных чертежей. В машиностроении эквидистанты используются при проектировании кулачковых механизмов. В теории систем автоматизированного проектирования (САПР) эквидистантой принято называть линию, равноотстоящую от обрабатываемого контура детали на расстояние, равное радиусу режущего инструмента. В металлообработке эквидистанта описывает траекторию движения центра фрезы относительно контура обрабатываемой поверхности, в системах автоматического раскроя ткани.

В работе рассматривается проблема построения сети эквидистант для обследования прибрежной акватории при проектировании морских терминалов, а также для высадки морского десанта на побережье. Предложен компьютерный алгоритм построения эквидистант сложных негладких кривых на местности. Алгоритм реализован в виде компьютерной программы. Программа протестирована на примере кривой реальной береговой полосы.

Ключевые слова: эквидистанта, негладкие кривые на местности

Введение. Эквидистанта некоторой кривой L — это множество точек, равноудаленных от этой кривой, т.е. множество концов равных отрезков, отложенных в определённом направлении на нормалях к L [1, 2]. Создается эквидистанта на базе уже существующих базовых кривых (сплайнов, функций), ее внешний вид определяется видом кривой и величиной смещения [3–5]. Проблема построения эквидистантных линий имеет основополагающее значение в различных областях техники, в первую очередь, при создании программ для станков с числовым программным управлением (ЧПУ), в проектировании трассировки печатных плат, в разработке элементов моделей трубопроводов и др. Эквидистанты применяются, например, при вычерчивании трубопроводов. В этом случае проводится только осевая линия, а затем строятся эквидистантные линии контуров самой трубы [6–8]. При проектировании морских терминалов [9]. Кроме того, эквидистанты

широко применяют в геологии [10], при разработке строительных и архитектурных чертежей. В машиностроении эквидистанты используются при проектировании кулачковых механизмов. В теории систем автоматизированного проектирования (САПР) эквидистантой принято называть линию, равноотстоящую от обрабатываемого контура детали на расстояние, равное радиусу режущего инструмента [11, 12]. В металлообработке эквидистанта описывает траекторию движения центра фрезы относительно контура обрабатываемой поверхности [11], в системах автоматического раскроя ткани [13]. В работе рассматривается проблема построения сети эквидистант для обследования прибрежной акватории при проектировании морских терминалов, а также для высадки морского десанта на побережье.

Теория. Для гладких кривых теория эквидистант достаточно полно разработана и все можно выразить в аналитическом виде [3–5]. Если кривая L задана параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned}x &= \xi(t), \\y &= \eta(t), \\t &\in [\alpha, \beta],\end{aligned}\tag{1}$$

то уравнения эквидистант есть

$$\begin{aligned}x(t) &= \xi(t) \pm \frac{h\eta'(t)}{\sqrt{(\xi'(t))^2 + (\eta'(t))^2}}, \\y(t) &= \eta(t) \mp \frac{h\xi'(t)}{\sqrt{(\xi'(t))^2 + (\eta'(t))^2}}.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь h — параметр эквидистанты, определяющий её расстояние от базисной кривой. Меняя, будем получать различные эквидистанты по обе стороны от кривой.

Например, эквидистанты эллипса

$$\begin{aligned}x &= a \cos t, \\y &= b \sin t,\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}x(t) &= \left(a \pm \frac{hb}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right) \cos t, \\y(t) &= \left(b \pm \frac{ha}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right) \sin t.\end{aligned}\tag{4}$$

Параметрический способ построения эквидистант гладких кривых не является единственным. Можно определить их и алгебраическим уравнением. Если кривая задана уравнением

$$y = f(x), \quad (5)$$

где $f(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, то уравнения эквидистант есть:

$$D_z \left((z-x)^2 + (f(z)-y)^2 - h^2 \right) = 0, \quad (6)$$

где $D_z(\dots)$ — дискриминант многочлена, стоящего в скобках, рассматриваемый относительно переменной z , в то время как остальные переменные считаются параметрами [13]. Для того же эллипса, который имеет алгебраическое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (7)$$

эквидистанты имеют уравнение

$$D_z(z^3 - (a^2 + b^2 - x^2 - y^2 + h^2)z^2 + (-a^2b^2(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1) + h^2(a^2 + b^2))z - h^2a^2b^2) = 0, \quad (8)$$

где $D_z(\dots)$ — дискриминант кубического многочлена относительно z , записанного в скобках [13, 14]. Вычисление этого дискриминанта приводит к очень громоздкому выражению в виде многочлена восьмой степени относительно x и y . Таким образом, даже для такой простой гладкой кривой как эллипс уравнение эквидистант в алгебраической явной форме бесполезно для практического применения. Тем более это касается сложных негладких кривых на реальной местности.

