ISSN 2309-3684

Математическое моделирование и численные методы

УДК 621.833.51 DOI: 10.18698/2309-3684-2020-1-118128

«Смешанные» вероятностные модели боя при переменных эффективных скорострельностях боевых единиц сторон

© В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе теории непрерывных марковских процессов разработаны «смешанные» вероятностные модели двухсторонних боевых действий с экспоненциальными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя. Разработан численный алгоритм для вычисления основных показателей боя многочисленных группировок. Проведено сравнение с результатами моделирования боя при использовании «смешанной» детерминированной модели с экспоненциальными зависимостями эффективных скорострельностей от времени боя, а также со «смешанными» вероятностными моделями с постоянными эффективными скорострельностями. Установлена область применимости моделей этих типов.

Ключевые слова: *непрерывный марковский процесс, «смешанная» вероятностная модель двухсторонних боевых действий, боевая единица, эффективная скорострельность, параметр начального соотношения сил*

Введение. При проектировании новых технических систем для оценки качества их работы требуется, как правило, разработка математических моделей их функционирования [1–2]. Основой оценки образцов вооружения и военной техники являются показатели их боевой эффективности, так как в конечном итоге именно они позволяют оценить степень приспособленности образца к решению поставленных боевых задач [3–4]. Обосновать критерии боевой эффективности перспективных видов вооружения и военной техники возможно только при помощи математического моделирования [5]. При этом необходимо использовать модели двухсторонних боевых действий, так как они позволяют более полно и достоверно учесть большее число факторов, влияющих на эффективность в реальных боевых условиях, чем модели без учёта ответного огня [6–7]. А так как процесс протекания боя является стохастическим, для такой оценки целесообразно использовать вероятностные модели, так как они позволяют исследовать бой со значительно большей степенью точности и полноты, чем детерминированные модели (модели динамики средних) [8–9].

Одним из способов описания процесса боевых действий является применение теории непрерывных марковских процессов [10]. Процесс, протекающий в системе, называется марковским, если в каждый момент времени вероятности любых состояний системы в будущем зависит только от её состояния в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в данное состояние [11].

Последовательность выстрелов, производимых каждой участвующей в бою единицей, представляется в виде пуассоновского потока событий [3]. Применяется приём, заключающийся в переходе от потока выстрелов к потоку успешных выстрелов, который также считается пуассоновским. Выстрел назовём успешным, если он поражает боевую единицу противника [4].

Пусть в начале боя сторона X имеет m однотипных боевых единиц, а сторона Y — n также однотипных боевых единиц, не обязательно однородных с единицами стороны X. Полагаем, что сторона X имеет полную и не запаздывающую информацию о состоянии единиц противника (поражены или нет) и ведёт огонь только по уцелевшим единицам. При этом хорошая маскировка единиц стороны X не позволяет противнику иметь такую же информацию, а сторона Y ведёт равномерный огонь как по уцелевшим, так и по уничтоженным единицам стороны X (такую модель боя назовём «смешанной»).

Введём следующие обозначения: p_x, p_y — вероятности поражения боевой единицы противника одним выстрелом единицы сторон X и Y соответственно, λ_x, λ_y — практические скорострельности боевых единиц сторон X и Y соответственно, величины $v = p_x\lambda_x$ и $u = p_y\lambda_y$ назовём эффективными скорострельностями боевых единиц сторон [12].

Величины v и u могут в течение боя претерпевать существенные изменения. При отражении атаки противника происходит сближение сторон, приводящее к уменьшению дальности стрельбы, в результате чего значительно возрастает точность стрельбы как у наступающей, так и у обороняющейся стороны. Также уменьшение дальности стрельбы приводит к увеличению практической скорострельности боевых единиц. Проведённые теоретические исследования, а также экспериментальные данные показали, что во многих боевых ситуациях необходимо учитывать изменение эффективных скорострельностей боевых единиц в течение боя. Во многих случаях их хорошей аппроксимацией являются экспоненциальные функции времени боя, то есть

$$\begin{cases} v = k_x e^{a_x t} \\ u = k_y e^{a_y t}. \end{cases}$$

В [13] приведены вероятностные модели высокоорганизованного боя при экспоненциальных зависимостях боевых единиц сторон от времени боя, в [14] — «смешанная» стохастическая модель при постоянных эффективных скорострельностях боевых единиц сторон, а в [15] — «смешанная» детерминированная модель боя при экспоненциальных зависимостях эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя.

