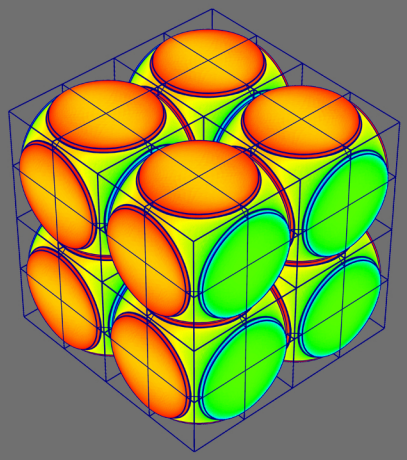
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Дуйшеналиев Т.Б., Меркурьев И.В., Дуйшембиев А.С.
Математическая модель для оценки конечных деформаций резиноподобных материалов. Математическое моделирование и численные методы, 2020, № 2, с. 3–25

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/219/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.130
18.11.2026 05:24:40

УДК 539.378:678.0 DOI: 10.18698/2309-3684-2020-2-325

Математическая модель для оценки конечных деформаций резиноподобных материалов

© Т.Б. Дуйшеналиев[1], И.В. Меркурьев[1], А.С. Дуйшембиев[2]

[1]НИУ «МЭИ», Москва, 111250, Россия
[2]КГТУ им. И.Раззакова, Бишкек, 720044, Кыргызстан

В статье рассматриваются конечные (геометрически нелинейные) упругие деформации резиноподобных материалов и конструкций. Такие деформации описываются математической моделью, разработанной на основе неклассического подхода к решению краевых задач статики. Приводятся формулы по определению конечных деформаций упругих резиноподобных тел на основе элементов пространственного и материального градиентов перемещений. Дается сравнение определений по этим двум подходам. Подтверждается правомочность приведенных выводов на примере одномерного, двумерного и трехмерного преобразований в системе MathCad. Рассмотрен пример определения элементов пространственного градиента перемещения. Известно, что статическая краевая задача имеет две постановки. Первая выдвигается при ее формулировании и используется для вывода фундаментальных соотношений механики деформируемого тела (теорема Бетти, общее решение в виде формул Сомильяны и др.). Вторая используется при решении таких задач. Считается, что задачи обеих постановок имеют одно и то же решение. Предлагается неклассическое решение краевой задачи статики. Оно строго соответствует общепризнанной постановке. Приведен способ Чезаро представления поля перемещений с помощью компонент деформаций. Далее этот способ получает развитие, становится возможным выразить поле перемещений и через компоненты напряжений. Решена задача о равновесии прямоугольной пластины из резиноподобного материала. Полученные выражения определяют компоненты деформаций, напряжений и перемещений в любой точке пластины. Во всех этих выражениях присутствуют только координаты конечной области упругого тела. Здесь нет обычного координатного разночтения: в перемещениях и напряжениях одни и те же координаты. Данная задача представлена и уравнениями Навье. Доказывается единственность ее решения.

Ключевые слова: *резиноподобные материалы, пластина, конечные деформации, напряжения, перемещения, градиент перемещения, пространственные и материальные координаты, краевая задача*

Введение. Элементы конструкций из резины и резиноподобных материалов широко используются в машиностроении, судостроении, в авиационной промышленности, строительстве.

Резиновые детали могут допускать значительные относительные деформации с полным восстановлением геометрической формы и размеров, если нагрузка статическая или имеет медленно изменяющийся характер.

Исследования закономерностей деформирования таких элементов важны как с точки зрения создания основ расчета, так и в плане практических приложений, связанных с деформационными расчётами.

Аналитические решения для такого рода задач возможны только для отдельных и достаточно простых расчетных схем.

Несмотря на то, что компьютерные технологии и вычислительные программные комплексы обеспечивают широкое распространение численных методов в инженерных расчетах, роль и значение аналитических методов не снижается. Они могут выступать в качестве эталонных решений при тестировании надежности вычислительных комплексов и пакетов прикладных программ.

Два способа математического описания преобразования. В любом преобразовании рассматриваются два состояния тела:

- состояние тела до преобразования,
- состояние тела после преобразования.

Координаты точек тела до преобразования, следуя тому, как принято в механике деформируемого тела, обозначим через X_1, X_2, X_3 (координаты Лагранжа). А координаты точек тела после преобразования — x_1, x_2, x_3.

Есть два вида описания преобразования [5,6,7]:

В первом виде используются пространственные координаты:

$$X_i = X_i\left(x_1, x_2, x_3\right),\ i = 1,2,3. \tag{1}$$

В развернутой записи приведенные описания можно представить в виде вектора, соединяющего точки x, X на рис. 1:

$$X_1 = X_1\left(x_1, x_2, x_3\right)$$
$$X_2 = X_2\left(x_1, x_2, x_3\right)$$
$$X_3 = X_3\left(x_1, x_2, x_3\right).$$

А во втором — материальные координаты:

$$x_i = X_i\left(x_1, x_2, x_3\right),\ i = 1,2,3. \tag{2}$$

В развернутой записи:

$$x_i = x_i\left(x_1, x_2, x_3\right)$$
$$x_i = x_i\left(x_1, x_2, x_3\right)$$
$$x_i = x_i\left(x_1, x_2, x_3\right).$$

Приведенные описания можно представить в виде вектора, соединяющего точки x, X на рис. 1:

$$u = x - X\ . \tag{3}$$

Этот вектор можно описать в пространственных координатах:

$$u\left(x_1, x_2, x_3\right) = x - X\left(x_1, x_2, x_3\right), \tag{4}$$

а также в материальных координатах:

$$u\left(X_1, X_2, X_3\right) = x\left(X_1, X_2, X_3\right) - X. \tag{5}$$

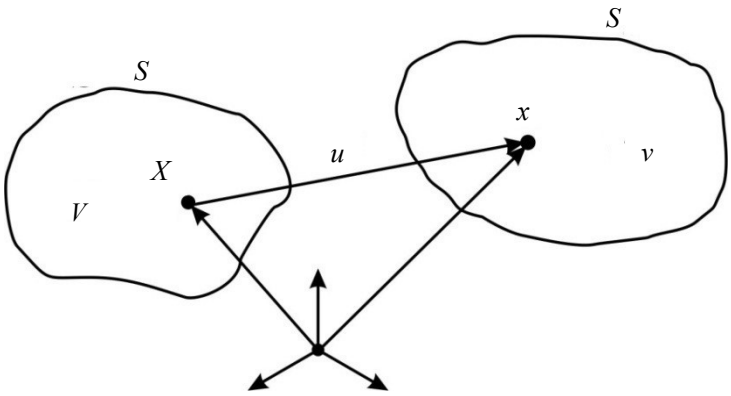


Рис. 1. Преобразование векторами u_i области V в область v

Способ определения деформации в координатах конечного состояния. Здесь функции перемещения выражаются в координатах конечного состоянии:

$$u_i = u_i\left(x_1, x_2, x_3\right). \tag{6}$$

Дифференциал функции перемещения:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \tag{7}$$

в механике деформируемого тела называется вектором относительного перемещения. Тензор e_{ij}, определяемый как

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

называется пространственным градиентом перемещения.