В данной статье предложен и реализован алгоритм компьютерного построения эквидистант реальных негладких кривых на местности. В качестве примера дано решение проблемы компьютерного моделирования прибрежной полосы акватории морского побережья. Описывается построение массива точек для определения черты безопасной глубины для швартовки крупнотоннажных грузовых судов, для высадки десанта и др. практически важных применений.

Постановка задачи и её решение. Имеется некоторая исходная базисная кривая, представляющая реальную кривую на местности, например, береговую черту. Эквидистанта на расстоянии h от базисной кривой — это контур, состоящий из ребер, каждое из которых отстоит от соответствующего ему ребра исходного контура на заданное расстояние h (рис. 1). На ней по определенному алгоритму с заданным шагом строится дискретный набор точек.

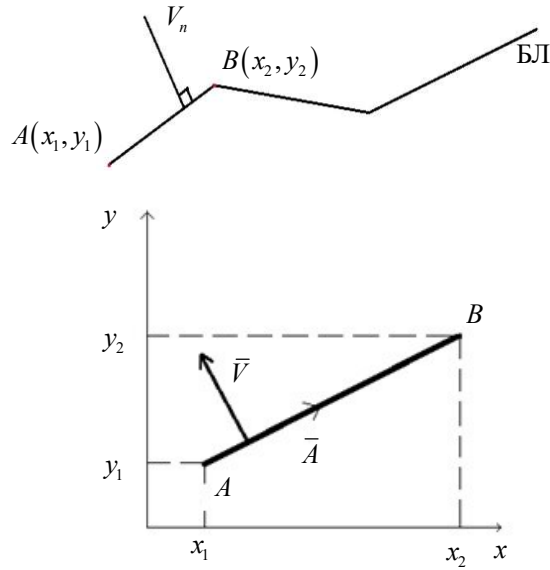


Рис. 1. Аппроксимация реальной кривой на местности линейным сплайном

По этим точкам нужно построить кусочно-линейную кривую (эквидистанту), равноудаленную от базисной кривой, с заданным расстоянием от неё, повторяя все изгибы базисной кривой и не допуская наложений и дефектов. Иными словами, нужно построить массив точек кусочно-линейной кривой (эквидистанты) по имеющемуся набору точек базисной кривой (например, береговой черты) с заданной точностью [17].

Математическая постановка задачи такова: пусть

$$B((x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)). \quad (9)$$

Это массив точек, описывающих базисную кривую. Задаем расстояние $h > 0$ от базисной кривой — параметр эквидистанты. В дальнейшем для рассматриваемого конкретного случая моделирования прибрежной полосы предполагается, что поверхность суши находится по правую сторону от береговой линии (базисной кривой), определяемой точками массива (9). Необходимо построить массив точек

$$E((x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_m, y_m)), \quad (10)$$

описывающих линию эквидистанты на заданном расстоянии h .

Рассмотрим произвольный отрезок базисной кривой, ограниченный точками $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ (рис. 1). Рассмотрим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_a, y_a)$. Его координаты определяются через координаты точек A и B следующим образом

$$\begin{aligned}x_a &= x_2 - x_1, \\ y_a &= y_2 - y_1.\end{aligned}\tag{11}$$

Определим вектор $\vec{n} = (x_n, y_n)$, перпендикулярный вектору \vec{a} . Координаты x_n, y_n нормального вектора \vec{n} найдем из условия перпендикулярности векторов \vec{a} и \vec{n} , которое состоит в равенстве нулю их скалярного произведения:

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{a} &= 0, \\ x_n x_a + y_n y_a &= 0.\end{aligned}\tag{12}$$