Описание процесса боевых действий. Основные математические зависимости. Полагая, что противоборствующие стороны начинают боевые действия одновременно, а также, что одним выстрелом можно уничтожить не более одной боевой единицы противника, получаем следующую систему уравнений для описания процесса боевых действий.

$$F'_{i0}(t) = ik_x e^{a_x t} F_{i1}(t);\ i = \overline{1,m},$$

$$F'_{0j}(t) = \frac{jk_y e^{a_y t}}{m} F_{1j}(t);\ j = \overline{1,n},$$

$$F'_{ij}(t) = -\left(ik_x e^{a_x t} + \frac{ijk_y e^{a_y t}}{m}\right) F_{ij}(t) + ik_x e^{a_x t} F_{i,j+1}(t) +$$

$$+\frac{(i+1)\,jk_y e^{a_y t}}{m} F_{i+1,j}(t);\ i = \overline{1,m-1};\ j = \overline{1,n-1},$$

$$F'_{mj}(t) = -\left(mk_x e^{a_x t} + jk_y e^{a_y t}\right) F_{mj}(t) + mk_x e^{a_x t} F_{m,j+1}(t);\ j = \overline{1,n-1},$$

$$F'_{in}(t) = -\left(ik_x e^{a_x t} + \frac{in}{m} k_y e^{a_y t}\right) F_{in}(t) + \frac{(i+1)n}{m} k_y e^{a_y t} F_{i+1,n}(t);\ i = \overline{1,m-1},$$

$$F'_{mn}(t) = -\left(mk_x e^{a_x t} + nk_y e^{a_y t}\right) F_{mn}(t).$$

С начальными условиями $F_{mn}(0) = 1;\ F_{ij}(0) = 0$ при $i + j < m + n$, где $F_{ij}(t)$ — вероятности того, что в момент времени t сохранились i единиц стороны X и j единиц стороны Y, $F'_{ij}(t)$ — их производные по времени.

Полагаем, что бой ведётся до полного уничтожения одной из противоборствующих сторон. При этом окончательными состояниями системы являются следующие: $(1:0)$, ..., $(i:0)$, ..., $(m:0)$, $(0:1)$, ..., $(0:j)$, ..., $(0:n)$.

Авторами разработан численный алгоритм, позволяющий вычислить вероятности всех состояний системы в любой момент времени боя, вероятности окончательных состояний, а также основные показатели боя. К ним, в первую очередь, относятся вероятности победы P_{ox} и P_{oy} сторон X и Y соответственно и математические ожидания M_x и M_y относительных количеств сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя.

Для боя $(m:n)$ значения этих величин вычисляются следующим образом:

$$P_{ox} = \sum_{i=1}^{m} F_{io}(\infty);$$

$$P_{oy} = \sum_{j=1}^{n} F_{oj}(\infty);$$

$$M_x = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} iF_{io}(\infty);$$

$$M_y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} jF_{oj}(\infty),$$

где $F_{ij}(\infty)$ — вероятности того, что к концу боя сохранились i боевых единиц стороны X и j единиц стороны Y.

Анализ результатов расчётов. Введём обозначения:

$$\mu = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{a_x + a_y}, \quad \nu = \frac{a_y}{a_x + a_y}, \quad æ = \frac{n}{m}\sqrt{\frac{k_y}{k_x}}.$$

Параметр μ характеризует рост интенсивности протекания боя (чем больше μ, тем медленнее она возрастает). В реальных боевых условиях, как правило, $\mu \geq 2$. Параметр ν $(0 \leq \nu \leq 1)$ характеризует относительную скорость изменения эффективных скорострельностей боевых единиц одной стороны относительно другой в процессе протекания боя. При $\nu = 1$ величина $a_x = 0$, то есть эффективные скорострельности боевых единиц стороны X постоянны в течение боя. При $\nu = 0$ величина $a_y = 0$ и постоянными являются эффективные скорострельности боевых единиц стороны X. Величину æ назовём параметром начального соотношения сил.