Дифференциал (7) представим в виде:

$$du_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dx_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dx_j. \tag{8}$$

Введем обозначения:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \tag{9}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \tag{10}$$

где ε_{ij}, ω_{ij} — соответственно тензор Коши и тензор вращения. Теперь напишем дифференциал в элементах этих тензоров:

$$du_i = \left(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \right) dx_j. \tag{11}$$

Введем единичный вектор:

$$n_i = \frac{dx_i}{|dx|}. \tag{12}$$

Вектор относительного перемещения, отнесенный к длине вектора dx_i:

$$\frac{dx_i}{|dx|} = \left(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \right) \frac{dx_j}{|dx|} = \left(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \right) n_j. \tag{13}$$

Проекцию вектора (13) на направление единичного вектора n_i обозначим α. Таким образом, величина α является относительной деформацией удлинения в направлении вектора dx_i:

$$\alpha = \frac{dx_i}{|dx|} n_i = \varepsilon_{ij} n_i n_j. \tag{14}$$

Здесь учтено, что $\omega_{ij} n_i n_j = 0$.

Вектор относительного перемещения, отнесенный к длине вектора dx_i, теперь можно представить в виде суммы трех слагаемых:

$$\frac{dx_i}{|dx|} = \alpha n_i + \left(\varepsilon_{ij} - \alpha \delta_{ij} \right) n_j + \omega_{ij} n_j. \tag{15}$$

Модуль вектора αn_i, равный α, как уже сказано выше, выражает собой величину относительного удлинения в направлении вектора dx_i.

Модуль вектора $\left(\varepsilon_{ij} - \alpha \delta_{ij} \right) n_j$ характеризует величину относительного сдвига плоскостей, нормальных к вектору n_i, и проходящих через точки x_i и $x_i + dx_i$. Пусть γ модуль вектора $\left(\varepsilon_{ij} - \alpha \delta_{ij} \right) n_j$:

$$\gamma = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}n_j n_k - \alpha^2}. \tag{16}$$

Модуль вектора $\omega_{ij}n_j$ обозначим ϕ:

$$\varphi = \sqrt{\omega_{ij}\omega_{ik}n_j n_k}. \tag{17}$$

Способ определения деформации в координатах начального состояния. Здесь функции перемещения выражаются в координатах начального состояния:

$$u_i = x_i\left(X_1, X_2, X_3\right). \tag{18}$$

Дифференциал функции перемещения

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}dX_j \tag{19}$$

в механике деформируемого тела называется вектором относительного перемещения.

Тензор E_{ij}, определяемый как

$$E_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j},$$

называется материальным градиентом перемещения. Дифференциал (19) представим в виде:

$$du_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)dX_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)dX_j. \tag{20}$$

Введем обозначения:

$$G_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right), \tag{21}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{22}$$

где G_{ij}, Ω_{ij} — соответственно называются тензором Грина и тензором вращения.

Теперь напишем дифференциал в элементах этих тензоров:

$$du_i = \left(G_{ij} + \Omega_{ij}\right)dX_j. \tag{23}$$

Введем единичный вектор:

$$N_i = \frac{dX_i}{|dX|}. \tag{24}$$

Вектор относительного перемещения, отнесенный к длине вектора dX_i:

$$\frac{dX_i}{|dX|} = \left(G_{ij} + \Omega_{ij}\right)\frac{dX_j}{|dX|} = \left(G_{ij} + \Omega_{ij}\right)N_j. \tag{25}$$

Проекцию вектора (25) на направление единичного вектора N_i обозначим как α'. Таким образом, величина α' является относительной деформацией удлинения в направлении вектора dX_i:

$$\alpha' = \frac{dX_i}{|dX|}N_i = G_{ij}N_iN_j. \tag{26}$$

Здесь учтено, что $\Omega_{ij}N_iN_j = 0$.

Вектор относительного перемещения, отнесенный к длине вектора dX_i, теперь можно представить в виде суммы трех слагаемых

$$\frac{du_i}{|dX|} = \alpha'N_i + \left(G_{ij} - \alpha'\delta_{ij}\right)N_j + \Omega_{ij}N_j: \tag{27}$$

Модуль вектора $\alpha' N_i$, равный α', как уже было сказано, выражает собой величину относительного удлинения в направлении вектора dX_i.

Модуль вектора $\left(G_{ij} - \alpha'\delta_{ij}\right)N_j$ характеризует величину относительного сдвига плоскостей, нормальных к вектору N_i, и проходящих через точки X_i и $X_i + dX_i$. Пусть γ' модуль вектора $\left(G_{ij} - \alpha'\delta_{ij}\right)N_j$:

$$\gamma' = \sqrt{G_{ij}G_{ik}N_jN_k - \alpha'^2}. \tag{28}$$

Модуль вектора $\Omega_{ij}N_j$ обозначим φ':

$$\varphi' = \sqrt{\Omega_{ij}\Omega_{ik}N_jN_k}. \tag{29}$$

Сводка формул по определению деформации на основе элементов пространственного и материального градиентов перемещения. Определение характеристик деформированного состояния по элементам пространственного градиента перемещения:

$$e=\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix},\ n=\frac{dx}{|dx|},$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e_{11}+e_{11} & e_{12}+e_{21} & e_{13}+e_{31} \\ e_{21}+e_{12} & e_{22}+e_{22} & e_{23}+e_{32} \\ e_{31}+e_{13} & e_{32}+e_{23} & e_{33}+e_{33} \end{pmatrix},$$

$$\omega=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e_{11}-e_{11} & e_{12}-e_{21} & e_{13}-e_{31} \\ e_{21}-e_{12} & e_{22}-e_{22} & e_{23}-e_{32} \\ e_{31}-e_{13} & e_{32}-e_{23} & e_{33}-e_{33} \end{pmatrix},$$

$$\alpha=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}n_in_j \quad \gamma=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}n_jn_k-\alpha^2}\ ,$$

$$\varphi=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\omega_{ij}\omega_{ik}n_jn_k}\,. \qquad (30)$$

Определение характеристик деформированного состояния по элементам материального градиента перемещения:

$$E=\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix},\ N=\frac{dX}{|dX|},$$

$$G=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_{11}+E_{11} & E_{12}+E_{21} & E_{13}+E_{31} \\ E_{21}+E_{12} & E_{22}+E_{22} & E_{23}+E_{32} \\ E_{31}+E_{13} & E_{32}+E_{23} & E_{33}+E_{33} \end{pmatrix},$$

$$\Omega=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_{11}-E_{11} & E_{12}-E_{21} & E_{13}-E_{31} \\ E_{21}-E_{12} & E_{22}-E_{22} & E_{23}-E_{32} \\ E_{31}-E_{13} & E_{32}-E_{23} & E_{33}-E_{33} \end{pmatrix},$$

$$\alpha' = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} G_{ij} N_i N_j, \quad \gamma' = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} G_{ij} G_{ik} N_j N_k - \alpha'^2},$$

$$\varphi' = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \Omega_{ij} \Omega_{ik} N_j N_k}. \tag{31}$$

Сравнение способов определения деформаций по элементам пространственного и материального градиентов перемещения. Выше изложены существующие два способа определения деформаций (30) и (31). Рассмотрим к каким результатам они приводят — совпадают ли они друг с другом или различаются. Для изучения этой проблемы составлены программы в системе MathCad, которые сопровождаются графикой в системе Matlab.

Рассмотрим преобразование на рис.1:

$$X_i = x_i - u_i. \tag{32}$$

Функции перемещения u_i заданы или в виде $u_i\left(x_1, x_2, x_3\right)$, или в виде $u_i(X_1, X_2, X_3)$. Пусть эти функции и их производные до второго порядка непрерывны. В таком случае, преобразование (32) является однозначным. Это преобразование устанавливает однозначное соответствие между точками области v, описываемой координатами x_i, и точками области V, описываемой координатами X_i.

Приведенные выше определения деформации в механике деформируемого тела рассматриваются как идентичные. Но вычисления, вместо ожидаемых от этой идентичности равенств:

$$\alpha = \alpha', \quad \gamma = \gamma', \quad \varphi = \varphi', \tag{33}$$

всегда приводят к неравенствам:

$$\alpha \neq \alpha', \quad \gamma \neq \gamma', \quad \varphi \neq \varphi'. \tag{34}$$

Это вынудило считать, что эти меры деформации корректны только в области малых величин, как самих перемещений, так и элементов их градиентов, когда определения дают приблизительные равенства:

$$\alpha \approx \alpha', \quad \gamma \approx \gamma', \quad \varphi \approx \varphi'. \tag{35}$$

Однако эти определения должны приводить не к одним и тем же величинам, а, наоборот, к различным. В обоих подходах речь идет об одном и том же. А именно, о деформациях, которые созданы перемещениями u_i. Эти деформации следуют определять только в области v,

ибо перемещения u_i создадут деформации, надо полагать, лишь тогда, когда они переместят тело из области V в область v. Это простое и ясное толкование преобразования (32). Изучение деформаций уравнениями (30) находится в строгом соответствии с таким положением вещей. В этих уравнениях определения проводятся в точках области v.

Состояние же пространства в области V, ни в какой мере не связано ни с перемещениями x_i, ни с его частными производными. Ничто в этом состоянии не изменится от того, произойдут эти перемещения или не произойдут. В связи с этим, определения (31) не описывают состояние пространства в области V. Эти определения не описывают состояние пространства и в области v, так как они вычисляются в точках области V. Отсюда следует вывод:

Деформации от перемещений u_i в преобразовании (32) возникают в области v, определяемой координатами x_i. Эти деформации должны определяться уравнениями (30) в точках области v. В этом свете, уравнения статической краевой задачи должны составляться в координатах x_i области v:

$$\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i}+f_i=0,\quad x_i\in v. \tag{36}$$

Определяемые решением этого уравнения перемещения u_i это те перемещения, которые образовали область v, и создали в ней деформации и напряжения.

Определение деформаций уравнениями (31) некорректно, некорректно и составление уравнений статической краевой задачи в координатах X_i области V в виде:

$$\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial X_j \partial X_j}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_j}{\partial X_j \partial X_i}+f_i=0,\quad X_i\in V. \tag{37}$$

Подтвердим правильность вышеприведенных выводов на примере одномерного, двумерного и трехмерного преобразований в системе MathCad.

Одномерное преобразование. Рассмотрим одномерное преобразование (рис. 2)

$$x-X=u,$$

в координатах конечного x и начального состояния s.

Одномерное преобразование в координатах конечного состояния:

$$X = (x-1)^2,$$
$$u = 3x - x^2 - 1,$$
$$\frac{du}{dx} = 3 - 2x,$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dX}\frac{dX}{dx}.$$

Одномерное преобразование в координатах начального состояния:

$$x = 1 + \sqrt{X},$$
$$u = 1 - X + \sqrt{X},$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{X}} - 1,$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dX}\frac{dX}{dx}.$$

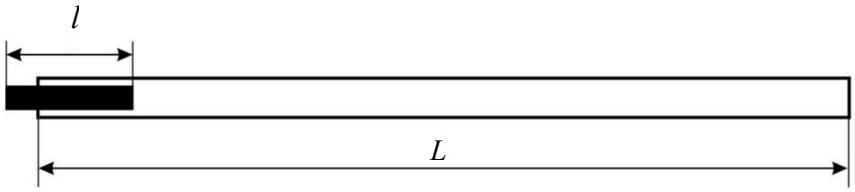


Рис. 2. Одномерное преобразование

Линия $l(2 \le x \le 7)$ конечное состояние, а линия $L(1 \le x \le 36)$ начальное состояние. Вектором перемещения точки линии L переносятся в точки линии l.

Разобьем конечное состояние l равномерно на 10 элементарных отрезков и вычислим деформации на их начальных и конечных точках в координатах конечного состояния:

$\frac{du}{dx}$	–1	–2	–3	–4	–5
$\frac{du}{dX}$	–0,500	–0,667	–0,750	–0,800	–0,833
$\frac{du}{dx}$	–6	–7	–8	–9	–10	–11
$\frac{du}{dX}$	–0,857	–0,875	–0,889	–0,900	–0,909	–0,917

Вычисление деформаций с учетом перемены координат:

$\frac{du}{dx}$	–1	–2	–3	–4	–5	–6	–7	–8	–9	–10	–11

Двумерное преобразование. Рассмотрим двумерное преобразование (рис. 3):

$$x - X = u,$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} \dfrac{X_2}{\sqrt{-2X_1 + 2\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{-2X_1 + 2\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} -x_1^2 + x_2^2 + x_1 \\ x_2 - 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} \dfrac{X_2}{\sqrt{-2X_1 + 2\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}} - X_1 \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{-2X_1 + 2\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} - X_2 \end{pmatrix}.$$

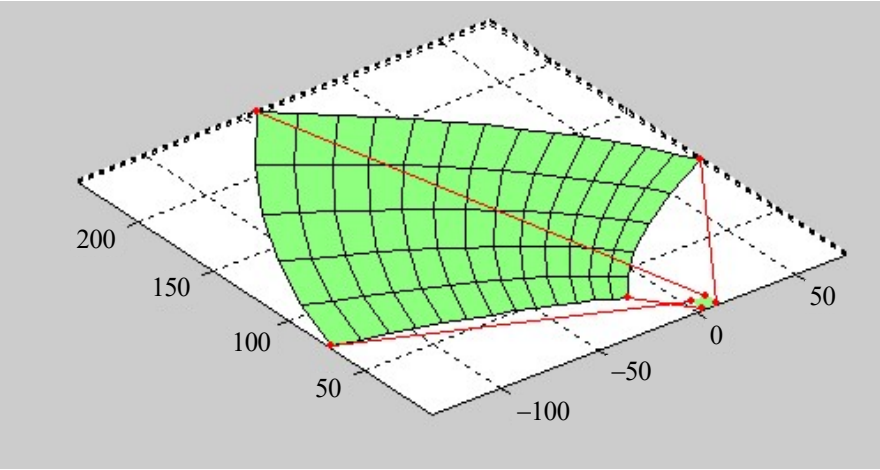


Рис. 3. Двумерное преобразование

Определение деформации удлинения по уравнениям (30):

$$dx = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,2 \end{pmatrix}, \; n = \frac{dx}{|dx|}$$

$$\alpha(3,5) = -5, \qquad \alpha(3,12) = -5, \qquad \alpha(10,5) = -19, \qquad \alpha(10,12) = -19.$$

Определение деформации удлинения по уравнениям (31):

$$X = x - u(x_1, x_2), \quad dX = (\delta - e(x_1, x_2))\,dx, \quad N = \frac{dX}{|dX|},$$

$$\alpha'(-16,30) = -0,956, \qquad \alpha'(75,100) = -0,960,$$

$$\alpha'(135,72) = -0,990, \qquad \alpha'(-44,240) = -0,980.$$

Трехмерное преобразование. Рассмотрим трёхмерное преобразование (рис. 4):

$$x - X = u$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 + 0,6x_1x_2^2 \\ x_2 + 0,4x_1x_3 \\ x_3 - 0,2x_1x_2 + 0,2x_3^2 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} -0,6x_1x_2^2 \\ -0,4x_1x_3 \\ 0,2x_1x_2 - 0,2x_3^2 \end{pmatrix}.$$

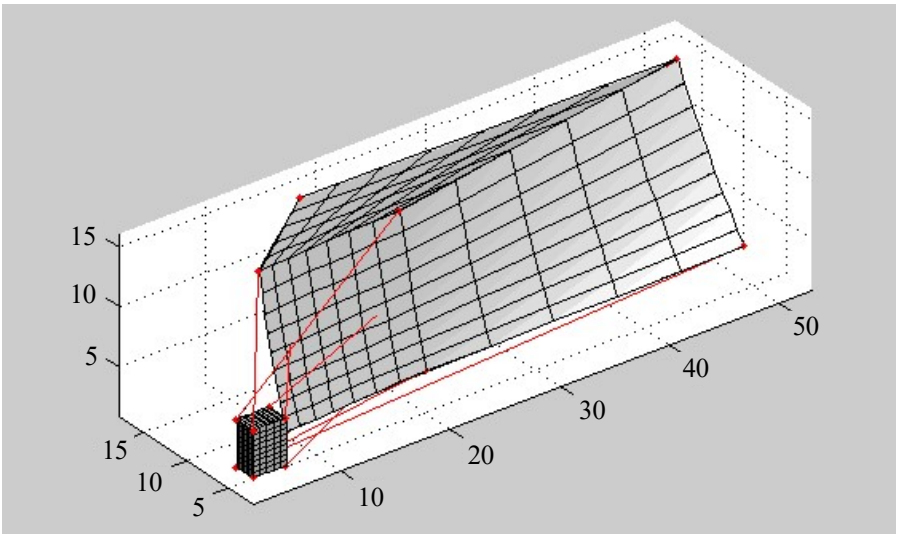


Рис. 4. Трёхмерное преобразование

По уравнениям (30):

$$\alpha(2;2;3) = -0,868, \quad \alpha(2;4;3) = -1,580, \quad \alpha(5;4;3) = -0,776,$$

$$\alpha(5;2;3) = -0,431, \quad \alpha(2;2;7) = -2,115, \quad \alpha(2;4;7) = -2,827,$$

$$\alpha(5;4;7) = -2,024, \quad \alpha(5;2;7) = -1,678.$$

По уравнениям (31):

$$\alpha'(6,8;4,4;4) = -0,644, \quad \alpha'(21,2;6,4;2) = -0,794,$$
$$\alpha'(53;10;0,8) = -0,803, \quad \alpha'(17,8;2,8;2,3) = -0,834,$$
$$\alpha'(6,8;7,6;16) = -0,787, \quad \alpha'(21,2;9,6;15,2) = -0,822,$$
$$\alpha'(53;18;12,8) = -0,845, \quad \alpha'(17,8;16;14,8) = -0,864.$$

Краевая задача статики. Многое из того, что создается человеком, рассчитывается в виде статической краевой задачи.

В зависимости от граничных условий различают первую, вторую и третью краевые задачи. При их решении прибегают к двум допущениям:

1. конечное состояние мало отличается от начального;

2. силы прикладываются настолько медленно, что любая их величина соответствует состоянию равновесия.

Эти допущения необходимы, ибо без них задача в классическом подходе математически неопределена и некорректна с точки зрения механики.

Однако, указанные допущения не входят в решаемые уравнения.

Предлагаемый подход. Статическая краевая задача, изображённая на рис. 5, решается в строгом соответствии с ее общепринятой постановкой.

Обстоятельство, что тело с заданными силами в объеме и на поверхности находится в равновесии, является исходным.

Областью определения уравнений равновесия, совместности деформаций и граничных условий служит конечное состояние равновесия.

Конечное состояние должно считаться заданным, а не искомым. Иначе невозможно указать положение сил, распределенных в объеме и на поверхности тела.

Используются пространственные (эйлеровы) координаты и линейный тензор деформаций Коши.

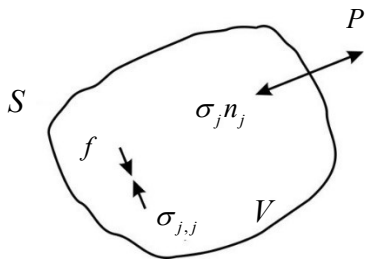


Рис. 5. Иллюстрация уравнений статической краевой задачи. В любой точке внутри V и на S внешние усилия уравновешены внутренними напряжениями, σ_j — вектор напряжения на площадке с нормалью x_j

Постановка краевой задачи. Тело с заданными силами внутри своего объема V и на его поверхности S находится в равновесии. Нужно найти напряжения и деформации внутри тела.

Объем тела V и его поверхность S, разумеется, должны быть заданы, в противном случае внешние силы не указываемы.

Пусть f_i и p_i — внешние силы, соответственно, заданные в V и на S. Обозначая через σ_{ij} компоненты напряжения, представим постановку математически:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad x_i \in V \tag{38}$$

$$\sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} + \delta_{ij} f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0, \qquad x_i \in V \tag{39}$$

$$\sigma_{ji} n_j = p_i, \qquad x_i \in S, \tag{40}$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Решение краевой задачи. Определение деформаций и перемещений. Решением подразумевается функция $\sigma_{ij}(x)$, удовлетворяющие уравнениям (38) – (40).

Из него определяются деформации:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left(-\nu\delta_{ij}\sigma_{ij} + (1+\nu)\sigma_{ij}\right),$$

где E — модуль Юнга.

Перемещения $u_i(x)$ определяются по формулам Чезаро [3]:

$$u_i(x) = u_i\left(x^0\right) + \omega_{ij}\left(x^0\right)\left(x_j - x_j^0\right) +$$

$$+\frac{1}{E}\int_l \left(\varepsilon_{ik}(y) + \left(x_j - y_j\right)\left(\varepsilon_{ki,j}(y) - \varepsilon_{kj,i}\right)\right)dy_k,$$

где l — линия в области V, x^0 — начальная точка этой линии, $u_i(x^0)$, $\omega_{ij}(x^0)$ — постоянные интегрирования.

Удобнее пользоваться ее преобразованным видом:

$$u_i(x) = u_i\left(x^0\right) + \omega_{ij}\left(x^0\right)\left(x_j - x_j^0\right) +$$

$$+\frac{1}{E}\int_l \left(-\nu\delta_{ik}\sigma_{tt} + (1+\nu)\left(\sigma_{ik} + \left(x_j - y_j\right)\left(-\nu\left(\delta_{ki}\sigma_{tt,j} - \delta_{kj}\sigma_{tt,i}\right) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + (1+\nu)\left(\sigma_{ki,j} - \sigma_{kj,i}\right)\right)\right)\right)dy_k$$

$u_i\left(x^0\right)$, $\omega_{ij}\left(x^0\right)$ — произвольные постоянные, соответствуют не

вызывающим деформации перемещениям (параллельному переносу и жесткому повороту тела). Исключим из рассмотрения такие перемещения:

$$u_i(x)=\frac{1}{E}\int_l\Big(-\nu\delta_{ik}\sigma_{tt}+(1+\nu)\Big(\sigma_{ik}+(x_j-y_j)\Big(-\nu\big(\delta_{ki}\sigma_{tt,j}-\delta_{kj}\sigma_{tt,i}\big)+ \\ +(1+\nu)\big(\sigma_{ki,j}-\sigma_{kj,i}\big)\Big)\Big)\Big)dy_k \tag{41}$$

Сравниваемое состояние. Как показано на рис. 6, векторы:

$$z_i=x_i-u_i(x),\ x_i\in V \qquad z_i=x_i-u_i(x),\ x_i\in S, \tag{42}$$

определяют некоторую область V_0 и ее поверхность S_0. (V_0,S_0), очевидно, состояние равновесия без внешних сил. (V_0,S_0) назовем сравниваемым состоянием статической краевой задачи.

Определяемое координатами z_i (42) сравниваемое состояние есть некое математическое преобразование области (V,S). Поле $u_i(x)$ определяет относительные изменения координат, компонент деформации, вращения и напряжения этих состояний.

$$x_i-z_i=u_i(x),$$
$$\varepsilon_{ij}(x)-\varepsilon_{ij}(z)=\frac{\big(u_{i,j}+u_{j,i}\big)}{2},$$
$$\omega_{ij}(x)-\omega_{ij}(z)=\frac{\big(u_{i,j}+u_{j,i}\big)}{2},$$
$$\sigma_{ij}(x)=\lambda\delta_{ij}u_{k,k}+\mu\big(u_{i,j}+u_{j,i}\big). \tag{43}$$

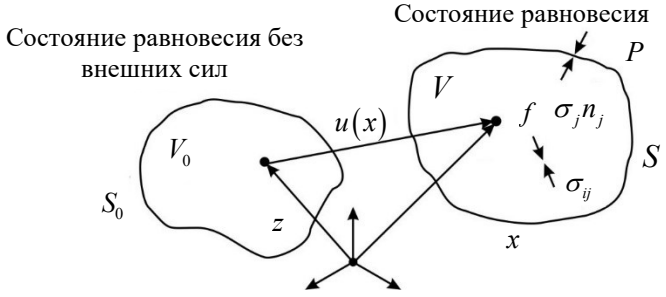


Рис. 6. Состояния равновесия

Тут x_i, $\varepsilon_{ij}(x)$, $\omega_{ij}(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ относятся к положению равновесия с внешними силами, а z_i, $\varepsilon_{ij}(z)$, $\omega_{ij}(z)$ — к положению равновесия без внешних сил.

Поле $u_i(x)$ только преобразует (V,S) в (V_0,S_0), следовательно, оно определяет только относительные изменения координат, деформаций и напряжений этих сравниваемых состояний**.**

Пример решения второй краевой задачи статики. Область определения. Зададимся областью определения уравнений статической краевой задачи в виде указанной на рис. 7 прямоугольной плиты. Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в центре левой торцевой грани.

Под V будем подразумевать следующую область:

$$b/2 \le x_1 \le b/2, \quad 0 \le x_2 \le L, \quad -h/2 \le x_3 \le h/2. \tag{44}$$

Рассмотрим вторую краевую задачу без массовых сил.

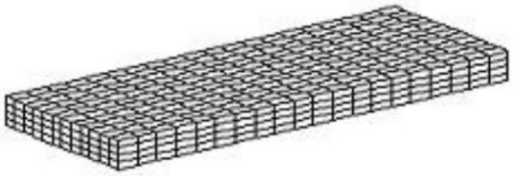


Рис. 7. Прямолинейная плита с усилиями (47) на своей поверхности находится в равновесии

$$\sigma_{ji,j} = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad x_i \in V \tag{45}$$

$$\sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} = 0, \qquad x_i \in V \tag{46}$$

$$\sigma_{ij} n_j = \delta_{i2} c x_3, \qquad x_i \in S \tag{47}$$

где V определяется выражениями (44).

Из (47) следует, что на четырех гранях плиты нет внешних сил, они приложены на левую и правую торцевые грани, создают изгибающие моменты, равные соответственно:

$$m_1 = -\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} c\, x_1^2 dx_1\, dx_2 = -\frac{cbh^3}{12},$$

$$m_2 = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} c\, x_1^2 dx_1\, dx_2 = \frac{cbh^3}{12}.$$

Задача (45) — (47) математически полностью определена. Она

имеет простой механический смысл — прямоугольная плита с усилиями (47) на своей поверхности находится в равновесии.

Требуется найти во внутренних точках этой плиты напряжения, деформации и создавшие их перемещения.

Решение задачи. Решение задачи (45) – (47):

$$\sigma_{ij} = \delta_{i2}\delta_{j2}cx_3, \quad x_i \in V \tag{47}$$

Функции перемещений можно определить, внося (48) в (41).

Интегрируя это выражение, находим:

$$\begin{aligned} u_i(x) = -c(\delta_{i1}\nu x_3\left(x_1 - x_1^0\right) - \delta_{i2}x_3\left(x_2 - x_2^0\right) + \delta_{i3}(x_2^2 + \nu\left(x_3^2 - x_1^2\right) - \\ -x_2^0\left(2x_2 - x_2^0\right) - \nu\left(\left(x_3^0\right)^2 - x_1^0\left(2x_1 - x_1^0\right)\right)\Big)/2\Big)/E, \qquad x_i \in V, \end{aligned} \tag{48}$$

где x_1^0 — любая фиксированная точка области V.

Развернутый вид функций (49):

$$u_1(x) = -\frac{c\nu x_3\left(x_1 - x_1^0\right)}{E}, \quad x_1 \in V;$$

$$u_2(x) = \frac{cx_3\left(x_2 - x_2^0\right)}{E}, \quad x_i \in V;$$

$$\begin{aligned} u_3(x) = -c\Big(\Big(x_2^2 + \nu\left(x_3^2 - x_1^2\right) - x_2^0\left(2x_2 - x_2^0\right) - \\ -\nu\left(\left(x_3^0\right)^2 - x_1^0\left(2x_1 - x_1^0\right)\right)\Big)/2E, \qquad x_i \in V. \end{aligned}$$

Функции (49) удовлетворяют уравнениям равновесия в форме Навье.

Наконец, из поля перемещений (49) определим компоненты деформации и вращения:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{cx_3\left(-\nu\left(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i3}\delta_{j3}\right) + \delta_{i2}\delta_{j2}\right)}{E}, \quad x_i \in V, \tag{49}$$

$$\begin{aligned} \omega_{ij} = -c\Big(\nu\left(x_1 - x_1^0\right)\left(\delta_{1i}\delta_{3j} - \delta_{3i}\delta_{1j}\right) - \\ -\left(x_2 - x_2^0\right)\left(\delta_{2i}\delta_{3j} - \delta_{3i}\delta_{2j}\right)\Big)/E, \quad x_i \in V. \end{aligned} \tag{50}$$

По полученным выражениям в любой точке находящегося в равновесии в области V тела можно определить компоненты напряжения, деформации и вращения. Особо отметим то, что во всех выражениях (48) – (51) присутствуют координаты только области V (44).

Здесь нет обычного координатного разночтения. В $u_i(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ одни и те же координаты.

Различие между координатами, деформациями, напряжениями сравниваемого и заданного состояний, определяемыми уравнениями (43), имеет вид:

$$\varepsilon_{ij}(x)-\varepsilon_{ij}(z)=\frac{cx_3\left(-\nu\left(\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i3}\delta_{j3}\right)+\delta_{i2}\delta_{j2}\right)}{E} \tag{51}$$

$$\omega_{ij}(x)-\omega_{ij}(z)=-c\Big(\nu\left(x_1-x_1^0\right)\left(\delta_{1i}\delta_{3j}-\delta_{3i}\delta_{1j}\right)-$$
$$-\left(x_2-x_2^0\right)\left(\delta_{2i}\delta_{3j}-\delta_{3i}\delta_{2j}\right)\Big)/E$$

$$\sigma_{ij}(x)=\delta_{i2}\delta_{j2}cx_3.$$

Сравниваемое состояние. Координаты сравниваемого состояния z_i связаны с координатами рассматриваемого состояния равновесия выражениями:

$$z_i=x_i-c\Big(\delta_{i1}\nu x_3\left(x_1-x_1^0\right)-\delta_{i2}x_3\left(x_2-x_2^0\right)+$$
$$+\delta_{i3}\Big(x_2^2+\nu\left(x_3^2-x_1^2\right)-x_2^0\left(2x_2-x_2^0\right)- \tag{52}$$
$$-\nu\Big(\left(x_3^0\right)^2-x_1^0\left(2x_1-x_1^0\right)\Big)\Big)/2\Big)/E,\quad x_i\in V$$

В качестве x^0 можно брать координаты любой точки области (44). В дальнейшем положим:

$$x_1^0=0,\ x_2^0=\frac{l}{2},\ x_3^0=0.$$

Случаи нагружения. Рассмотрим три случая $c=0$, $c=30$, $c=60$.

Пусть $c=0$, на поверхности S внешних сил нет. Тело занимает область V (44) и находится в равновесии. Выражения (53) принимают вид:

$$\begin{gathered}x_i-z_i=0,\\ \varepsilon_{ij}(x)-\varepsilon_{ij}(z)=0,\\ \omega_{ij}(x)-\omega_{ij}(z)=0,\\ \sigma_{ij}(x)=0.\end{gathered} \tag{53}$$

Сравниваемое состояние совпадает с заданным. Подставляя первое из уравнений (54) в остальные, приходим к неопределенности:

$$\varepsilon_{ij}(x)-\varepsilon_{ij}(x)=0,\quad \omega_{ij}(x)-\omega_{ij}(x)=0,\quad \sigma_{ij}(x)=0.$$

Здесь $\varepsilon_{ij}(x)$, $\omega_{ij}(x)$ остаются неопределенными. Такая неопределенность не противоречит сути краевой задачи, а наоборот, более полно отражает то, что может быть в действительности. В равновесии может находиться не только тело, которое не имеет никаких остаточных деформаций, но и тело, которое их имеет.

Пусть $c=30$. Тело занимает ту же область V (44). Подставим это значение в (54) и определим сравниваемое состояние на рис. 8:

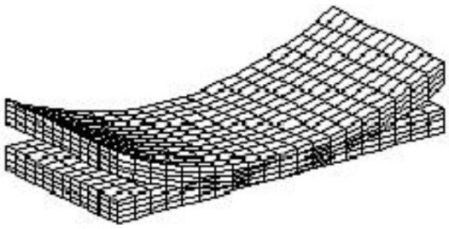


Рис. 8. Сравниваемые состояния при $c=30$

Теперь пусть $c=60$. В этом состоянии равновесия тело занимает то же положение, что и раньше, т.е. имеет форму прямоугольной плиты. Подставим это значение с в (54) и определим сравниваемое состояние на рис. 9:

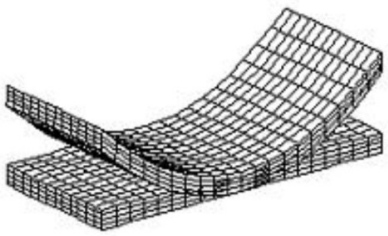


Рис. 9. Сравниваемые состояния при $c=60$

Во всех трех случаях тело имеет одну и ту же конфигурацию и занимает одно и то же положение в пространстве. Это положение тела недвижимо и геометрически неизменяемо при любых величинах внешней нагрузки.

Решения:

$$\sigma_{ij}(x)=0,\quad \sigma_{ij}(x)=\delta_{i2}\delta_{j2}30x_3,\quad \sigma_{ij}(x)=\delta_{i2}\delta_{j2}60x_3,\quad x_i\in V,$$

соответствующие трем рассмотренным выше случаям, удовлетворяют уравнениям задачи (45)—(47) в одном и том же положении тела, а именно, в его прямолинейном очертании.

О том, что граничное условие (47) удовлетворяется на поверхности соответствующих этим решениям сравниваемых состояний на рис. 8 и рис. 9, говорить не приходится.

Внешние силы являются атрибутами декларируемого уравнениями (45)–(47) равновесия и, в связи с этим, они уже никак не могут рассматриваться в роли нарушителей этого равновесия.

Условие (47) ничто иное, как условие равновесия точек поверхности тела. Усилия, действующие снаружи поверхности равны усилиям $\sigma_{ij}n_j$, действующим изнутри.

Единственность решения. Данную задачу представим уравнениями Навье:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji}, \quad x_i \in V \tag{55}$$

Граничные условия для этих уравнений напишем в трех видах:

1. Заданы перемещения на поверхности S, которые определяются функцией:

$$u_i(x) = -c\Big(\delta_{i1} v x_3 \left(x_1 - x_1^0\right) - \delta_{i2} x_3 \left(x_2 - x_2^0\right) +$$
$$+\delta_{i3}\Big(x_2^2 + v\left(x_3^2 - x_1^2\right) - x_2^0\left(2x_2 - x_2^0\right) -$$
$$-v\Big(\left(x_3^0\right)^2 - x_1^0\left(2x_1 - x_1^0\right)\Big)\Big)/2\Big)/E, \qquad x_i \in V.$$

при поочередной подстановке в нее значений координат

$$x_1 = -\frac{b}{2}, x_1 = \frac{b}{2}, x_2 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -\frac{h}{2}, \quad x_3 = \frac{h}{2}. \tag{56}$$

2. Заданы внешние силы на поверхности S:

$$\sigma_{ij} n_j = \delta_{i2} c x_3, \quad x_i \in S. \tag{57}$$

3. Заданы на четырех гранях перемещения, которые определяются функцией:

$$u_i(x) = -c\Big(\delta_{i1} v x_3 \left(x_1 - x_1^0\right) - \delta_{i2} x_3 \left(x_2 - x_2^0\right) +$$
$$+\delta_{i3}\Big(x_2^2 + v\left(x_3^2 - x_1^2\right) - x_2^0\left(2x_2 - x_2^0\right) -$$
$$-v\Big(\left(x_3^0\right)^2 - x_1^0\left(2x_1 - x_1^0\right)\Big)\Big)/2\Big)/E, \qquad x_i \in V.$$

в которую поочередно надо подставить следующие значения координат $x_1 = -b/2, x_1 = b/2, x_2 = -h/2, x_2 = h/2,$ а на остальных двух гранях:

$$\sigma_{ij}\left(x_1,0,x_3\right)=-\delta_{i2}cx_3,\quad \sigma_{ij}\left(x_1,x_3\right)=\delta_{i2}cx_3. \tag{58}$$

Статическая краевая задача имеет единственное решение. Решение задач (55), (56); (55), (57); (55), (58):

$$\begin{aligned} u_i(x)=-c\Big(&\delta_{i1}\nu x_3\left(x_1-x_1^0\right)-\delta_{i2}x_3\left(x_2-x_2^0\right)+\\ &+\delta_{i3}\Big(x_2^2+\nu\left(x_3^2-x_1^2\right)-x_2^0\left(2x_2-x_2^0\right)-\\ &-\nu\Big(\left(x_3^0\right)^2-x_1^0\left(2x_1-x_1^0\right)\Big)\Big)/2\Big)/E,\qquad x_i\in V. \end{aligned} \tag{54}$$

то же самое, что и задачи (45)—(47).

Это легко показать. Из (59) находим:

$$u_{k,k}=\frac{c\left(1-2\nu\right)x_3}{E},$$

$$u_{i,j}+u_{j,i}=\frac{2cx_3\left(\delta_{i2}\delta_{j2}-\nu\left(\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i3}\delta_{j3}\right)\right)}{E}.$$

Подставим эти величины в выражение для $\sigma_{ij}(x)$:

$$\sigma_{ij}\left(x\right)=\lambda\delta_{ij}u_{k,k}+\mu\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)=\frac{cx_3\left(\delta_{i2}\delta_{j2}+\nu\left(\delta_{ij}-\delta_{i1}\delta_{j1}-\delta_{i3}\delta_{j3}\right)\right)}{1+\nu}.$$

Далее, учитывая равенство $\delta_{i2}\delta_{j2}=\delta_{ij}-\delta_{i1}\delta_{j1}-\delta_{i3}\delta_{j3}$, находим:

$$\sigma_{ij}\left(x\right)=\delta_{i2}\delta_{j2}cx_3$$

Механический смысл задач (45) – (47); (55),(56); (55),(57); (55),(58) один и тот же — плита в области V (44) находится в состоянии равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Галеркин Б.Г. *Собрание сочинений*. Москва, АН СССР, 1952, 391 с.

[2] Грин А., Аткинс Дж. *Большие упругие деформации в нелинейной механике сплошной среды*. Москва, Мир, 1965, 456 с.

[3] Дуйшеналиев Т.Б. *Неклассические решения механики деформируемого тела.* Москва, МЭИ, 2017, 400 с.

[4] Ильюшин А.А. *Механика сплошной среды*. Москва, Московский университет, 1971, 248 с.

[5] Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости.* Москва, Наука, 1980, 512 с.

[6] Новацкий В. *Теория упругости*. Москва, Мир, 1975, 256 с.

[7] Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела*. Москва, Наука, 1979, 744 с.

[8] Рудской А.И., Дуйшеналиев Т.Б. *Прочность и пластичность материалов*. Санкт-Петербург, Политехнический университет, 2016, 218 с.

[9] Трусделл К. *Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред*. Москва, Мир, 1975, 592 с.
[10] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов.* Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999, 592 с.

Статья поступила в редакцию 02.02.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Дуйшеналиев Т.Б., Меркурьев И.В., Дуйшембиев А.С. Математическая модель для оценки конечных деформаций резиноподобных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 2, с. 3–25.

Дуйшеналиев Туратбек Болотбекович — д-р. физ.-мат. наук., профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин» НИУ "МЭИ", механика деформируемого твердого тела, 170 научных публикаций.
e-mail: duishenaliev@mail.ru, DuyshenaliyevT@mpei.ru

Меркурьев Игорь Владимирович — д-р. техн. наук., заведующий кафедрой «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин», директор Института энергомашиностроения и механики НИУ "МЭИ", механика, гироскопия, навигация, управление техническими системами, 120 научных публикаций.
e-mail: MerkuryevIV@mpei.ru

Дуйшембиев Алмаз Сагыналиевич — аспирант КГТУ им. И. Раззакова, механика деформируемого твердого тела, 7 научных публикаций. e-mail: ads.t87@mail.ru

Mathematical model for finding finite deformations of rubber - like materials

© T.B. Duishenaliev[1], I.V. Merkuryev[1], A.S. Duishembiev[2]

[1]NRU "MPEI", Moscow, 111250, Russia
[2]KSTU named after I. Razzakov, Bishkek, 720044, Kyrgyzstan

The article considers finite (geometrically nonlinear) elastic deformations of rubber-like materials and structures. Such deformations are described by a mathematical model developed on the basis of a non-classical approach to solving boundary-value problems of statics. Formulas are given for determining the final deformations of elastic rubber-like bodies based on the elements of spatial and material displacement gradients. Comparison of definitions for these two approaches is given. The validity of the above conclusions is confirmed by the example of one-dimensional, two-dimensional and three-dimensional transformations in the MathCad system. An example of determining the elements of the spatial displacement gradient is considered. It is known that a static boundary value problem has two formulations. The first one is put forward during its formulation and is used to derive the fundamental relations of the mechanics of a deformable body (Betty's theorem, general solution in the form of Somiliani formulas, etc.). The second is used in solving such problems. It is believed that the problems of both statements have the same solution. A non-classical solution of the boundary value problem of statics is proposed. It strictly corresponds to the generally accepted statement. The Chezaro method of representing the displacement field using the deformation components is given. Further, this method is developed, it becomes possible to express the field of displacements also through the stress components. The problem of equilibrium of a rectangular plate of rubber-like material is

solved. The expressions obtained determine the components of deformations, stresses, and displacements at any point of the plate. In all these expressions, only the coordinates of the finite region of the elastic body are present. There is no usual coordinate misunderstanding: in displacements and stresses are the same coordinates. This problem is also represented by the Navie equations. The uniqueness of its solution is proved.

Keywords: *rubber-like materials, plate, final deformations, stresses, displacements, displacement gradient, spatial and material coordinates, boundary value problem*

REFERENCES

[1] Galerkin B.G. *Sobranie sochinenij* [Collected works]. Moscow, USSR Publ., 1952, 391 p.
[2] Green A.E., Adkins J.E. *Bolshie uprugie deformacii v nelinejnoj mekhanike sploshnoj sredy* [Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1965, 456 p.
[3] Duishenaliev T.B. *Neklassicheskie resheniya mekhaniki deformiruemogo tela* [Non-classical solutions of the mechanics of a deformable body]. Moscow, MPEI Publ., 2017, 400 p.
[4] Iliushin A.A. *Mekhanika sploshnoj sredy* [Continuum mechanics]. Moscow, Moscow University Publ., 1971, 248 p.
[5] Lurie A.I. *Nelinejnaya teoriya uprugosti* [Nonlinear theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 512 p.
[6] Nowacki W. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Mir Publ., 1975, 256 p.
[7] Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable solid]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 744 p.
[8] Rudskoi A.I., Duishenaliev T.B. *Prochnost i plastichnost materialov* [Strength and ductility of materials]. Saint Petersburg, Polytechnic university Publ., 2016, 218 p.
[9] Trusdell C. *Pervonachalnyj kurs racionalnoj mekhaniki sploshnyh sred* [A first course in rational continuum mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1975, 592 p.
[10] Feodosev V.I. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, BMSTU Publ., 1999, 592 p.

Duishenaliev T.B., Dr. Sc. (Phys. — Math.), Professor of Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of machines, National Research University "Moscow Power Engineering Institute". Author of 170 scientific publications in the field of solid mechanics. e-mail: duishenaliev@mail.ru, DuyshenaliyevT@mpei.ru

Merkuryev I.V., Dr. Sc. (Eng.), Head of Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, Director of Power Ingineering and Mechanics Institute National Research University "Moscow Power Engineering Institute". Author of 120 scientific publications in the field of mechanics, gyroscopy, navigation, control of technical systems. e-mail: MerkuryevIV@mpei.ru

Duishembiev A.S., Postgraduate of the Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov, Author of 7 scientific publications in the field of mechanics of a deformable solid. e-mail: ads.t87@mail.ru