Условие (4) является необходимым, но не достаточным условием перпендикулярности векторов \vec{a} и \vec{n} . Это означает, что из уравнения (12) нельзя однозначно определить координаты нормального вектора \vec{n} . Уравнение (12) имеет бесконечно много решений относительно неизвестных x_n, y_n , т.е. существует бесконечно много векторов с координатами x_n, y_n . Не все из них перпендикулярны вектору \vec{a} . Именно в этом проявляется не достаточность условия (12). Поэтому немного сузим задачу. Будем искать нормальный вектор \vec{n} как единичный. Это добавляет еще одно условие к уравнению (4):

$$x_n^2 + y_n^2 = 1.\tag{13}$$

В результате для нахождения координат нормального вектора \vec{n} получаем систему

$$\begin{cases} x_n x_a + y_n y_a = 0 \\ x_n^2 + y_n^2 = 1. \end{cases}\tag{14}$$

Решая её, получаем

$$\begin{aligned}x_n &= \pm \frac{y_a}{a}, \\ y_n &= \pm \frac{x_a}{a}.\end{aligned}\tag{15}$$

Здесь четыре различных варианта в зависимости от выбора знаков. Прямая проверка показывает, что только два из них определяют решения системы (14). Получаем два нормальных вектора:

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= \left(\frac{y_a}{a}, -\frac{x_a}{a} \right), \\ \vec{n}_2 &= \left(-\frac{y_a}{a}, \frac{x_a}{a} \right).\end{aligned}\tag{16}$$

В формулах (15) и (16) через a обозначена длина вектора \vec{a} , равная

$$a = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}. \quad (17)$$

Векторы в формуле (16) — это два единичных вектора, перпендикулярных к вектору \vec{a} . Они имеют противоположные направления. Один из них назовем внешней нормалью, другой внутренней нормалью к базисной кривой. Пусть первый вектор — внешняя нормаль. Именно его и будем дальше иметь в виду. Из выбранных на базисной кривой точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в направлении внешней нормали определим точки $A^\Gamma(x_{\Gamma 1}, y_{\Gamma 1})$ и $B^\Gamma(x_{\Gamma 2}, y_{\Gamma 2})$, находящиеся на расстоянии h от точек A и B . Отрезок A_Γ, B_Γ — это отрезок кусочно-линейной эквидистанты с параметром h . Координаты точек $A^\Gamma(x_{\Gamma 1}, y_{\Gamma 1})$ и $B^\Gamma(x_{\Gamma 2}, y_{\Gamma 2})$ равны

$$\begin{aligned} x_{\Gamma 1} &= x_1 + h \cdot x_n, \\ y_{\Gamma 1} &= y_1 + h \cdot y_n, \\ x_{\Gamma 2} &= x_2 + h \cdot x_n, \\ y_{\Gamma 2} &= y_2 + h \cdot y_n. \end{aligned} \quad (18)$$

Такую же процедуру сделаем со всеми остальными точками из массива (1) на базисной кривой. Далее, в зависимости от угла между отрезками базисной кривой, возможны две ситуации (рис. 2 и 3), нуждающиеся в пояснении.

Угол больше 180 градусов (рис. 2) — необходимо достроить недостающий участок.

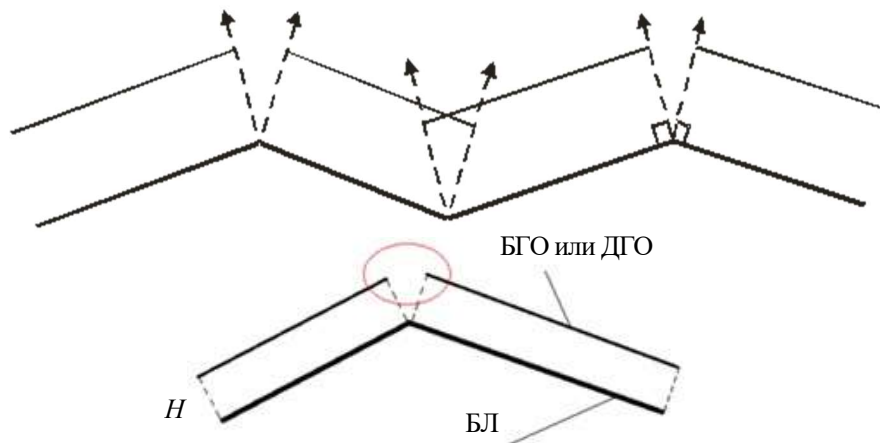


Рис. 2. Варианты построения участка эквидистанты

Предполагается два пути решения. Первый: передавать в массиве три параметра (вместо двух для построения отрезка) для построения дуги, два параметра — начало и конец дуги, третий — центр. Второй вариант: с необходимой точностью произвести приближенное построение дуги отрезками, тогда в результирующий массив достаточно будет передать параметры для построения отрезка, что избавит от наличия особых конструкций для построения дуги по трем точкам.

Угол меньше 180 градусов (рис. 3) — необходимо отбросить точки A , B и заменить их на точку C .

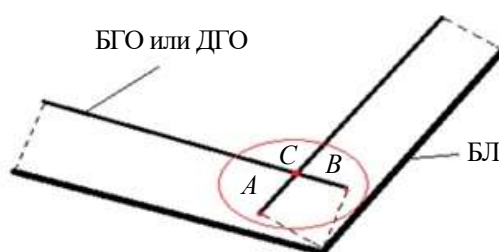


Рис. 3. Варианты построения участка эквидистанты

Для этого необходимо найти пересечение отрезков эквидистанты и в результирующем массиве точек эквидистанты заменить точки конца первого и начала второго пересекающихся отрезков на точку пересечения этих отрезков. Для этого, на каждой итерации нахождения точек отрезка эквидистанты необходимо провести поиск точки пересечения вновь полученного отрезка с каждым отрезком (по убыванию — от последнего, добавленного в массив, до первого), найденным на предыдущих итерациях следующим образом: Построим каждый отрезок до прямой (найдем их функциональную зависимость) и найдем точку пересечения этих функций, решив СЛАУ двух уравнений. Проверим точку пересечения на принадлежность проверяемым отрезкам одновременно. При положительном ответе (точка принадлежит обоим отрезкам) — точка пересечения найдена; при отрицательном — повторяем проверку дольше, пока не найдем искомую точку. Это позволит избежать ситуации, когда очередной отрезок эквидистанты полностью исключает один или несколько из отрезков, построенных на предыдущих итерациях (рис. 4).

В результате получим кусочно-линейную кривую — эквидистанту, находящуюся на расстоянии h от исходной базисной кривой. Варьируя параметр h , получим семейство эквидистант.

Алгоритм реализован в виде компьютерной программы. Код программы приведен в Приложении. На рис. 5 приведен пример сети построенных эквидистант для реальной береговой полосы.

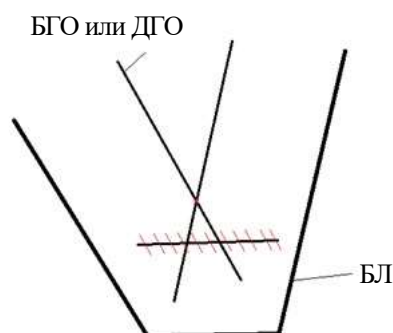


Рис. 4. БГО — ближняя граница обнаружения; ДГО — дальняя граница обнаружения; БЛ — береговая линия

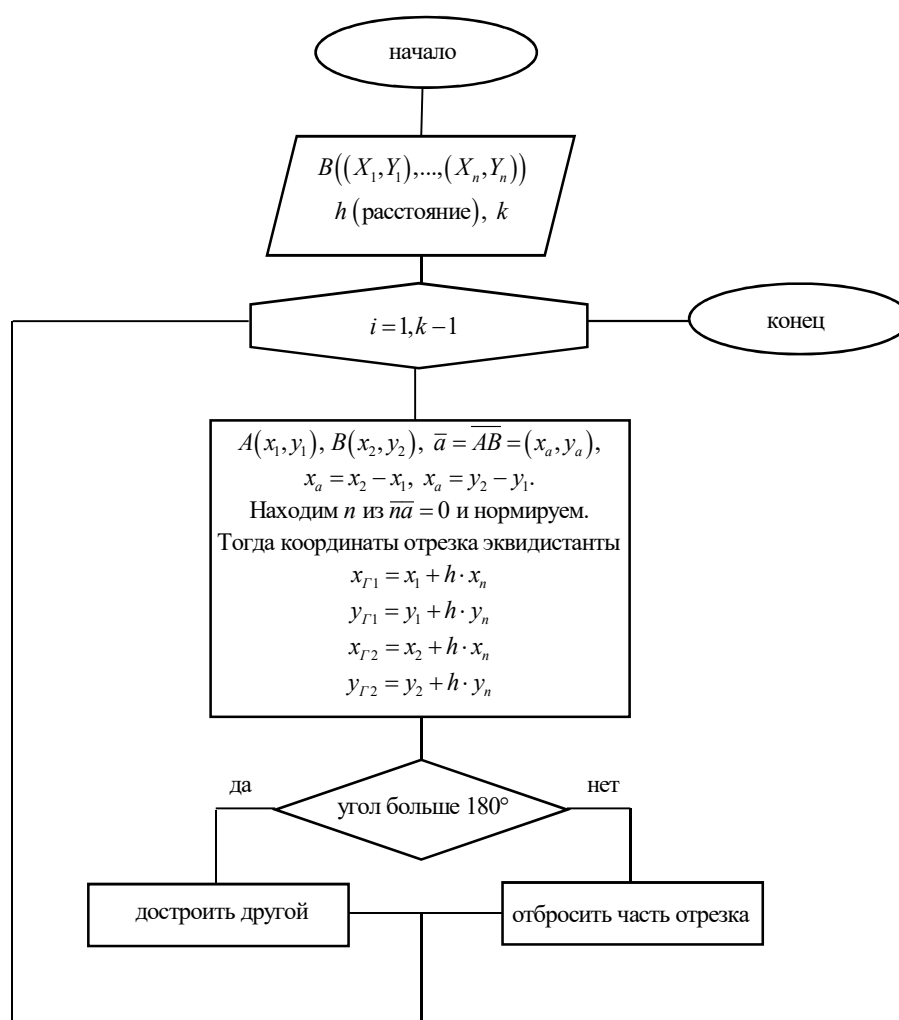


Рис. 5. Блок-схема алгоритма построения эквидистант

Алгоритм реализован в виде компьютерной программы. На рис. 6 приведен пример сети построенных эквидистант для реальной береговой полосы.

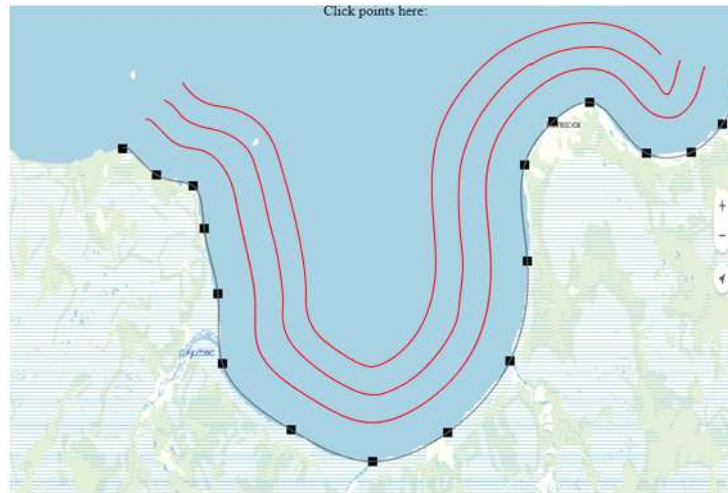


Рис. 6. Пример построения сети эквидистант

Предложенный алгоритм не учитывает некоторые важные факторы, наиболее весомым из которых является то, что возможная черта швартовки судов или черта высадки десанта не всегда находится на одинаковом расстоянии в разных частях береговой линии. Для решения этой проблемы можно использовать распознавание глубины водного слоя вдоль береговой черты по аэрофотоснимку методами компьютерного зрения. Этому будет посвящена следующая статья.

Выводы. Предложен компьютерный алгоритм построения эквидистант — сложных негладких кривых на местности. Алгоритм реализован в виде компьютерной программы. Программа протестирована на примере кривой реальной береговой полосы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы и приложения*. Москва, Наука, 1986, 750 с.
- [2] Артоболевский И.И. *Теория механизмов и машин*. Москва, Наука, 1988, 636 с.
- [3] Gray A. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. London, CRC Press, 1997, 1056.
- [4] Lawrence J.D. *A catalog of Special Plane Curves*. New York, Dover, 1972, 218 p.
- [5] Yates R.C. *A Handbook on Curves and their Properties*. USA, Literary Licensing, 2012, 256 p.
- [6] Козакевич М.И., Любин А.Е. *Проектирование металлических конструкций промышленных трубопроводов*. 2-изд. перераб. и дополн. Киев, Будивэльник, 1989, 169 с.

- [7] Козловский Е.А. *Горная энциклопедия. Т.4. Ортин – Социосфера*. Москва, Советская энциклопедия, 1989, 623 с.
- [8] Кузнецов А.Л., Кириченко А.В., Погодин В.А., Щербакова-Слюсаренко В.Н. Роль имитационного моделирования в технологическом проектировании и оценке параметров грузовых терминалов. *Вестник Астраханского государственного технического университета. Сер. Морская техника и технология*, 2017, № 2, с. 93–100.
- [9] Широкова Е.А., Тюленева О.Н. Курс лекций по математике для направления 020700 – геология: учебное пособие. Казань, Казанский университет, 2012, 168 с.
- [10] Шибаев О.В., Гневашев А.А. *Разработка управляющей программы для обработки деталей на токарных станках с ЧПУ*. Москва, МГТУ МАМИ, 2001, 110 с.
- [11] Валуев А.М., Миннахметов К.М. Вычисления в рациональных числах при решении типичных задач вычислительной геометрии в системах автоматизированного проектирования. *Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал)*, 2011, № 12, с. 133–138.
- [12] Мясоедова Т.М., Панчук К.Л. Геометрическая модель генерации семейства контурно-параллельных траекторий (эквидистант) обрабатывающего инструмента. *Динамика систем, механизмов и машин*, 2018, т. 6, № 2, с. 262–269 с.
- [13] Курош А.Г. *Курс высшей алгебры*. Москва, Наука, 1965, 430 с.
- [14] Самигуллина А.Р. Математическое моделирование объектов линейной алгебры и аналитической геометрии в системе Maple. *Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета*, 2010, № 3 (21), с. 107–114.
- [15] Доля П.Г. Моделирование кусочно-гладких непрерывных функций и кривых. *Вестник Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина, Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления*, 2005, № 661 (4), с. 97–103.
- [16] Руководство пользователя T-FLEX CAD. Трёхмерное моделирование [Электронный ресурс]: URL: <https://tflexcad.ru/download/documentation/>
- [17] Разумовский А.И. Создание алгоритма эквидистанты с применением методов контекстной среды. Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM – 2009), 2009, с. 208–212.

Статья поступила в редакцию 18.03.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Валишин А.А., Туманов И.А., Ахунд-заде М.Р. Компьютерное построение сети эквидистант сложных негладких кривых на местности. *Математическое моделирование и численные методы*. 2020. № 2. с. 95–106.

Валишин Анатолий Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. e-mail: enf@mail.ru

Туманов Иван Александрович — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Ахунд-заде Микаил Рашидович — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Computer construction of an equidistant network of complex non-smooth curves on the terrain

© A.A. Valishin, I.A. Tumanov, M.R. Akhund-zade

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The equidistant of a curve is the set of points equidistant from this curve, i.e. the set of ends of equal segments, laid in a certain direction on the normals to the curve]. An equidistant is created on the basis of already existing basic curves (splines, functions), its appearance is determined by the type of curve and the amount of displacement. The problem of constructing equidistant lines is fundamental in various fields of technology: when creating programs for machine tools with numerical program control (CNC), in designing traces of printed circuit boards, when designing pipelines. In this case, only the axial line is drawn, and then the equidistant lines of the pipe contours are built. Equidistants are widely used in geology, in the development of construction and architectural drawings. In mechanical engineering, equidistants are used in the design of cam mechanisms. In the theory of computer-aided design (CAD) systems, it is customary to call the equidistant line a line that is equal to the radius of the cutting tool from the workpiece contour. In metalworking, the equidistant describes the trajectory of the center of the cutter relative to the contour of the machined surface, in automatic fabric cutting systems. The paper considers the problem of constructing a network of equidistant surveys of coastal waters during the design of marine terminals, as well as for landing amphibious assaults on the coast. A computer algorithm is proposed for constructing equidistant complex irregular curves on the ground. The algorithm is implemented as a computer program. The program is tested on an example of a curve of a real coastal strip.

Keywords: *equidistant, not smooth curves on the ground*

REFERENCES

- [1] Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaya geometriya. Metodi i prilozheniya* [Modern geometry. Methods and applications.] Moscow, Nauka Publ., 1986, 750 p.
- [2] Artobolevsky I. I. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 636 p.
- [3] Gray A. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. London, CRC Press, 1997, 1056.
- [4] Lawrence J.D. *A catalog of Special Plane Curves*. New York, Dover, 1972, 218 p.
- [5] Yates R.C. *A Handbook on Curves and their Properties*. USA, Literary Licensing, 2012, 256 p.
- [6] Kazakevich M. I., Lyubin A. E. *Proektirovaniye metallicheskih konstruktsiy promyshlennih tryboprovodov* [Design of metal structures of industrial pipelines. 2nd ed. rev. and more]. Kiev, Budivelnik Publ., 1989, 169 p.
- [7] Kozlovsky E.A. *Gornaya enciklopediya. T.4. Ortin – Sotsiosfera* [Mountain encyclopedia. Vol. 4. Ortin – Sociosphere]. Moscow, Soviet Encyclopedia Publ., 1989, 623 p.
- [8] Kuznetsov A.L., Kirichenko A.V., Pogodin V.A., Shcherbakova-Slyusarenko V.N. Importance of simulation modelling for technological design and evaluating parameters of cargo terminals. *Vestnik of Astrakhan State Technical University*, 2017, №2, c. 93–100.

- [9] Shirokova E.A., Tyuleneva O.N. *Kurs lekcij po matematike dlya napravleniya 020700 – geologiya: uchebnoe posobie* [Course of lectures on mathematics for the direction 020700 – geology: textbook]. Kazan, Kazan University Publ., 2012, 168 p.
- [10] Shibaev O.V., Gnevasheva A.A. *Razrabotka upravlyayushchej programmy dlya ob-rabotki detalej na tokarnyh stankah s CHPU* [Development of a control program for processing parts on CNC lathes]. Moscow, MSTU MAMI Publ., 2001, 110 p.
- [11] Valuev A.M., Minnakhmetov K. M. Vychisleniya v racional'nyh chislah pri reshenii tipichnyh zadach vychislitel'noj geometrii v sistemah avtoma-tizirovannogo proektirovaniya [Computations in rational numbers in solving typical problems of computational geometry in automated design systems]. *Gornyj informacionno-analiticheskij byulleten' (nauchno-tekhnicheskij zhurnal) [Mining Information and Analytical Bulletin (Scientific and Technical Journal)]*, 2011, no. 12, pp. 133–138.
- [12] Myasoedova T.M., Panchuk K.L. Geometric model of generation of the family of the contour-parallel trajectories (equidistant family) of the machine tool. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*, 2018, vol. 6, no. 2, pp. 262–269.
- [13] Kurosh A.G. *Kurs vysshej algebry* [Course of higher algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 430 p.
- [14] Samigullina A.R. The mathematical modelling of objects of linear algebra and analytic geometry in the computer mathematical system Maple. *Vestnik Tatarskogo gosudarstvennogo gumanitarno-pedagogicheskogo universiteta*, 2010, no. 3 (21), pp. 107–114.
- [15] Dolya P.G. Modeling of piecewise smooth continuous functions and curves. *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems*, 2005, no. 661 (4), pp. 97–103.
- [16] T-FLEX CAD User Manual. Three-dimensional modeling [Electronic resource]: URL: <https://tflexcad.ru/download/documentation/>
- [17] Razumovskij A.I. Sozdanie algoritma ekvidistanty s primeneniem me-todov kontekstnoj sredy [Creating an equidistant algorithm using contextual environment methods]. *Sistemy proektirovaniya, tekhnologicheskoy podgotovki proizvodstva i upravleniya etapami zhiznennogo cikla promyshlennogo produkta (CAD/CAM/PDM – 2009) [Systems of design, technological preparation of production and management of stages of the life cycle of an industrial product (CAD/CAM/PDM – 2009)]*, 2009, pp. 208–212.

Valishin A.A., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: enf@mail.ru

Tumanov I.A., Student of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University.

Akhun-zade M.R., Student of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University.