Результаты расчётов отражены на рис. 1 – 6. На них красными и зелёными линиями представлены изменения величин M_x и M_y соответственно в зависимости от значения æ, полученные при использовании разработанных в настоящей статье вероятностных моделей боя. Синими и чёрными линиями представлены значения этих величин, полученные на основе метода динамики средних [15]. Все рисунки соответствуют значению $\mu = 2$, то есть высокому росту интенсивности протекания боя. Рис. 1, 3 и 5 соответствуют значению $\nu = 0$, а рис. 2, 4 и 6 — значению $\nu = 1$, то есть тем значениям ν, при которых изменение эффективных скорострельностей в течение боя наиболее сильно влияет на ход протекания боя и его основные показатели. Рис. 1 и 2 соответствуют равным начальным численностям группировок ($m = n$), рис. 3 и 4 — ситуации, когда начальные численности стороны Y в 5 раз превосходят начальные численности стороны X $(n = 5m)$, рис. 5 и 6 — ситуации, когда начальные численности стороны X в 5 раз превосходят начальные численности стороны Y $(m = 5n)$.

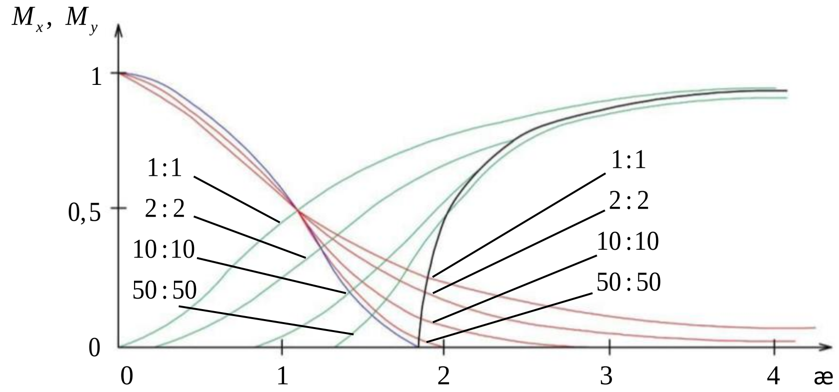

Рис. 1. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся к концу боя боевых единиц сторон при $m = n,\ \mu = 2, \nu = 0$

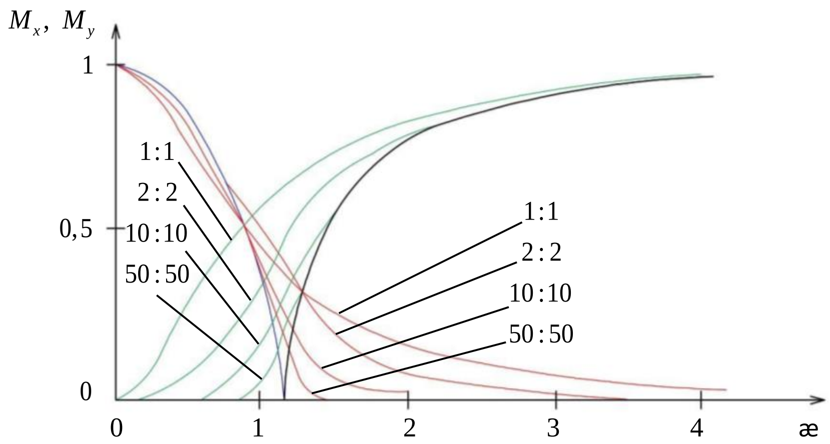

Рис. 2. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся к концу боя боевых единиц сторон при $m = n,\ \mu = 2, \nu = 1$

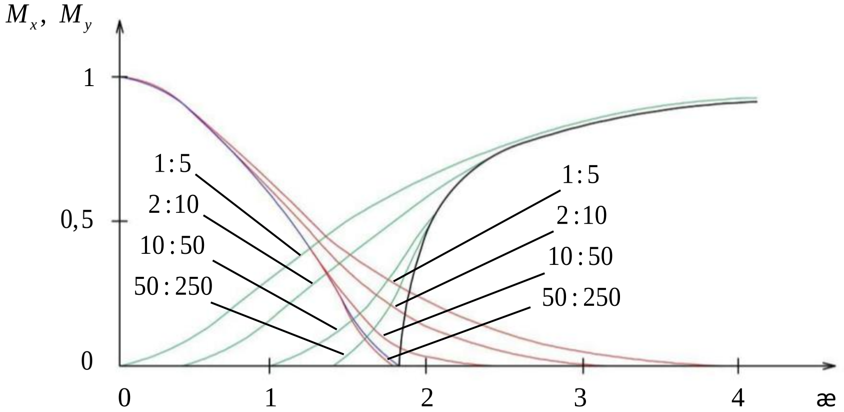

Рис. 3. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся к концу боя боевых единиц сторон при $n = 5m$, $\mu = 2$, $\nu = 0$

