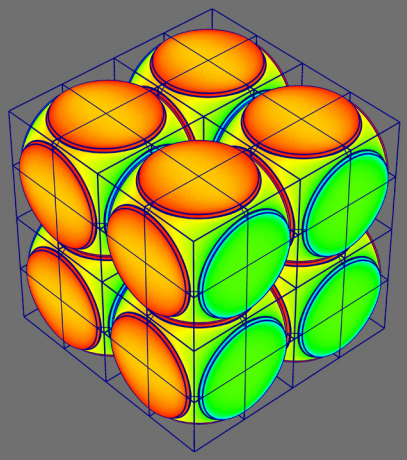
ISSN 2309-3684



# Математическое моделирование и численные методы

Федюшкин А.И. Влияние чисел Рэлея, Прандтля и граничных условий на конвективные течения жидкости в горизонтальных слоях. Математическое моделирование и численные методы. 2020. № 1. с. 28–44.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/213/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 14:55:50

УДК 532.5.032 DOI: 10.18698/2309-3684-2020-1-2844

# Влияние чисел Рэлея, Прандтля и граничных условий на конвективные течения жидкости в горизонтальных слоях

© А.И. Федюшкин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

*В работе рассмотрено две задачи о тепловой конвекции несжимаемой жидкости в вытянутом по горизонтали слое: с боковым подводом тепла, а также с подогревом горизонтального слоя снизу — задачи Рэлея-Бенара. Рассмотрено влияние граничных условий и чисел Прандтля на структуру конвективного течения и распределение температуры. Решения данных задач получены с помощью численного моделирования. Моделирование основано на численном решении системы нестационарных 2D уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, а также для задачи Рэлея-Бенара для случая двухфазной системы «газ–жидкость». Решение уравнений Навье-Стокса осуществлялось двумя численными методами: методом конечных разностей и методом контрольных объемов. Для верификации модели результаты расчетов, полученные разными численными методами, сравнивались между собой, а также сравнивались с экспериментальными данными. В работе приведены результаты численного моделирования конвективных течений и тепломассопереноса в горизонтальных слоях жидкости при разных определяющих безразмерных параметрах и граничных условиях. Показаны нелинейные особенности конвективных течений в горизонтальных слоях жидкости, в частности, возникновение внутри слоя противотока – течения жидкости с направлением противоположным основному конвективному течению. Рассмотрено влияние граничных условий и чисел Рэлея и Прандтля на существование противотоков. Проведено моделирование конвективного течения жидкости в горизонтальном слое при подогреве сбоку при малых числах Прандтля, а также при числе Прандтля равном нулю. Результаты моделирования показали, что для ламинарных режимов конвекции (при числах Рэлея равных или больших 105) течения при малых числах Прандтля (меньше 10–2) качественно отличаются от течения жидкости с нулевым числом Прандтля, поэтому приближение нулевого значения числа Прандтля не всегда может быть корректным. Показано, что в длинных горизонтальных слоях только тепловая ламинарная конвекция (без наличия примесей и концентрационной конвекции) способна создавать устойчивую вертикальную стратификацию жидкости по плотности и, как следствие, возникновение слоистых структур.*

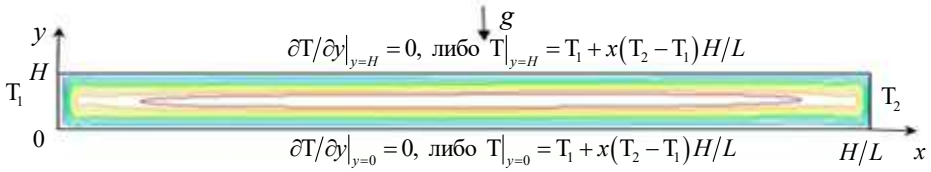
***Ключевые слова:*** *численное моделирование, конвекция, противотоки, граничные условия, структура течения*

**Введение.** В работе представлены результаты численного решения задачи о тепловой конвекции несжимаемой жидкости в вытянутом по горизонтали слое с боковым подводом тепла при различных граничных условиях и числах Прандтля, а также задачи Рэлея-Бенара с

подогревом горизонтального слоя снизу. Данные задачи характеризуются тремя безразмерными числами Рэлея ( $Ra$ ), Прандтля ( $Pr$ ) и отношением сторон слоя ( $L/H >> 1$, где $L$ и $H$ — длина и высота слоя, соответственно) и граничными условиями. Также рассмотрены течения в двухслойной системе вода–воздух при подогреве снизу и при изменении силы тяжести. Задача с боковым подогревом отличается от задачи Рэлея-Бенара тем, что конвективное течение теряет устойчивость при сколь угодно малом значении числа Рэлея [1, 2]. Задача о конвекции жидкости в горизонтальном слое изучалась в следующих работах: аналитически в [3–5], экспериментально в [6–9] и численно в [2, 9–12]. Во многих случаях конвективные течения имеют свои особенности, которые не описываются решениями, полученными вследствие линейных приближений, и их нельзя экстраполировать из аналитических решений. В этих случаях пользуются численным моделированием. В данной работе рассматриваются особенности конвективных течений в длинных горизонтальных слоях при различных значениях чисел Рэлея, Прандтля и разных граничных условиях. Особенности стационарных течений могут заключаться, например, в образовании крупномасштабной многоячейковой структуры с определенным волновым числом и периодом [1], например, таких как показано на рисунках 9–11, либо в образовании различных стационарных горизонтальных слоистых структур течения с противотоками внутри слоя (циркуляционные течения направленные навстречу основному), как показано на рисунках 2–8. В данной работе получены результаты для различных значений чисел Рэлея, Прандтля, удлинений и типов граничных условий. Показано, что возникновение слоистых структур может быть обусловлено образованием вертикальной стратификации по плотности, которая может создаваться только тепловой конвекцией (без наличия примеси и концентрационной конвекции).

**Постановка задачи и математическая модель.** Рассматриваются задачи о тепловой конвекции несжимаемой жидкости в вытянутом по горизонтали слое (длиной $L$ и высотой $H$ ), подогреваемом сбоку либо снизу, в поле силы тяжести (с ускорением свободного падения $g$ **)**. На рис. 1 показаны: схема расчетной области, геометрия, граничные условия и результаты моделирования в виде изолиний функции тока и изотерм. При подогреве сбоку на боковых стенках заданы постоянные значения температур $T_1$ и $T_2$ ($T_1 < T_2$), для скорости — условие прилипания. На горизонтальных стенках рассмотрены случаи следующих граничных условий: для скорости — условие прилипания или условие проскальзывания (свободная поверхность), для температуры — условие теплоизоляции, либо задана температура (рис. 1). Для задачи Рэлея-Бенара, при подогреве слоя снизу, были заданы следующие граничные условия: для скорости — условие

прилипания на всех твердых границах, для температуры — на нижней стенке $T_1$, на верхней $T_2$, а на вертикальных — условие теплоизоляции.




*а*



*б*

**Рис. 1.** Схема расчетной области, граничные условия и изолинии при $Ra = 2\cdot10^5$, $Pr = 5{,}8$, $L/H = 12{,}71$, ($\partial T/\partial y|_{y=0,H=0} = 0$):
*а* — функции тока; *б* — изотермы

**Математическая модель.** Математическая модель основана на системе нестационарных 2D уравнений Навье-Стокса для естественной конвекции несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска (1–4):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_1} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) + F_1, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_2} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + F_2, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_1\frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial T}{\partial x_2} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x_2}\right), \qquad (4)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$ — горизонтальные и вертикальные декартовы координаты, $u_1 = v_x$, $u_2 = v_y$ — компоненты вектора скорости $\mathbf{u}(u_1, u_2)$, $t$ — время, $T$ — температура, $P$ — давление, $\rho$ — плотность, $\mathbf{F}(F_1, F_2)$ —вектор внешних сил (в частности, для горизонтального

слоя с однофазной жидкостью: $F_1 = g\beta_T(T - T_1)$, $F_2 = 0$), $g$ — гравитационное ускорение свободного падения Земли, $\beta_T$, $\nu$, $a$ — коэффициенты температурного расширения жидкости, кинематической вязкости и теплопроводности, соответственно.

Уравнения (1–4) можно записать в переменных функция тока $\psi$, завихренность $\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$, температура $T$:

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \; u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = -\omega, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right). \tag{8}$$

Для описания двухфазной системы «газ–жидкость» можно использовать систему уравнений (1–4) с одним уравнением для переноса импульса в предположении модели «смеси» с усреднёнными скоростями $\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_{gas} + (1-\varepsilon)\mathbf{u}_{liquid}$, плотностью $\rho = \varepsilon \rho_{gas} + (1-\varepsilon)\rho_{liquid}$, вязкостью $\nu = \varepsilon \nu_{gas} + (1-\varepsilon)\nu_{liquid}$ и температуропроводностью $a = \varepsilon a_{gas} + (1-\varepsilon)a_{liquid}$, где величины с индексом $gas$ относятся к газу, а с индексом $liquid$ — к жидкости. Объемная доля жидкости $\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$ определяется из решения уравнения переноса:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} = 0.$$

Граничные условия на поверхности раздела «жидкость–воздух» — это условия равновесия поверхностных сил и давления:

$$(P_1 - P_2 + \sigma\kappa)\mathbf{n}_i = (\tau_{1ik} - \tau_{2ik})\mathbf{n}_k + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, \tag{9}$$

где $P_1$, $P_2$ — давление жидкости и газа, $\sigma$ — коэффициент поверхностного натяжения, $\kappa = 1/R_1 + 1/R_2$ — кривизна поверхности, $R_1$, $R_2$ — радиусы кривизны для жидкости и газа, $\mathbf{n}_\alpha$ — единичный

вектор нормали, $\tau_{\alpha ij} = \rho_\alpha \nu_\alpha \left( \frac{\partial \mathrm{u}_i}{\partial \mathrm{x}_j} + \frac{\partial \mathrm{u}_j}{\partial \mathrm{x}_i} \right)_\alpha$ — тензор вязких напряжений, индекс $\alpha$ обозначает: $\alpha = 1$ — жидкость, $\alpha = 2$ — воздух.

На твердых границах принято условие прилипания, на свободной границе ставится условие отсутствия трения, а на границе двухфазной системы «жидкость–воздух» учитывается кривизна поверхности и силы поверхностного натяжения.

При обезразмеривании уравнений (1–4) и (5–8) использовались следующие масштабы: длина — $H$, скорость — $\nu / H$, время — $H^2 / \nu$, $\Delta \mathrm{T} = \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1$ — масштаб температуры.

Систему уравнений (5–8) можно записать в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathrm{x}_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathrm{x}_2^2} = -\omega, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x_2}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} \right), \tag{12}$$

где в уравнениях (10–12) курсивом обозначены безразмерные величины размерных параметров и функций системы уравнений (5–8), $\theta = (\mathrm{T} - \mathrm{T}_1) / \Delta \mathrm{T}$ — безразмерная температура, $Ra = \frac{\mathrm{g}\beta_\mathrm{T} (\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) H^3}{\nu \mathrm{a}}$ — число Рэлея, $Pr = \frac{\nu}{\mathrm{a}}$ — число Прандтля.

**Численные методы решения задачи.** Результаты, представленные в данной работе, были получены разными численными методами: конечноразностным скалярным (МКР) [2, 9, 13], матричным конечноразностным (ММКР) [15, 16] и методом контрольных объемов (МКО) [19].

МКР метод применялся для решения уравнений Навье-Стокса, записанных в двух–полевом $(\omega - \psi)$ виде (10–12). При решении уравнений Навье-Стокса использовалось два конечноразностных метода, первый — это МКР со схемой переменных направлений с монотонизацией по методу А.А. Самарского, с аппроксимацией пространственных слагаемых второго порядка точности направленными разностями и временной производной первого порядка [13]. Граничные условия на твердой стенке для завихренности определялись по методу Грязнова-Полежаева [14]. Используемый здесь численный метод МКР,

описан и применялся в работах [2, 9, 13]. Второй используемый метод — это ММКР полностью неявный матричный метод с линеаризацией разностных уравнений по методу Ньютона [15]. В данном методе аппроксимация вихря на твердой границе осуществлялась по формуле Вудса. Данный полностью неявный метод был предложен авторами работы [16] и позволяет увеличить шаг по времени в сравнении с неявными методами. В работе [16] совместно решались только два уравнения (10–11) относительно вектора $(\omega,\psi)$. В данной работе, как и в работе [15], уравнения (10–12) решались матрично относительно вектора $(\omega,\psi,\theta)$, что позволило при больших шагах по времени повысить устойчивость численного метода решения уравнений конвекции по сравнению с [16].

Для решения уравнений системы уравнений в естественных переменных (1–4) использовался консервативный метод контрольных объёмов МКО, изложенный в работе [19].

При решении задачи Рэлея-Бенара с двухфазной системой «жидкость–газ» условие (9) на межфазной границе учитывалось через дополнительную локальную силу в слагаемом **F** в правой части уравнения переноса импульса (1–2), действующую только в узкой зоне интерфейса [20]. Для определения межфазной границы применялся VOF (Volume Of Fluid) метод [20] с использованием методики повышенной точности, предложенной в [21]. Более подробное описание двухфазной модели и методов решения можно найти в работах [17–21].

Результаты расчетов, полученные разными методами, сравнивались между собой, а также сравнивались с экспериментальными данными [9], расхождение экспериментальных и расчетных локальных значений скорости и температуры не превосходило 3–5% (рис. 3).

**Результаты численного моделирования. Горизонтальный слой, подогреваемый сбоку.** Результаты задач осуществлялось на основе численного решения нестационарных уравнений на установление, начиная с начальных данных, соответствующих покою и теплопроводностному распределению температуры. Представлен анализ результатов ламинарного конвективного теплопереноса в горизонтальном слое для умеренных чисел Рэлея ( $Ra$ <$10^9$) на установившемся стационарном либо квазистационарном режиме при подогреве слоя сбоку или снизу, заполненном водой, а также результаты для двухслойной системы «вода–воздух», подогреваемой снизу.

Влияние числа Рэлея на структуру течения при одинаковых параметрах можно увидеть, сравнив результаты для воды при $Ra = 2\cdot10^5$ (рис. 1) и при $Ra = 5{,}8\cdot10^8$ (рис. 2–5). При $Ra = 2\cdot10^5$ ($Pr = 5{,}8$, $L/H = 12{,}71$) структура течения имеет еще одновихревой характер, описываемый аналитически [3,4], хотя изотермы уже искривлены

течением и распределение температуры по длине слоя отлично от теплопроводностного (безконвективного) вида.

При $Ra = 2 \cdot 10^5$ течение имеет одновихревую структуру, которая начинает изменяться при $Ra > 106$ с образованием противотоков внутри слоя (рис. 2, 3). На рис. 3 приведено сравнение результатов расчета с экспериментальными данными [9]. При увеличении числа Рэлея интенсивность и количество вторичных течений (противотоков) в центре слоя увеличивается рис. 4, 5а.

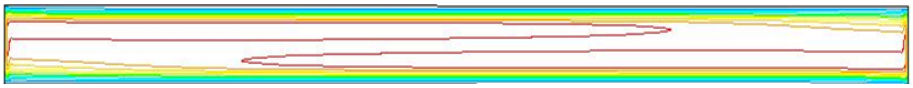


**Рис. 2**. Изотермы (вверху) и изолинии функции тока (внизу) при $Ra = 1,2 \cdot 10^8,\ Pr = 5,8,\ L/H = 12,71,\ (\partial T/\partial y|_{y=0,H=0} = 0)$

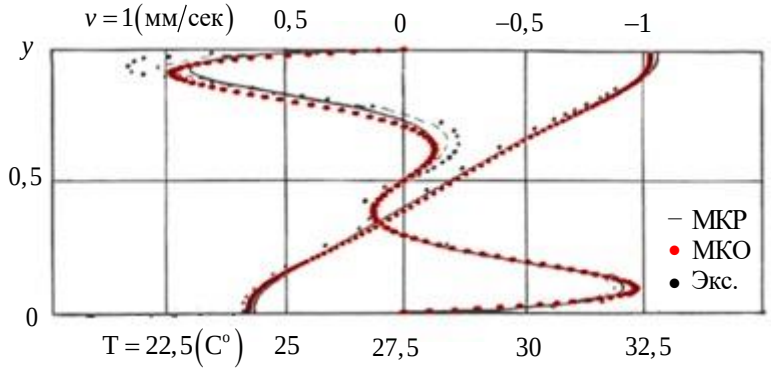



**Рис. 3.** Профили скорости и температуры в среднем вертикальном сечении, полученные методами МКР и МКО в сравнении с экспериментальными данными [9]:
$Ra = 1,2 \cdot 10^8,\ Pr = 5,8,\ L/H = 12,71,\ (\partial T/\partial y|_{y=0,H=0} = 0)$

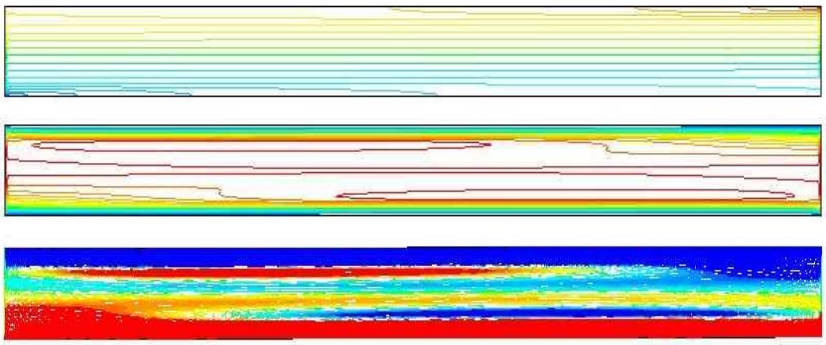


**Рис. 4.** Изотермы, изолинии функции тока и треки (цветом показана скорость) при $Ra = 10^9,\ Pr = 5,8,\ L/H = 12,71,\ (\partial T/\partial y|_{y=0,H=0} = 0)$

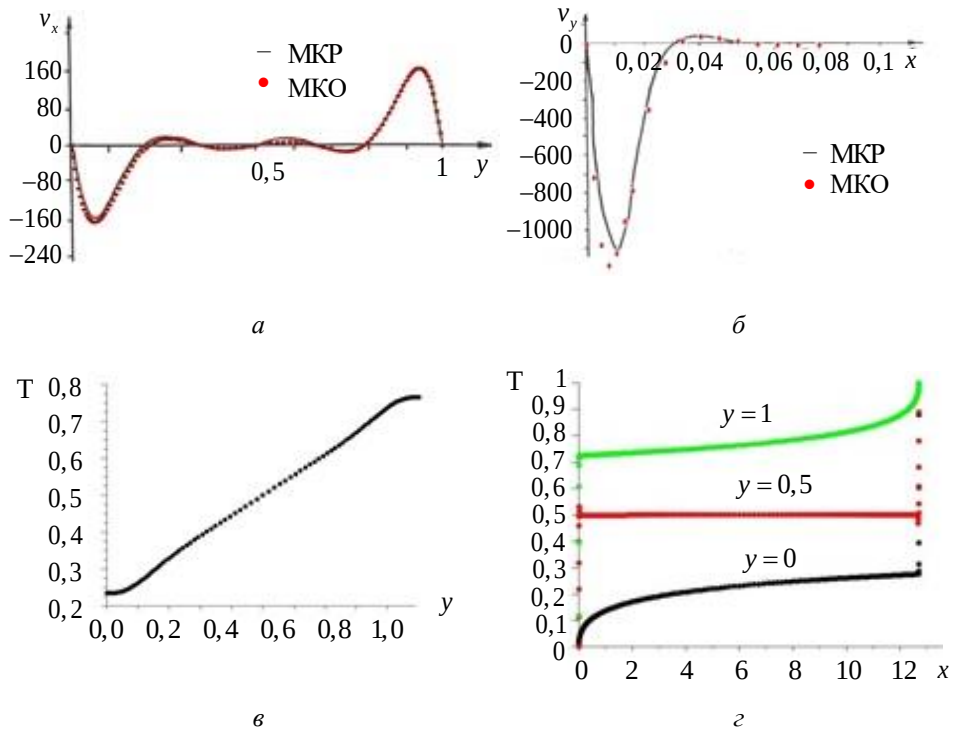
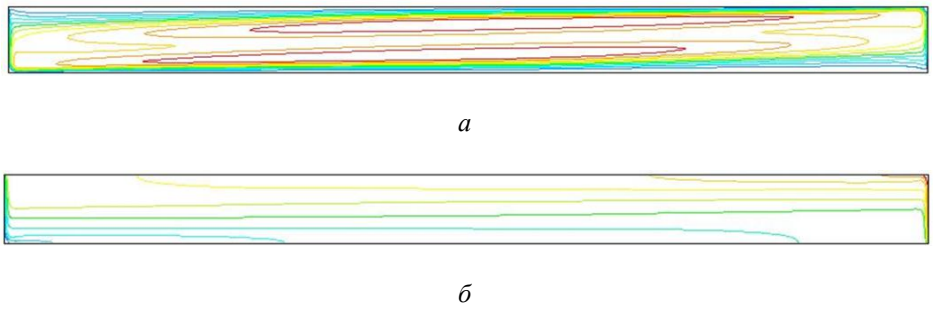



**Рис. 5.** Профили переменных при $Ra = 10^9$, $Pr = 5{,}8$, $L/H = 12{,}71$:
*а, б* — скорости в среднем вертикальном сечении слоя;
*в, г* — профили температуры

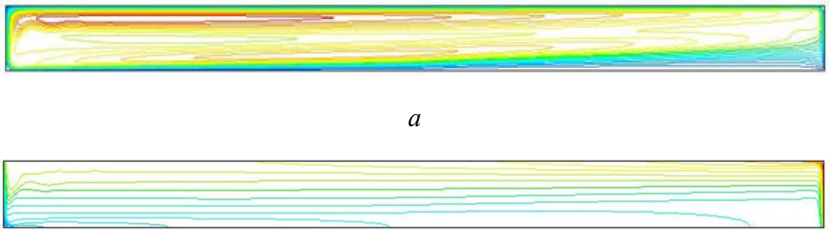
На рис. 6 представлены результаты моделирования течения жидкости с числом Прандтля меньше единицы ($Ra = 1{,}7 \cdot 10^7$, $Pr = 0{,}1$, $L/H = 12{,}71$). Наличие слоистой структуры с противотоками просматривается более четко, чем при больших числах Прандтля.



*а*

*б*

**Рис. 6**. Изолинии параметров в слое с твердой верхней границей при $Ra = 1{,}7 \cdot 10^7$, $Pr = 0{,}1$, $L/H = 12{,}71$, ($\partial T/\partial y|_{y=0,H=0} = 0$):
*а* — функции тока; *б* — изотермы



*а*

*б*

**Рис. 7.** Изолинии параметров в слое со свободной верхней границей ( $y=1$) при $Ra=1,7\cdot10^7$, $Pr=0,1$, $L/H=12,71$, ($\partial T/\partial y|_{y=0,H=0}=0$):
*а* — функции тока; *б* — изотермы

Если горизонтальная граница свободная, то это сказывается на симметрии течения в слое, но не оказывает влияния на появление вторичных течений рис. 7. На рис. 8 представлены профили безразмерных скоростей в среднем вертикальном сечении для случаев твердой верхней границы (красная линия 1) и для случая свободной верхней границы (черная линия 2) ($Ra=1,7\cdot10^7$, $Pr=0,1$, $L/H=12,71$) при теплоизолированных горизонтальных границах $\partial T/\partial y|_{y=0,H=0}=0$.

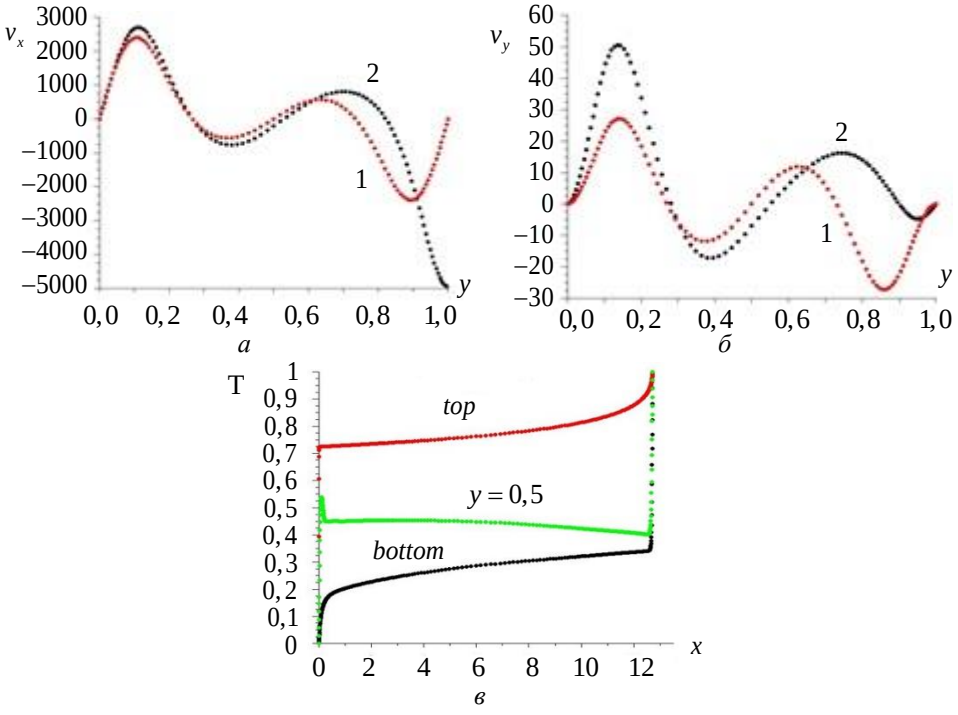


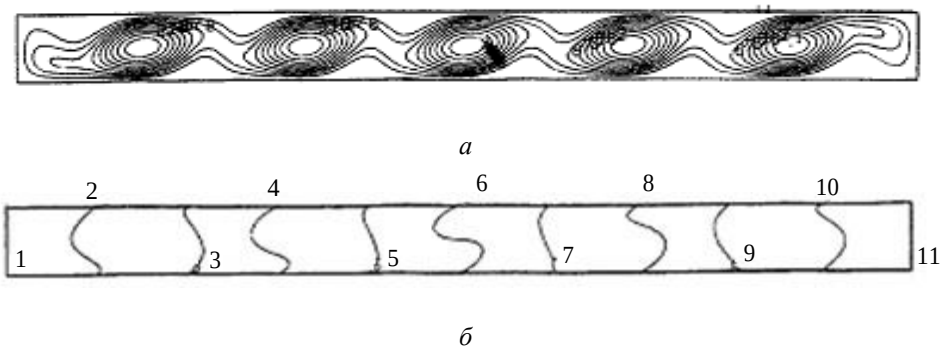

**Рис. 8.** Профили компонент скорости при $Ra=1,7\cdot10^7$, $Pr=0,1$, $L/H=12,71$, ($\partial T/\partial y|_{y=0,H=0}=0$):
*а, б* — в среднем вертикальном сечении при свободной и твердой верхней границы слоя;
*в* — горизонтальные профили температуры для случая свободной верхней границы

Результаты моделирования показали, что конвективные противотоки существуют, как в случае наличия свободной границы, так и в случае, если жидкости обладают малыми числами Прандтля.

При числах Прандтля меньше единицы толщина температурного слоя становится больше динамического, а безразмерное характерное динамическое время становится больше температурного. По этим причинам интенсивность противотока увеличивается, и они становятся более заметными.

Проведено моделирование конвективного течения жидкости в горизонтальном слое при подогреве сбоку при малых числах Прандтля, а также при числе Прандтля равном нулю. При числе Прандтля равном нулю поле температуры остается неизменным (с линейным распределением по горизонтали). Структура конвективного течения до значений чисел Рэлея $Ra = 10^9$ остается одновихревой (со вторичными вихрями в углах слоя) и практически стационарной. При значении Прандтля равном $Pr = 10^{-2}$ и при числе Рэлея равном $Ra = 2 \cdot 10^5$ течение и поле температур уже принимают колебательный характер во времени. Результаты моделирования показали, что для ламинарных режимов конвекции (при числах Рэлея равных или больших $Ra = 2 \cdot 10^5$) течения при числах Прандтля меньше $Pr \le 10^{-2}$ качественно отличаются от течения жидкости с нулевым числом Прандтля, поэтому приближение нулевого значения числа Прандтля не всегда может быть корректным.

Кроме этого, при фиксированном профиле температуры на горизонтальных границах структура течения приобретает многоячейковый характер, как изображено на рис. 9. Расчеты показали, что многоячейковая (валиковая) конвективная структуры течения жидкости меняет тепломассоперенос вдоль слоя. Распределение температуры вдоль слоя имеет периодический характер, и массоперенос вдоль слоя затрудняется.




*а*

*б*

**Рис. 9.** Параметры функции тока (б) при $Ra = 2 \cdot 10^5$, $Pr =$ 0,01, $L / H = 12,71$, ($T|_{y=0, y=H} = T_1 + x(T_2 - T_1)H / L$):
*а* — изотермы; *б* — изолинии

Результаты моделирования показали, что конвективные противотоки существуют, как в случае наличия свободной границы, так и в случае, если жидкости обладают малыми числами Прандтля.

При числах Прандтля меньше единицы толщина температурного слоя становится больше динамического, а безразмерное характерное динамическое время становится больше температурного. По этим причинам интенсивность противотока увеличивается, и они становятся более заметными.

Проведено моделирование конвективного течения жидкости в горизонтальном слое при подогреве сбоку при малых числах Прандтля, а также при числе Прандтля равном нулю. При числе Прандтля равном нулю поле температуры остается неизменным (с линейным распределением по горизонтали). Структура конвективного течения до значений чисел Рэлея $Ra = 10^9$ остается одновихревой (со вторичными вихрями в углах слоя) и практически стационарной. При значении Прандтля равном $Pr = 10^{-2}$ и при числе Рэлея равном $Ra = 2 \cdot 10^5$ течение и поле температур уже принимают колебательный характер во времени. Результаты моделирования показали, что для ламинарных режимов конвекции (при числах Рэлея равных или больших $Ra = 2 \cdot 10^5$) течения при числах Прандтля меньше $Pr \le 10^{-2}$ качественно отличаются от течения жидкости с нулевым числом Прандтля, поэтому приближение нулевого значения числа Прандтля не всегда может быть корректным.

Кроме этого, при фиксированном профиле температуры на горизонтальных границах структура течения приобретает многоячейковый характер, как изображено на рис. 9. Расчеты показали, что многоячейковая (валиковая) конвективная структуры течения жидкости меняет тепломассоперенос вдоль слоя. Распределение температуры вдоль слоя имеет периодический характер, и массоперенос вдоль слоя затрудняется.

**Горизонтальный слой, подогреваемый снизу (задача Рэлея–Бенара).** При подогреве горизонтального слоя снизу, конвективное течение возникает при превышении градиента температуры на нагреваемой поверхности выше критического. На начальном этапе прогрева однородно нагретой жидкости происходит только за счет теплопроводности (диффузия тепла), без конвекции. Затем на нагреваемой стенке градиент температуры увеличивается и при превышении порогового значения (критического числа Рэлея) возникает конвективное перемешивание с упорядоченной валиковой структурой с волновым числом $\pi / \sqrt{2}$ и относительной шириной равной $\sqrt{2}$ [4]. Данная задача является известной классической задачей Рэлея-Бенара, аналитическое решение которой получено для слоя со свободными границами. Критическое число Рэлея зависит от типа граничных условий и может изменяться от 657 до 1708 [4].

Рассмотрена задача о тепловой конвекции вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной замкнутой области с теплоизолированными вертикальными стенками и с заданными температурами на горизонтальных границах. Горизонтальные и вертикальные безразмерные длина и высота области равны $L=10,\ H=1$. При решении задачи используются уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска (1–3). Для скорости на всех границах ставились условия прилипания: $u(t,x,0)=u(t,x,H)=u(t,0,y)=u(t,L,y)=0$. Для температуры задавались следующие условия: правая и левая границы –адиабатические, нижняя и верхняя границы — изотермические: $\mathrm{T}(t,0,y)=1$, $\mathrm{T}(t,L,y)=0$, $d\mathrm{T}/dx(t,x,0)=d\mathrm{T}/dx(t,x,H)=0$. В качестве начальных условий задавались условия неподвижной жидкости с линейным распределением температуры $u(0,x,y)=0$, $\mathrm{T}(0,x,y)=1-y$.

На рис. 10 представлены изолинии функции тока (слева) и изотермы (справа) для $Ra=3\cdot10^3,\ 5\cdot10^3,\ 10^4,\ 10^5$ (сверху вниз), $Pr=1$, $L/H=10$, при подогреве слоя снизу.

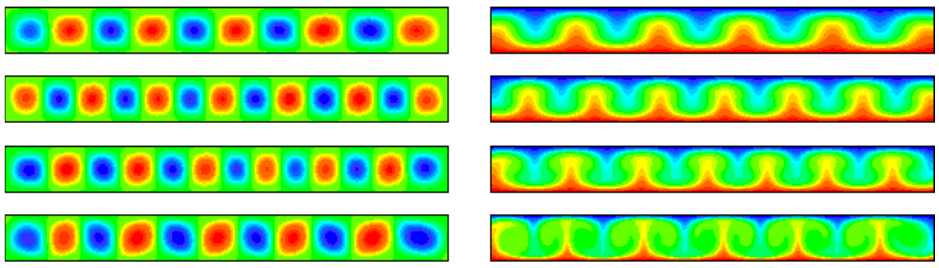


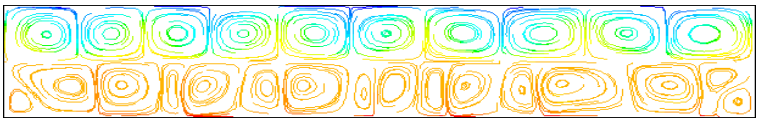
**Рис. 10.** Изолинии функции тока (слева) и изотермы (справа) для $Ra=3\cdot10^3,\ 5\cdot10^3,\ 10^4,\ 10^5$ (сверху вниз), $Pr=1,\ L/H=10$

Такое же явление возникновения упорядоченной конвективной структуры происходит и при подогреве снизу двухслойной системы, например, «вода–воздух». В данной работе также была рассмотрена задача о тепловой конвекции в двухслойной системе «вода-воздух» в прямоугольной замкнутой области с теплоизолированными вертикальными стенками и с заданными температурами на горизонтальных границах. Горизонтальные и вертикальные размеры области соответственно равны: $L=10$ см, $H=2$ см.

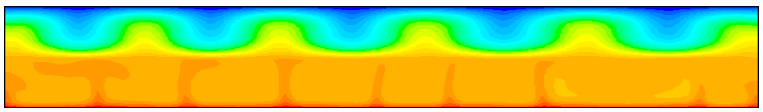
Область была снизу на половину заполнена водой, а сверху воздухом. Модель основана на решении системы уравнений Навье-Стокса для двухслойной системы (1–3). В модели для скорости на всех границах ставилось условие прилипания:

$$u(t,x,0)=u(t,x,H)=v(t,0,y)=u(t,L,y)=0.$$

Для температуры задавались такие условия: правая и левая границы — теплоизолированные, нижняя и верхняя границы – изотермические: $\mathrm{T}(t,0,y)=1$, $\mathrm{T}(t,H,y)=0$, $d\mathrm{T}/dx(t,x,0)=d\,\mathrm{T}/dx(t,x,H)=0$. В начальный момент жидкость («вода – воздух») предполагалась неподвижной с линейным распределением температуры: $u(0,x,y)=0$, $\mathrm{T}(0,x,y)=1-y/2$. На рис. 11 представлены изолинии функции тока (рис.11а) и изотермы (рис. 11б) для $Pr=1$, $L/H=10$, при подогреве слоя снизу двухслойной системы «вода–воздух» (перепад температур между верхней и нижней границами был равен 400).



*а*



*б*

**Рис. 11.** Треки движения воздуха и воды (цветом показана температура (*а*), изотермы (*б*)

Численные решения задачи Рэлея – Бенара в замкнутых областях (рис. 10, рис. 11) продемонстрировали формирование упорядоченных периодических структур конвективного течения с шагом приблизительно равным $\sqrt{2}$, что согласуется с аналитическим решением [1]. Критическое число Рэлея возникновения конвекции было больше 650, но меньше 1700 [4].

**Заключение.** При больших числах Рэлея структуры стационарных конвективных течений могут обладать особенностями. Это проявляется в образовании упорядоченной крупномасштабной многоячейковой структуры с определенным волновым числом и периодом, либо в образовании различных стационарных горизонтальных слоистых структур течения с противотоками внутри слоя (циркуляционные течения направленные навстречу основному).

Причинами конвективных течений с противотоками являются: во-первых, большие числа Рэлея и нелинейный характер зависимости скорости течения от температуры, во-вторых, образование устойчивой стратификации температуры (плотности) по вертикали слоя и в-третьих, влияние торцевых стенок, а также свойств жидкости (числа

Прандтля). Кроме центральной области слоя данные конвективные течения имеют сложный характер около вертикальных стенок (в зонах тонких пограничных слоев) с наличием стационарных вторичных вихрей, которые также участвуют в формировании горизонтальных противотоков. Число противотоков в горизонтальном слое, заполненном водой, при увеличении числа Рэлея ($Ra > 5 \cdot 10^8$), увеличивается (внутри противотока появляется течение с противоположным направлением).

Наводимая конвекцией устойчивая температурная стратификация по вертикали слоя с увеличением чисел Рэлея, увеличивается, что способствует затягиванию ламинарного стационарного режима конвективных течений воды вплоть до значений числа Рэлея равного $Ra = 10^9$.

С уменьшением числа Прандтля интенсивность противотоков возрастает, а их направление изменяется от горизонтального, приближаясь к диагонально-направленному.

При разных определяющих параметрах или разных граничных условиях структуры конвективного течения могут быть схожими, но при этом иметь разные механизмы массопереноса и распределения температур по объёму слоя, поскольку природа происхождения схожих конвективных структур разная.

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы АААА-А20-120011690131-7.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*. Москва, Наука, 1972, 392 с.

[2] Полежаев В.И., Белло М.С., Верезуб Н.А., Дубовик К.Г., Лебедев А.П., Никитин С.А., Павловский Д.С., Федюшкин А.И. *Конвективные процессы в невесомости.* Москва, Наука, 1991, 240 с.

[3] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О медленных течениях вязкой жидкости в замкнутой области. *сборник "Гидродинамика"*, 1970, выпуск 2, с. 207–217.

[4] Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости. *Прикладная механика и техническая физика*, 1966, номер 3, с. 69–72.

[5] Cormack D. E., Leal L.G., Imberger J. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Pt. 1, Asymptotic theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 1974, vol. 65, pp. 209–229.

[6] Зимин В.Д., Ляхов Ю.Н., Шайдуров Г.Ф. Экспериментальное изучение поля температуры при естественной конвекции жидкости в замкнутой прямоугольной полости. *сборник "Гидродинамика"*, 1971, вып. 3, с. 126–138.

[7] Bejan A., Al-Homoud A.A., Imberger J. Experimental study of high Rayleigh number convection in a horizontal cavity with different end temperatures. *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, vol. 109, pp. 283–299.

[8] Кирдяшкин А.Г. *Тепловые гравитационные течения и теплообмен в астеносфере*. Новосибирск, «Наука» Сибирское отделение, 1989, 81 с.

[9] Кирдяшкин А. Г., Полежаев В. И., Федюшкин А. И. Тепловая конвекция в горизонтальном слое при боковом подводе тепла. *Прикладная механика и техническая физика*, 1983, № 6, с. 122–128.

[10] Drummond J.E., Korpella S.A. Natural convection in a shallow cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, vol. 182, pp. 543–564.

[11] Cormack D.E., Leal L.G., Seinfield J.H. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Pt. 2. Numerical solutions. *Journal of Fluid Mechanics*, 1974, vol. 65, pp. 231–246.

[12] Федюшкин А.И., Пунтус А.А., Нелинейные особенности ламинарных течений жидкости на Земле и в невесомости. *Труды МАИ*, 2018, № 102, с. 1–20.

[13] Полежаев В.И., Бунэ А.В., Верезуб Н.А. и др. *Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса.* Москва, Наука, 1987, 272 с.

[14] Полежаев В.И., Грязнов В.Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье–Стокса в переменных «вихрь, функция тока». *Доклады Академии наук СССР*, 1974, т. 219, № 2, с. 301–304.

[15] Федюшкин А.И. *Исследование матричного метода решения уравнений конвекции. Комплекс программ «МАРЕНА».* Москва, ИПМ АН СССР, 1990, 32 с.

[16] Мажорова О.С., Попов Ю.П. Матричный итерационный метод численного решения двумерных уравнений Навье–Стокса. *Доклады Академии наук СССР*, 1981, т. 259, № 3, с. 64–81.

[17] Федюшкин А.И., Рожков А.Н. Растекание капель при ударе о твердые поверхности. *Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции,* 2018, с. 966–977.

[18] Федюшкин А.И., Рожков А.Н. Численное моделирование коалесценции капель. *Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции,* 2018, с. 978–986.

[19] Патанкар С. *Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.* Москва, Энергоатомиздат, 1984, 152 с.

[20] Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C. A Continuum Method for Modeling Surface Tension. *Journal of Computational Physics*, 1992, vol. 100, pp. 335–354.

[21] Muzaferija S., Peric M., Sames P., Schellin. T. A Two-Fluid Navier-Stokes Solver to Simulate Water Entry. *In Proc. 22nd Symposium on Naval Hydrodynamics*, 1998, pp. 277–289.

Статья поступила в редакцию 14.01.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Федюшкин А.И. Влияние чисел Рэлея, Прандтля и граничных условий на конвективные течения жидкости в горизонтальных слоях. *Математическое моделирование и численные методы.* 2020. № 1. с. 28–44.

**Федюшкин Алексей Иванович —** канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. e-mail: fai@ipmnet.ru

# Influence of Rayleigh, Prandtl numbers and boundary conditions on convective fluid flows in horizontal layers

© A.I. Fedyushkin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526, Russia

*The paper considers two problems of thermal convection of an incompressible liquid in a horizontally extended layer: with lateral heat supply and with heating of the horizontal layer from below-the Rayleigh-Benard problem. An influence of boundary conditions and Prandtl numbers on the convective flow structure and temperature distribution is considered. The solutions of these problems are obtained using numerical modeling. The simulation is based on the numerical solution of a system of non-stationary 2D Navier-Stokes equations for an incompressible fluid, as well as for the Rayleigh-Benard problem for the case of a two-layers gas-liquid system. Navier-Stokes equations are solved using two numerical methods: the finite difference method and the control volume method. To verify the models, the results of calculations obtained by different numerical methods were compared with each other and compared with experimental data. The paper presents the results of numerical simulation of convective flows and heat and mass transfer in horizontal liquid layers under different defining dimensionless parameters and boundary conditions. The non-linear features of convective flows in horizontal liquid layers are shown, in particular, the occurrence of a counter-flow inside the layer-a liquid flow with a direction opposite to the main convective flow. The influence of boundary conditions and Rayleigh and Prandtl numbers on the existence of a countercurrent is considered. A simulation of the convective flow of a liquid in a horizontal layer when heated from the side at small Prandtl numbers, as well as at a Prandtl number equal to zero, is performed. The simulation results showed that for laminar convection (the Rayleigh number is greater than $10^5$), the flow with Prandtl numbers equal to or less than $10^{-2}$ is qualitatively different from the flow of a liquid with a zero Prandtl number. Therefore, the approximation of the zero value of the Prandtl number may not always be correct. Nonlinear peculiarities of convective flows in horizontal liquid layers are presented. It is shown that in long horizontal layers laterally heated only by thermal laminar convection (without the presence of impurities and concentration convection), it is possible to create a stable vertical density stratification of the fluid and, as a result, lead to the appearance of layered structures.*

***Keywords**: numerical simulation, convection, counter flow, boundary conditions, the structure of the flow*

REFERENCES

[1] Gershuni G.Z., Zhukhovsitskii E.M. *Konvektivnaya ustoychivost' neszhimayemoy zhidkosti* [Convective Stability of an Incompressible Liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 392 p.

[2] Polezhaev V.I., Bello M.S., Verezub N.A., Dubovik K.G., Lebedev A.P., Nikitin S.A., Pavlovskii D.S., Fedyushkin A.I. *Konvektivnyye protsessy v nevesomosti* [Convective Processes in Weightlessness]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 240 p.

[3] Gershuni G.Z., Zhukhovitsky E.M. *Sbornik "Gidrodinamika" — collection "Hydrodynamics"*,1970, iss. 2, pp. 207–217.

[4] Birikh R.V. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika — Applied Mechanics and Technical Physics*,1966, no. 3, pp. 43–47.

[5] Cormack D. E., Leal L.G., Imberger J. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Pt. 1, Asymptotic theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 1974, vol. 65, pp. 209–229.

[6] Zimin V. D., Lyakhov Yu. N., Shaidurov G. F. *Sbornik "Gidrodinamika" — Collection "Hydrodynamics"*, 1971, iss. 3, pp. 126–138.
[7] Bejan A., Al-Homoud A.A., Imberger J. Experimental study of high Rayleigh number convection in a horizontal cavity with different end temperatures. *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, vol. 109, pp. 283–299.
[8] Kirdyashkin A.G. *Teplovyye gravitatsionnyye techeniya i teploobmen v astenosfere* [Thermal gravitational flows and heat transfer in the asthenosphere]. Novosibirsk, «Nauka» Siberian branch Publ., 1989, 81 p.
[9] Kirdyashkin A.G., Polezhaev V.I., Fedyushkin A.I. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika — Applied Mechanics and Technical Physics*, 1983, no. 6., pp. 122–128.
[10] Drummond J.E., Korpella S.A. Natural convection in a shallow cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, vol. 182, pp. 543–564.
[11] Cormack D.E., Leal L.G., Seinfield J.H. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Pt. 2. Numerical solutions. *Journal of Fluid Mechanics*, 1974, vol. 65, pp. 231–246.
[12] Fedyushkin A. I., Puntus A. A. *Trudy MAI — Trudy MAI*, 2018, vol.102, pp. 1–20.
[13] Polezhaev V.I., Bune A.V., Verezub N.A., and others. *Matematicheskoye modelirovaniye konvektivnogo teplomassoobmena na osnove uravneniy Nav'ye-Stoksa* [Mathematical modeling of convective heat and mass transfer based on Navier-Stokes equations]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 272 p.
[14] Polezhaev V. I., Gryaznov V. L. *Doklady Akademii nauk SSSR — Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1974, vol. 219, no. 2, pp. 301–304.
[15] Fedyushkin A. I. *Issledovaniye matrichnogo metoda resheniya uravneniy konvektsii. Kompleks programm «MARENA»* [Research of a matrix method for solving convection equations. Complex of programs "MARENA"]. Moscow, IPM of the USSR Academy of Sciences Publ., 1990, 32 p.
[16] Mazhorova O.S., Popov Yu.P. *Doklady Akademii nauk SSSR — Proceedings of the USSR Academy of Sciences*,1981, vol. 259, no 3, pp. 64–81.
[17] Fedyushkin A.I., Rozhkov A.N. S*preading of drops on impact on solid surfaces. Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics. Proceedings of the International scientific conference*. 2018, pp. 966–977.
[18] Fedyushkin A.I., Rozhkov A.N. *Numerical modeling of droplet coalescence. Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics. Proceedings of the International scientific conference.* 2018, pp. 978-986.
[19] Patankar S.V. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti* [Numerical Heat Transfer and Fluid Flow]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984. 152 p.
[20] Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C. A. Continuum Method for Modeling Surface Tension. *Journal of Computational Physics*, 1992, vol. 100, pp. 335–354.
[21] Muzaferija S., Peric M., Sames P., Schellin. T. A Two-Fluid Navier-Stokes Solver to Simulate Water Entry. *In Proc. 22nd Symposium on Naval Hydrodynamics*, 1998, pp. 277–289.

**Fedyushkin A.I.**, Cand. Sc. (Phys. — Math.), Senior researcher of Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS. e-mail: fai@ipmnet.ru