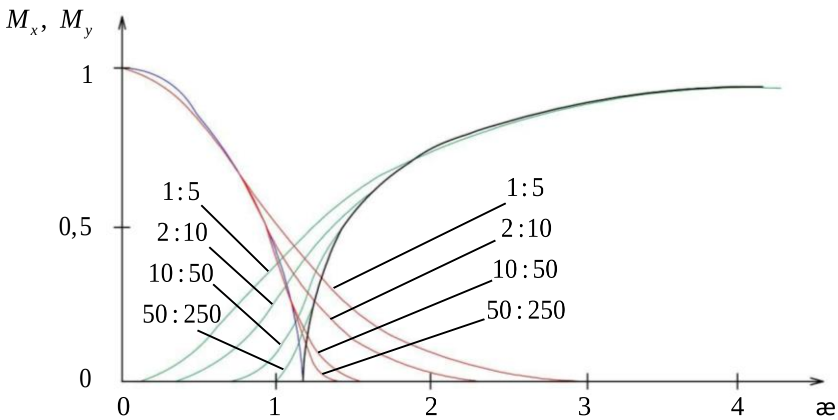

Рис. 4. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся к концу боя боевых единиц сторон при $n = 5m$, $\mu = 2, \nu = 1$

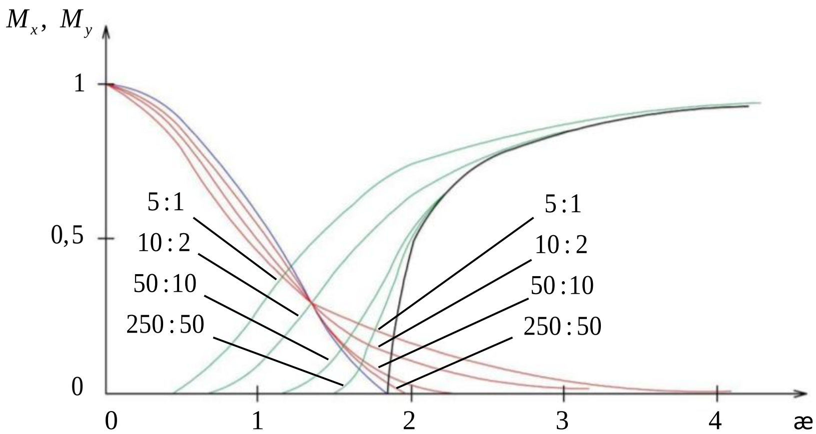

Рис. 5. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся к концу боя боевых единиц сторон при $m = 5n$, $\mu = 2$, $\nu = 0$

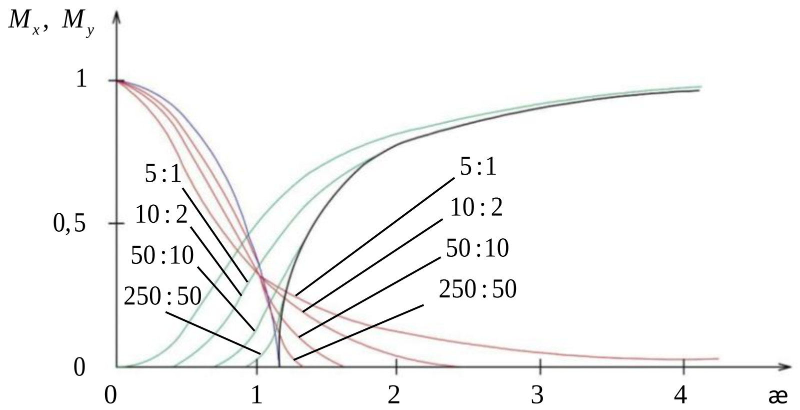

Рис. 6. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся к концу боя боевых единиц сторон при $m = 5n$, $\mu = 2$, $\nu = 1$

Согласно результатам расчётов, наличие информации о состоянии боевых единиц противника при отсутствии её у противоборствующей стороны значительно повышает боевые возможности группировки с пропорциональным увеличением начальных численностей противоборствующих сторон. Так при $\mu = 2, \nu = 0, æ = 1,25$ для боя 2:2 получаем $M_x = 0,410, M_y = 0,375$, а для боя 50:50 $M_x = 0,386, M_y = 0,000$. При $\mu = 2, \nu = 1, æ = 1$ для боя 5:1 получаем $M_x = 0,351, M_y = 0,501$, а для боя 50:10 $M_x = 0,310, M_y = 0,124$.

Параметр ν также оказывает существенное влияние на исход боя и его основные показатели. Для боя 2:10 при $\mu = 2, æ = 1, \nu = 0$ получаем $M_x = 0,593, M_y = 0,149$, а при $\mu = 2, æ = 1, \nu = 1$ — $M_x = 0,410$, $M_y = 0,375$. Для боя 10:10 при $\mu = 2, æ = 1,25, \nu = 0$ получаем $M_x = 0,376$, $M_y = 0,069$, а при $\mu = 2, æ = 1, \nu = 1$ — $M_x = 0,133$, $M_y = 0,373$.

Проведём сравнение с результатами моделирования боя, полученными на основе «смешанной» модели динамики средних с экспоненциальными зависимостями эффективных скорострельностей от времени боя [15]. Как показали результаты расчётов, на ошибки метода динамики средних влияет в первую очередь соотношение сил противоборствующих сторон, а не их начальные численности. Так, для боя 50:50 при $\mu = 2, æ = 1,15, \nu = 1$ $M_x = 0,122, M_y = 0,172$ (для модели динамики средних $M_x = 0,000, M_y = 0,055$), то есть ошибка в вычислении этих величин превосходит 10%. Вместе с тем для боя

10:10 при $\mu = 2, æ = 2, \nu = 1$ имеем $M_x = 0,004, M_y = 0,763$ (для модели динамики средних $M_x = 0,000, M_y = 0,771$), то есть ошибка в вычислении этих величин менее 1%.

Проведём также сравнение с результатами моделирования боя, полученными при использовании «смешанных» вероятностных моделей с постоянными эффективными скорострельностями [14]. На ошибки последних влияет в первую очередь значение величины ν, а также значения μ и $æ$. При $0,46 < \nu < 0,54$ ошибки в вычислении M_x и M_y не превосходят 5% при любых значениях μ и $æ$. Аналогичная картина наблюдается и при больших значениях μ ($\mu \geq 6$), а также при существенном превосходстве одной из противоборствующих сторон ($æ \leq 0,5$ и $æ \geq 3$).

Выводы. Результаты настоящей статьи позволяют сделать следующие выводы.

- На основе теории непрерывных марковских процессов разработаны «смешанные» вероятностные модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок. Создан численный алгоритм, позволяющий вычислить основные показатели боя.
- Установлено, что наличие информации о состоянии боевых единиц противника при отсутствии таковой у противоборствующей стороны существенно повышает боевые возможности группировки, причём, с пропорциональным ростом начальных численностей противоборствующих сторон преимущество стороны, имеющей такую информацию, значительно возрастает.
- Показано, что использование «смешанных» моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями может в ряде случаев привести к существенным ошибкам в вычислении основных показателей боя. Установлена область применимости моделей этого типа.
- Установлено, что на ошибки метода динамики средних в первую очередь влияет соотношение сил противоборствующих группировок, а не их начальные численности. Использование модели динамики средних приводит к существенным ошибкам в вычислении основных показателей боя близких по силам группировок даже при их больших начальных численностях.5. Показано, что при значительном превосходстве одной из сторон модели динамики средних можно использовать даже для исследования боя небольших по численности группировок, что не приведёт к сколь заметным ошибкам в вычислении его основных показателей.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров А.А., Димитриенко Ю.И. Математическое и компьютерное моделирование — основа современных инженерных наук. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 3–4.

[2] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

[3] Вентцель Е.С. *Исследование операций: задачи, принципы и методология*. Москва, УРСС, 2006, 432 с.

[4] Чуев Ю.В. *Исследование операций в военном деле*. Москва, Воениздат, 1970, 270 с.

[5] Зайцев Д.В., Сосков Д.Ю., Салов В.Е. Принципы построения математических моделей боя в условиях военных конфликтов низкой интенсивности. *Вооружение и экономика,* 2016, №3, с.44–53.

[6] Jaiswal N.K. *Military Operations Research: Quantitative Decision Making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, 388 p.

[7] Winston W.L. *Operations Research: Applications and Algorithms*. Belmont, Duxbury Press, 2001, 128 p.

[8] Ткаченко П.Н. *Математические модели боевых действий*. Москва, Советское радио, 1969, 240 с.

[9] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to Operations Research*. New York, McGraw-Hill, 2005, 998 p.

[10] Алексеев О.Г., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. *Марковские модели боя*. Москва, Министерство обороны СССР, 1985, 85 с.

[11] Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, КноРус, 2016, 658 с.

[12] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1, с. 89–104.

[13] Дубограй И.В., Рябцев Р.А., Чуев В.Ю. Вероятностные модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок при экспоненциальных зависимостях эффективных скорострельностей боевых единиц от времени боя. *Известия российской академии ракетных и артиллерийских наук*, 2018, № 4 (109), с. 68–75.

[14] Чуев В.Ю., Дубограй И.В., Дьякова Л.Н. «Смешанные» вероятностные модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы,* 2017, № 1, с. 91–101.

[15] Дубограй И.В., Рябцев Р.А., Чуев В.Ю. «Смешанная» модель двухсторонних боевых действий при переменных эффективных скорострельностях боевых единиц сторон. *Известия российской академии ракетных и артиллерийских наук,* 2019, № 3 (112), с. 71–76.

Статья поступила в редакцию 03.03.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Чуев В.Ю., Дубограй И.В. «Смешанные» вероятностные модели боя при переменных эффективных скорострельностях боевых единиц сторон. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 1, с. 118–128.

Чуев Василий Юрьевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области прикладной математики. e-mail: vacilious@mail.ru

Дубограй Ирина Валерьевна — доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области прикладной математики. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

"Mixed" probabilistic models of fighting with variable effective firing rate of fighting units of sides

© V.Yu. Chuev, I.V. Dubogray

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

On the basis of the theory of continuous Markov processes, "mixed" probabilistic models of bilateral fighting operations with exponential dependences of the effective rate of fire of the combat units of the parties on the time of battle have been developed. A numerical algorithm has been developed to calculate the main indicators of the battle of numerous groups. It is made a comparison of the results of battle simulation using a "mixed" deterministic model with exponential dependences of effective rates of fire on the time of battle, as well as with "mixed" probabilistic models with constant effective rates of fire. The scope of these types of models applicability is established.

Keywords: *continuous Markov process, "mixed" probabilistic model of bilateral combat operations, combat unit, effective rate of fire, parameter of the initial ratio of forces*

REFERENCES

[1] Alexandrov A.A., Dimitrienko Yu.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 3–4.

[2] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 5–17.

[3] Venttsel E.S. *Issledovanie operatsiy: zadachi, printsipy, metodologiya* [Operations research: objectives, principles, methodology]. Moscow, URSS Publ., 2006, 432 p.

[4] Chuev Yu.V. *Issledovanie operatsiy v voennom dele* [Operations research in military arts]. Moscow, Voenizdat Publ., 1970, 270 p.

[5] Zaitsev D.V., Soskov D.Yu., Salov V.E. *Vooruzhenie i ekonomika — Armament and Economics*, 2016, no. 3, pp. 44–53.

[6] Jaiswal N.K. *Military Operations Research: Quantitative Decision Making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, 388 p.

[7] Winston W.L. *Operations Research: Applications and Algorithms*. Belmont, Duxbury Press, 2001, 128 p.

[8] Tkachenko P.N. *Matematicheskie modeli boevykh deistviy* [Mathematical models of combat operations]. Moscow, Sovetskoe radio, 1969, 240 p.

[9] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to Operations Research*. New York, McGraw-Hill, 2005, 998 p.

[10] Alekseev O.G., Anisimov V.G., Anisimov E.G. *Markovskie modeli boya* [Markov's battle models]. Moscow, the USSR Ministry of Defense Publ., 1985, 85 p.

[11] Venttsel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, KnoRus Publ., 2016, 658 p.

[12] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1, pp. 89–104.

[13] Dubogray I.V., Ryabtsev R.A., Chuev V.Yu. *Izvestiya rossijskoj akademii raketnyh i artillerijskih nauk — Proceedings of the Russian academy of rocket and artillery sciences*, 2018, no. 4 (109), pp. 68–75.

[14] Chuev V.Yu., Dubogray I.V., D'yakova L.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical modeling and Computational Methods*, 2017, no. 1, pp. 91–101.

[15] Dubogray I.V., Ryabtsev R.A., Chuev V.Yu. *Izvestiya rossijskoj akademii raketnyh i artillerijskih nauk — Proceedings of the Russian academy of rocket and artillery sciences*, 2019, no. 3 (112), pp. 71–76.

Chuev V.Yu., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 20 scientific papers in the field of applied mathematics. e-mail: vacilious@mail.ru

Dubogray I.V., Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of scientific papers in the field of applied mathematics. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru