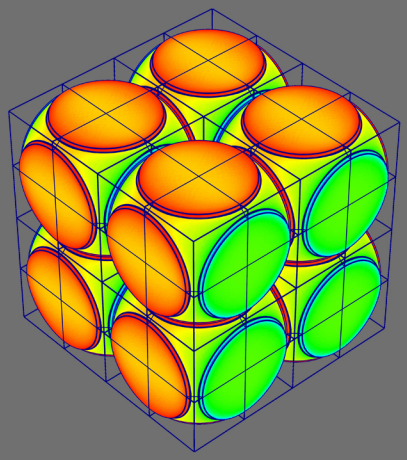
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Боровин Г.К., Захваткин М.В., Степаньянц В.А., Усовик И.В. Статистическая модель распределения космических объектов в пространстве орбитальных параметров. Математическое моделирование и численные методы, 2019, № 4, с. 69–90.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/209/

Параметры загрузки:
IP: 3.41.188.32
17.11.2026 07:22:32

УДК 521.3:521.6 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-4-6990

Статистическая модель распределения космических объектов в пространстве орбитальных параметров

© Г.К. Боровин[1,3], М.В. Захваткин[1], В.А. Степаньянц[1], И.В. Усовик[2]

[1]ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия
[2]ФГУП ЦНИИмаш, Московская область, Королев, 141070, Россия
[3]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена статистическая модель заполнения космического пространства объектами техногенного происхождения. Модель опирается на каталог орбит космических объектов (КО), построенный на базе отечественных и иностранных источников. Для построения этой модели множество каталогизированных КО объединяются в группы по признаку близости в пространстве четырех орбитальных параметров, характеризующих большую полуось, эксцентриситет и положение плоскости орбит КО, составляющих группу. Распределение КО в каждой группе определяется математическим ожиданием и ковариационной матрицей разброса орбитальных параметров группы.

Ключевые слова: *космический объект, малоразмерная фракция, модель распределения космического мусора*

Введение. Понятие космический мусор (КМ) охватывает широкий класс космических объектов (КО) искусственного происхождения, находящихся на околоземных орбитах. При этом количество выработавших ресурс спутников, различных ступеней ракет и фрагментов, сопровождающих каждый запуск, достигло такого уровня, когда оно начинает создавать серьезную угрозу не только для пилотируемых орбитальных станций и работающих космических аппаратов (КА), но и экологии Земли и околоземного космического пространства (ОКП). Дальнейшее освоение ОКП невозможно без знания текущей обстановки, анализа источников и закономерностей эволюции КМ. Необходимо проведение наблюдений техногенных объектов. Эти наблюдения позволяют получить полноту информации по всей популяции объектов с целью решения фундаментальной задачи построения современной глобальной модели образования и эволюции всей совокупности орбитальных объектов техногенного происхождения, верификации существующих моделей, а также оценки опасности для космической деятельности со стороны космического мусора в настоящем и будущем. Основой решения этой задачи является создание банка данных по техногенным объектам и его регулярное пополнение новой измерительной и орбитальной информацией для поддержания актуального состояния и расширения состава описываемых объектов за счёт включения вновь запускаемых и вновь открываемых.

В настоящее время не существует в полной мере информации и измерительных инструментов для контроля в ОКП космического мусора фракций размеров менее 10 см. Поэтому при отсутствии детальных сведений об элементах орбит мелких объектов изучение опасности столкновений КА с ними требует применения статистического подхода. В то же время традиционный подход к изучению движения спутников — детерминированный. Он основан на интегрировании уравнений движения. Идеи детерминированного подхода в той или иной степени используются в большинстве работ. Например, в моделях НАСА и ЕКА имитируются последствия всех известных запусков и разрушений спутников, а также возможных будущих аналогичных событий. Для каждого из объектов (или группы) формируется вектор начальных условий (НУ). Прогнозирование выполняется с использованием традиционных моделей движения. Для оценки опасности столкновений пары спутников используется методика Д. Кесслера [1] или её модификации. Для множества объектов результаты суммируются. Очевидно, что такой подход очень трудоёмок и может быть реализован только на достаточно мощных ЭВМ. В то же время такой подход не снимает проблемы обеспечения адекватности модели. При этом точность моделирования последствий разрушений неизвестна. Применяемые в разных моделях оценки могут сильно различаться. Весьма сложной задачей остаётся также настройка параметров модели по имеющейся ограниченной измерительной информации.

В настоящее время под эгидой НАСА, ГК «Роскосмос», ЕКА разработаны ряд математических моделей распределения объектов космического мусора на околоземных орбитах, таких как ORDEM-2000, SPDA, MASTER и др. Данные модели позволяют рассчитать концентрацию и поток частиц космического мусора для заданных момента времени, положения в пространстве и направления подлета КМ. Результаты расчетов хорошо согласуются между собой, несмотря на разный подход к моделированию разрушений, разные способы разбиения околоземного космического пространства на области по высотам и наклонениям, а также различные пороговые значения фрагментов, для которых учитываются столкновения.

В статье предложена статистическая модель заполнения космического пространства объектами техногенного происхождения, основанная на модели SDPA [2]. Модель опирается на каталог орбит КО, построенный на базе отечественных и иностранных источников [7-16]. Для построения этой модели множество каталогизированных КО объединяются в группы по признаку близости в пространстве четырех орбитальных параметров, характеризующих большую полуось, эксцентриситет и положение плоскости орбит КО, составляющих группу. Распределение КО в каждой группе определяется математическим

ожиданием и ковариационной матрицей разброса орбитальных параметров группы.

Математическая постановка задачи, принятые допущения. Статистическая модель распределения космических объектов предназначена для описания параметров заполнения околоземного космического пространства космическими объектами, включая определение их концентрации и характеристик распределения векторов скорости их движения.

На рис. 1 схематически представлена классификация КО, использованная для построения модели космического мусора в области высоких орбит.

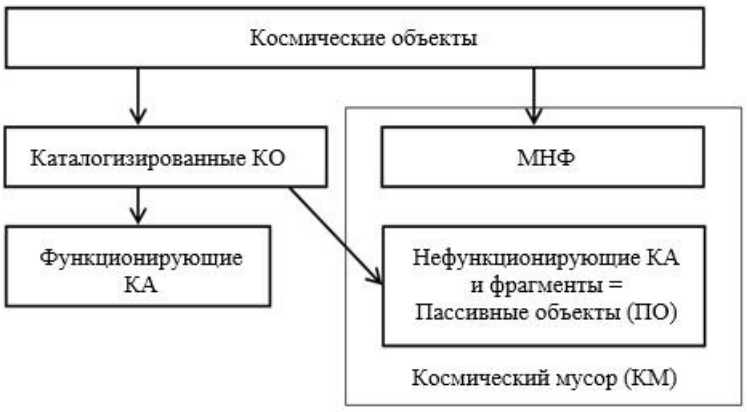


Рис. 1. Классификация КО

Рассматриваются два основных типа космических объектов:

– каталогизированные КО — обнаруженные, занесенные в каталог и регулярно наблюдаемые космические объекты, сведения о которых и их орбитальные данные периодически дополняются и обновляются;

– малоразмерная ненаблюдаемая фракция (МНФ) — объекты, размером менее 10 см.

Часть из КО, принадлежащих МНФ, фиксируются средствами наблюдения, однако организовать регулярный процесс привязки измерений, а также построения и поддержания орбиты невозможно из-за большого количества КО, ограниченной возможности наблюдения и неопределенности модели движения.

Множество каталогизированных КО, в свою очередь, делится на две части:

– функционирующие космические аппараты (КА), управляемые с Земли, способные маневрировать и проводить коррекции орбитальных параметров;

– космический мусор (КМ) – космические объекты искусственного происхождения (включая фрагменты или части таких объектов), которые закончили свое активное функционирование (далее — пассивные объекты (ПО)).

Функционирующие КА не входят в состав КМ, однако они являются его источником, поскольку КМ образуется при запусках, прекращениях активного существования и разрушениях КА. Поэтому исходные данные, необходимые для построения модели КМ, должны содержать сведения и о функционирующих КА. Модель движения функционирующих КА существенно отличается от пассивного полета КА, вышедших из строя, и их фрагментов. Как правило, они обеспечивают поддержание заданных значений одного или нескольких параметров орбиты путем периодически выполняющихся коррекций траектории КА. Выявление стратегии проведенных маневров и подготовка исходных данных для отдельно рассматриваемого КА представляет собой сложную задачу, требующую длительного наблюдения за его движением. На данном этапе исследования такая задача была поставлена и решена только для КО, образующих нефункционирующую составляющую каталога ПО и малоразмерную ненаблюдаемую фракцию КМ. Для геосинхронных объектов данные о стратегии маневрирования периодически публикуются в отчетах Европейского космического агентства (см., например, [3]). Исходными данными для построения модели распределения ПО являются начальные векторы состояния, полученные из каталога ИПМ им. М.В. Келдыша РАН на заданный момент времени – т.н. «срез каталога». Орбитальные данные каталогизированных КО постоянно обновляются. При подготовке данной статьи использовался срез каталога на 07 сентября 2016 года.

Чтобы получить возможность исследования эволюции КМ с течением времени, по полученным из базы данных орбитальным параметрам КО, было выполнено прогнозирование на 15 лет вперед на начало каждого года, с 1 января 2017 до 1 января 2031 включительно.

В качестве метода интегрирования уравнений движения КО был использован многошаговый девятистадийный предиктор-корректор метод [4]. Уравнения движения КО учитывали следующие возмущения [5, 6]:

– влияние нецентральности поля тяготения Земли до гармоники 16x16,

– гравитационное влияние Луны, Солнца,

– давление солнечного излучения,

– атмосферное торможение (на участках ниже 1.5 тыс. км над поверхностью Земли).

Как известно из [1], распределение МНФ в околоземном космическом пространстве (ОКП) связано с распределением каталогизирован-

ных КО. Поэтому в качестве исходных данных разработана модель статистического распределения орбитальных параметров каталогизированных КО, которая может использоваться наряду с результатами непосредственных наблюдений МНФ и другими доступными данными. Эта модель представляет собой плотность распределения вероятности наличия КО в заданной точке пространства орбитальных параметров.

Описание параметров статистической модели распределения космических объектов. Для построения статистической модели множество каталогизированных КО объединяются в группы по признаку близости в пространстве параметров $\mathbf{q}$. Число m таких групп выбирается в зависимости от необходимой степени детализации модели и возможностей вычислительной техники. Статистическая модель представляет собой набор точек локализации КО, которые описываются средними элементами множества КО (центр локализации) и ковариационной матрицей разбросов относительно этого центра.

В качестве орбитальных параметров $\mathbf{q}$, характеризующих распределение группы КО, используется вектор орбитального момента $\mathbf{c}\{c_x, c_y, c_z\}$ и большая полуось a орбиты КО, образующие, в совокупности, вектор $\mathbf{q}\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$. Расчет компонент вектора орбитальных параметров $\mathbf{q}$ по заданному вектору состояния КО $\mathbf{X}\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\} = \{x, y, z, v_x, v_y, v_z\}$ осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} q_1 &= c_x = yv_x - zv_y, \\ q_2 &= c_y = zv_x - xv_z, \\ q_3 &= c_z = xv_y - yv_x, \\ q_4 &= \frac{\mu}{2\frac{\mu}{r} - v^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{Q}\{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, ..., \mathbf{Q}_m\}$ — множество орбитальных элементов каталога КО, уже разделенных на m групп:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1 \cup \boldsymbol{Q}_2 ... \cup \boldsymbol{Q}_m$$

где $\boldsymbol{Q}_k \{\mathbf{q}_k^1, ..., \mathbf{q}_k^{m_k}\}$ — набор орбитальных элементов в k-й группе. В каждой группе определяются векторы средних орбитальных параметров

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{m_k} \sum_{i=1}^{m_k} \mathbf{q}_k^i,$$

где $\mathbf{q}_k^i$ — орбитальные параметры *i*-го КО в группе $\boldsymbol{Q}_k$. Если распределение по группам выполнено эффективно (то есть орбиты КО близки друг к другу по заданной норме (1), то наиболее плотно область КО каждой группы $\boldsymbol{Q}_k$ заполнена вблизи вектора средних орбитальных параметров $\hat{\mathbf{q}}_k$. Число объектов группы $\boldsymbol{Q}_k$ уменьшается по мере удаления от центра их локализации, за который принимается точка $\hat{\mathbf{q}}_k$.

Предполагается, что плотность заполнения 4-мерного пространства выбранных элементов в каждой группе $\boldsymbol{Q}_k$, $(k=1,...,m)$ распределена по нормальному закону с центром распределения $\hat{\mathbf{q}}_k$. Апостериорная оценка ковариационной матрицы $\mathbf{C}_k$ разброса орбитальных параметров $\mathbf{q}$ в группе $\boldsymbol{Q}_k$ определяется по формуле

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{M}\left[\Delta\mathbf{q}_k, \Delta\mathbf{q}_k^T\right] = \frac{1}{m_k}\sum_{i=1}^{m_k}\left[\left(\mathbf{q}_k^i - \hat{\mathbf{q}}_k\right)\left(\mathbf{q}_k^i - \hat{\mathbf{q}}_k\right)^T\right],$$

где символ $\mathbf{M}[\ ]$ используется для обозначения математического ожидания случайной величины, заключенной в квадратные скобки. В результате будут сформированы *m* векторов для центров локализации $\hat{\mathbf{q}}_1,...,\hat{\mathbf{q}}_m$ и *m* соответствующих им ковариационных матриц разброса параметров $\mathbf{C}_1,...,\mathbf{C}_m$. В совокупности эти величины составляют набор параметров модели, используя который можно определить плотность вероятности обнаружения КО в заданной точке $\mathbf{q}$ пространства параметров.

В соответствии со сделанными предположениями плотность вероятности присутствия объекта из группы $\boldsymbol{Q}_k$ в окрестности точки $\hat{\mathbf{q}}_k$ пространства орбитальных параметров определяется по формуле нормального многомерного закона распределения

$$p_k(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^4\left|\mathbf{C}_k\right|}}\exp\left[-\frac{1}{2}\Delta\mathbf{q}_k\left(\mathbf{C}_k\right)^{-1}\Delta\mathbf{q}_k^T\right],$$

где $\Delta\mathbf{q}_k = \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}_k$. В окрестности точки $\mathbf{q}$, ограниченной объемом пространства параметров $dQ = dq_1 \cdot dq_2 \cdot dq_3 \cdot dq_4$, математическое ожидание числа $n_{\mathbf{q}}^k$ объектов из группы $\boldsymbol{Q}_k$ выражается формулой

$$\mathbf{M}\left[n_{\mathbf{q}}^k\right] = \mathbf{M}\left[n_k\right]p_k(\mathbf{q})\,dQ,$$

где n_k — математическое ожидание общего числа точек в *k*-й группе.

Это число не зависит от числа объектов других групп, находящихся в окрестности dQ точки $\mathbf{q}$, поэтому плотность вероятности обнаружения в этой точке пространства КО одной из групп множества КО $\boldsymbol{Q}$ определяется формулой

$$p(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{m} p_k \left(\Delta \mathbf{q}_k\right).$$

В этом разделе был описан способ получения оценки математического ожидания и ковариационных матриц разброса точек локализации при условии, что распределение КО по группам уже проведено. Алгоритм распределения КО по группам приводится ниже.

Алгоритм распределения космических объектов по группам. Входной информацией для алгоритма служит набор орбитальных параметров каталогизированных объектов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_n$, которые необходимо распределить по группам. Алгоритм распределяет КО на непересекающиеся группы, определяет положение центров локализации по признаку близости объектов группы к центрам их локализации. Результатом работы алгоритма является набор m центров локализации КО $\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2, ..., \hat{\mathbf{q}}_m$ и соответствующий набор ковариационных матриц разброса параметров $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, ..., \mathbf{C}_m$ относительно этих центров. В общих чертах схему работы алгоритма можно описать следующим образом:

1. выполняется начальный просмотр всех орбитальных элементов КО, в ходе которого осуществляется начальное разделение КО на $M >> m$ групп, образующих расширенное (избыточное) множество;

2. из расширенного множества выделяются подмножество m групп, содержащих наибольшее число КО, и формируются их начальные центры локализации (средние орбитальные элементы и ковариационные матриц разброса);

3. выполняется итерационный цикл; на каждой итерации осуществляется перепривязка КО к группам по критерию наибольшей близости орбитальных элементов КО к одному из ранее выбранных центров локализации и формирование новых центров локализации. Удаленность орбитальных параметров КО от центра локализации определяется расстоянием в пространстве орбитальных элементов, в качестве которого используется вероятность принадлежности КО к центру локализации, рассчитанная по формуле (1). Аналогичная метрика для оценки расстояния в многомерном пространстве используется работах [7, 8].

Построение расширенного множества групп, обеспечивающих начальное разделение КО, осуществляется с учетом направления единичного вектора $\mathbf{e}_n$ нормали к плоскости орбиты, эксцентриситета e и

радиуса перицентра r_π. Диапазон изменения эксцентриситета (от 0 до 1) разбивается на заданное число m_e равных отрезков значениями

$$e_k = \frac{k}{m_e},\ k = 0,1,2,...,m_e$$

(например, для $m_e = 10$ диапазон изменения эксцентриситета разбивается на интервалы $0 \le e < 0,1,\ 0,1 \le e < 0,2,\ ...\ ,\ 0,9 \le e < 1$). Диапазон изменения высоты перицентра начинается со 150 км и разбивается на неравные части с использованием логарифмической шкалы

$$h_\pi^k = \alpha^k \cdot 150km,\quad k = 0,1,2,...,m_r$$

Например, при $a = 2$ получим набор граничных значений 150, 300, 600, 1200, 2400, 4800, 9600, 19200, 38400 км.

Пространство орбитальных параметров разбивается на множество подпространств по направлению единичного вектора нормали $\mathbf{e}_n$ к плоскости орбиты. Все направления вектора $\mathbf{e}_n$ разделяются на шесть подмножеств, как показано на рис. 2 в зависимости от того, какую грань куба направлений пересекает линия $\lambda\mathbf{e}_n$, $\lambda > 0$. Каждое ребро куба разделено на m равных частей. Соответственно, каждая грань куба разделена на m^2 квадратов. В пределах одной грани проводится деление множества плоскостей орбит КО на подмножества в зависимости от квадрата, через который проходит вектор $\mathbf{e}_n$.

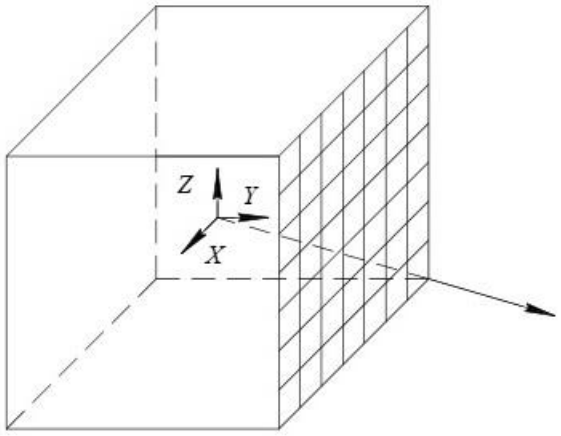


Рис. 2. Разбиение пространства параметров по направлению нормали к плоскости орбиты

Ниже приводится детализация алгоритма распределения КО по группам.

Входная информация:

- $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_n$ — массив, содержащий набор орбитальных параметров КО $\mathbf{q}_i \left\{ q_1^i, q_2^i, q_3^i, q_4^i \right\} = \left\{ \mathbf{c}^i, a^i \right\}$, $i = 1, \ldots, n$, где $\bar{c} = \bar{r} \times \bar{v}$ — вектор орбитального момента, a — большая полуось орбиты;
- m — число центров локализации КО после их распределения по группам;
- m_1 — число значений эксцентриситета при формировании начального распределения КО;
- m_2 — число значений радиуса перицентра;
- m_3 — число, на которое делится ребро куба направлений.

Выходная информация:

- $\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2, ..., \hat{\mathbf{q}}_m$ — орбитальные элементы центров локализа-ции КО;
- $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, ..., \mathbf{C}_m$ — ковариационные матрицы разброса КО относительно центров локализации.

Описание алгоритма:

1. Вычисляется общее число групп начального распределения КО

$$m_0 = 6 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(m_3 \right)^2$$

Учитывая ограниченный набор фактических данных, содержащихся в современных каталогах (и возможности вычислительной техники), предполагается, что $m_1 \le 12$, $m_2 \le 12$, $m_3 \le 12$. Таким образом, общее число групп $m_0 \le 124416$.

2. Формируется массив $N^{loc} \left\{ n_1, ..., n_{m0} \right\}$, состоящий из m_0 целых чисел для подсчета числа объектов в каждой группе локализации (*loc*) КО. Устанавливаются равными нулю их начальные значения:

$$n_i^{loc} = 0,\ i = 1, 2, ..., m_0$$

3. Формируется массив N^q, состоящий из n целых чисел. Элементы этого массива соответствуют элементам орбиты КО и содержат номера центров локализации, к которым привязывается КО на данной стадии работы алгоритма. Устанавливаются равными нулю начальные значения элементов массива

$$n_k^q = 0,\ k = 1, 2, ..., n.$$

4. В цикле по переменной k, $k = 1, 2, ..., n$ проводится просмотр орбитальных элементов КО и первоначальное разделение их на расширенное множество групп.

4.1. Выбираются очередные орбитальные элементы $\mathbf{q}_k$.

4.2. Вычисляются эксцентриситет, радиус перицентра и единичный вектор нормали, соответствующие вектору орбитальных параметров $\mathbf{q}_k$:

– эксцентриситет $e_k = \sqrt{1 - \dfrac{c_k^2}{\mu a_k}}$, где $\mu = 398600,4415$ км^3/с^2 — гравитационная постоянная Земли;

– радиус перицентра $\left(r_\pi\right)_k = a_k\left(1 - e_k\right)$, $\left(h_\pi\right)_k = a_k\left(1 - e_k\right) - r_e$;

– единичный вектор нормали к плоскости орбиты $\left(\mathbf{e}_n\right)_k = \dfrac{\mathbf{c}_k}{c_k}$.

4.3. Определяется номер группы в диапазоне эксцентриситетов $n_1^k = \mathrm{int}\left(m_1 e_k\right)$ (e_k изменяется в диапазоне [0;1], поэтому $n_1^k < m_1$).

4.4. По заданному значению m_2 определяется основание логарифмической шкалы α в соответствии с табл. 1, определяется номер группы в диапазоне радиусов перицентра $n_2^k = \mathrm{int}\left(\lg_\alpha \dfrac{h_\pi^k}{150\ km}\right)$.

Таблица 1

Определение основания логарифмической шкалы α по значению m_2

m_2	α	m_2	α	m_2	α	m_2	α
2	17	5	4	8	2,4	11	2,0
3	7	6	3	9	2,2	12	1,9
4	5	7	2,7	10	2,1		

4.5. Определяется номер границ n_g в кубе направлений, устанавливаются координаты $\bar{u}\left\{u_x, u_y\right\}$ проекции нормали на поверхность выбранной грани (для этого выбирается максимальная по абсолютной величине компонента вектора $\bar{e}_n^k\left\{e_{nx}^k, e_{ny}^k, e_{nz}^k\right\}$); номер грани устанавливается в соответствии с табл. 2.

Таблица 2

Определение номера грани

Условие	Выбранный номер	Координаты внутри грани
$\left\|e_{nx}^k\right\| > \left\|e_{ny}^k\right\|,\ \left\|e_{nx}^k\right\| > \left\|e_{nz}^k\right\|,\ e_{nx}^k > 0$	0	$u_x^k = e_{ny}^k,\ u_y^k = e_{nz}^k$
$\left\|e_{ny}^k\right\| > \left\|e_{nx}^k\right\|,\ \left\|e_{ny}^k\right\| > \left\|e_{nz}^k\right\|,\ e_{ny}^k > 0$	1	$u_x^k = e_{nx}^k,\ u_y^k = e_{nz}^k$
$\left\|e_{nz}^k\right\| > \left\|e_{nx}^k\right\|,\ \left\|e_{nz}^k\right\| > \left\|e_{ny}^k\right\|,\ e_{nz}^k > 0$	2	$u_x^k = e_{nx}^k,\ u_y^k = e_{ny}^k$

Окончание табл. 2

$\left\|e_{nx}^k\right\| > \left\|e_{ny}^k\right\|,\ \left\|e_{nx}^k\right\| > \left\|e_{nz}^k\right\|,\ e_{nx}^k < 0$	3	$u_x^k = e_{ny}^k,\ u_y^k = e_{nz}^k$
$\left\|e_{ny}^k\right\| > \left\|e_{nx}^k\right\|,\ \left\|e_{ny}^k\right\| > \left\|e_{nz}^k\right\|,\ e_{ny}^k < 0$	4	$u_x^k = e_{nx}^k,\ u_y^k = e_{nz}^k$
$\left\|e_{nz}^k\right\| > \left\|e_{nx}^k\right\|,\ \left\|e_{nz}^k\right\| > \left\|e_{ny}^k\right\|,\ e_{nz}^k < 0$	5	$u_x^k = e_{nx}^k,\ u_y^k = e_{ny}^k$

4.6. Определяются целочисленные координаты проекции нормали на поверхность грани:

$$n_x^k = \mathrm{int}\left(m_3\left(u_x^k + 1\right)/2\right),\ n_y^k = \mathrm{int}\left(m_3\left(u_y^k + 1\right)/2\right).$$

4.7. Вычисляется номер группы, в которую попадает рассматриваемый k-й КО

$$n_k = n_y^k + \left(m_3\right)n_x^k + \left(6m_3\right)n_g^k + \left(6m_3m_2\right)n_2^k + \left(6m_3m_2m_1\right)n_1^k.$$

4.8. Устанавливается привязка текущего (k-го) КО к области локализации n_k. Для этого k-му элементу массива N^q присваивается значение n_k: $n_k^q = n_k$.

4.9. Увеличивается на единицу значение элемента массива N^{loc}, соответствующее данной группе $n_{n_k}^{loc} = n_{n_k}^{loc} + 1$.

4.10. Если $k < m_0$, то $k = k + 1$, продолжение цикла, переход к п. 4.1.

5. Осуществляется просмотр массива N^{loc} и формирование нового массива N^{pac}, состоящего из пар [число КО, попавших в группу, — номер группы]. При этом исключаются группы, в которые не попало ни одного КО.

5.1. Устанавливается начальное значение счетчика ненулевых элементов массива N^{pac}: $j = 0$.

5.2. Выполняется цикл по параметру i, $i = 1, 2, ..., m_0$.

5.3. Если $n_i^{loc} > 0$, то $n_{j+1}^{pac} = n_i^{loc}$, $n_{j+2}^{pac} = i$, $j = j + 2$.

5.4. Если $i < m_0$, то $i = i + 1$, продолжение цикла, переход к п. 5.3.

6. Одним из известных методов (например, методом Шелла [6]) осуществляется сортировка массива пар N^{pac} по убыванию ключевого параметра (нечетные индексы).

7. Формируется массив $N^{\max}$ из целых чисел для хранения номеров групп. Из массива N^{pac}, полученного в результате сортировки, выбираются первые m номера групп, в которые попало максимальное число КО, и пересылаются в массив $N^{\max}$: $n_i^{\max} = n_{2i}^{pac}$, $i = 1, 2, ..., m$. Значение m выбирается таким образом, чтобы количество КО было не

менее 8. Это требование обеспечивает достаточную избыточность выборки: двойное превышение числа КО по сравнению с четырьмя орбитальными параметрами.

8. В цикле по переменной k, $k=1,2,...,n$ проводится **второй** просмотр орбитальных элементов КО для формирования начальных значений математического ожидания и ковариационной матрицы разброса параметров относительно центров локализации.

8.1. Формируется массив $S\left\{\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,...,\mathbf{s}_m\right\}$ для накопления сумм векторов $\mathbf{q}_i$; устанавливаются нулевые значения для всех $\mathbf{s}_i$.

8.2. Формируется массивы $S^q\left\{S_1^q,S_2^q,...,S_m^q\right\}$ для накопления сумм матриц $S_i^q=\mathbf{q}_i\left(\mathbf{q}_i\right)^T$ и $\mathbf{C}^q\left\{\mathbf{C}_1^q,\mathbf{C}_2^q,...,\mathbf{C}_m^q\right\}$ для накопления сумм матриц $\mathbf{C}_i^q$ (устанавливаются нулевые значения для всех матриц),

8.3. Формируется массив N^{num} из m целых чисел для подсчета числа объектов в каждом из центров локализации; все элементы этого массива устанавливаются равными нулю: $n_j^{num}=0,\ j=1,...,m$.

8.4. Из массива N^q выбирается очередной элемент n_k^q (это номер центра локализации, к которому привязан k-й КО; если номер n_k^q совпал с элементом массива $N^{\max}$ под номером $n_k^{\max}$, то к суммам из массивов S и S^2 добавляются очередные слагаемые, а счетчик числа КО увеличивается на 1:

$$\mathbf{s}_{n_k^{\max}}=\mathbf{s}_{n_k^{\max}}+\mathbf{q}_k,\quad S^2_{n_k^{\max}}=S^2_{n_k^{\max}}+\mathbf{q}_k\left(\mathbf{q}_k\right)^T,$$
$$n_k^{\max}=n_k^{\max}+1.$$

8.5. Если $k<n$, то $k=k+1$, продолжение цикла, переход к п. 8.4.

9. В цикле по переменной i, $i=1,2,...,m$ проводится вычисление математических ожиданий центров локализации и ковариационных матриц разброса орбитальных элементов по накопленным значениям векторов $\mathbf{s}_i$ и матриц S_i^2:

$$\hat{\mathbf{q}}_i=\frac{\mathbf{s}_i}{n_i^{\max}},\ \mathbf{C}_i=\frac{1}{n_i^{\max}}\left[S_i^2-\frac{\mathbf{s}_i\left(\mathbf{s}_i\right)^T}{n_i^{\max}}\right].$$

10. В цикле по переменной k, $k=1,2,...,n$ проводится просмотр орбитальных параметров КО для привязки их к новым центрам локализации.

10.1. Признак изменения привязки устанавливается равным 0.

10.2. Выбирается очередной вектор $\mathbf{q}_k$,

10.3. В цикле по переменной i, $i = 1, 2, ..., m$ пределяется его расстояние до каждого из сформированных к настоящему этапу работы алгоритма центров локализации

$$d_{ki} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^4 |C_i|}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\mathbf{q}_k - \hat{\mathbf{q}}_i\right)^T \mathbf{C}_q^{-1} \left(\mathbf{q}_k - \hat{\mathbf{q}}_i\right) \right], \qquad (2)$$

определяется номер индекса i, соответствующего максимальному значению d_{ki}: $i_{\max} = index\left(\max\left(d_{k,i},\ i = 1, ..., m\right)\right)$ — номер центра локализации, которому принадлежит данный (k -й) КО,

10.4. Если $k < n$, то $k = k + 1$, продолжение цикла, переход к п. 10.1.

11. В цикле по переменной k, $k = 1, 2, ..., n$ проводится второй просмотр орбитальных элементов КО для формирования математических ожиданий и ковариационных матриц разброса параметров относительно центров локализации.

11.1. Массивам векторов S, матриц S^2 и N^{num} присваиваются нулевые значения

$$\left\{ \mathbf{s}_i = 0, \quad |\mathbf{s}|_i^2 = 0, \quad n_i = 0 \right\},\ i = 1, ..., m.$$

11.2. Из массива N^q выбирается очередной элемент n_k^q — номер центра локализации, к которому привязан k КО; к суммам из массивов S и S^2 добавляются очередные слагаемые, а счетчик числа КО увеличивается на 1:

$$\left\{ \mathbf{s}_{n_k^{\max}} = \mathbf{s}_{n_k^{\max}} + \mathbf{q}_k, \quad S^2_{n_k^{\max}} = S^2_{n_k^{\max}} + \mathbf{q}_k \left(\mathbf{q}_k\right)^T, \quad n_k^{num} = n_k^{num} + 1 \right\},$$
$$i = 1, ..., m.$$

12. Если $k < n$, то $k = k + 1$, продолжение цикла, переход к п. 11.2.

Далее выполняется следующая итерация определения центров локализации и ковариационной матрицы разбросов КО относительно центров локализации. Затем выполняется переход к п. 10. Процесс продолжается, пока признак изменения привязки имеет значение 1.

Определение параметров статистической модели высокорбитальных космических объектов. К высокоорбитальным КО относятся три группы объектов: геостационарные (ГСО), высокоэллиптические (ВЭО) и средневысокие объекты (СВО). Принадлежность объекта одной из трех рассматриваемых групп — ГСО, ВЭО или СВО — определяется в соответствии с табл. 3.

Таблица 3

Определение принадлежности объекта к группе

Группа объекта	Эксцентриситет	Период (минуты)
ГСО	< 0.2	1100 – 2060
ВЭО	> 0.2	> 225
СВО	< 0.2	225 – 1100

Для определения параметров статистической модели геостационарных КО из множества орбит каталога были выбраны орбиты, удовлетворяющие условиям, представленным в табл. 3 (1-я строка). Обработка данных была проведена в соответствии с алгоритмом, описанным в предыдущем разделе. Для иллюстрации работы алгоритма в табл. 4 представлена информация, отражающая процесс сходимости. Слева (нечетные столбцы) указан номер итерации. Справа (четные столбцы) указано число точек, для которых на текущей итерации изменилась привязка к центру локализации. Из таблицы видно, как постепенно число точек, изменивших привязку, уменьшается. Всего для решения задачи потребовалось 23 итерации.

Таблица 4

Пример сходимости итерационного процесса формирования центров локализации

№ итерации	Число точек	№ итерации	Число точек	№ итерации	Число точек	№ итерации	Число точек
1	2084	7	24	13	15	19	5
2	136	8	22	14	14	20	4
3	88	9	16	15	12	21	1
4	68	10	14	16	9	22	1
5	35	11	17	17	11	23	0
6	20	12	13	18	10		

Результаты работы алгоритма – параметры центров локализации и корни из диагональных элементов ковариационных матриц разброса параметров КО относительно этих центров — представлены в табл. 5. В этой таблице каждому центру локализации соответствует пара строк, в первой из которых содержатся:

– номер центра локализации (1-й столбец);

– количество КО, ассоциированных с центром локализации при построении модели;

– 4 параметра центра локализации – компоненты вектора орбитального момента и большая полуось (столбцы 3–6); во второй строке каждой пары содержатся корни из диагональных элементов ковариационной матрицы разбросов (столбцы 3–6), дающие представление о величине разброса соответствующего параметра: чем больше значения диагональных элементов, тем больше разброс соответствующего

параметра.

Всего для данной выборки каталогизированных объектов после обработки образовалось 28 центров локализации. Отметим, что второму центру локализации соответствуют значительно меньшие оценки разбросов, как по вектору орбитального момента, так и по полуоси. Это объясняется тем, что этот центр сформировался по части функционирующих геостационарных КА, удерживающих постоянную ориентацию плоскости орбиты и ее полуось, что подтверждает достоверность полученных результатов.

Таблица 5

Результаты работы алгоритма

№ центра локализации	Количество КО	$q_1 = c_x$	$q_2 = c_y$	$q_3 = c_z$	$q_4 = a$
1	349	12.261	-12.466	128.392	42.310
		3.348	7.703	1.119	0.322
2	314	0.207	0.022	129.643	42.166
		0.063	0.049	0.001	0.001
3	235	7.984	-32.072	125.516	42.323
		4.260	2.152	0.350	0.315
4	240	-9.071	-30.763	125.764	42.332
		4.357	2.670	0.405	0.404
5	189	-13.224	-14.009	127.820	42.035
		3.774	4.573	0.904	0.380
6	81	-6.462	-5.645	127.546	41.097
		3.611	2.187	1.752	1.009
7	63	-15.721	-19.867	125.683	41.428
		2.798	4.439	0.898	0.841
8	30	-15.769	-30.977	126.781	43.483
		2.670	4.216	0.763	0.541
9	64	-5.264	-5.424	127.045	41.022
		4.709	6.528	3.165	2.014
10	0	12.840	-23.206	124.118	40.420
		5.967	4.666	1.716	0.947
11	39	-10.128	-17.827	126.385	42.149
		10.855	7.961	1.901	0.194
12	83	1.877	-0.401	129.680	42.209
		1.814	0.742	0.236	0.151
13	36	-11.707	-40.743	124.527	44.218
		6.955	6.177	3.779	2.278
14	33	8.165	-7.903	125.090	40.018
		5.791	8.236	3.386	2.222
15	24	13.312	-4.888	130.073	43.301
		6.329	3.746	3.111	1.565
16	15	1.454	0.529	128.038	41.171
		0.702	0.307	1.216	0.802
17	47	6.406	-2.673	124.281	39.930
		5.956	6.213	3.687	2.408
18	52	-16.104	-24.853	126.334	42.248
		0.582	1.239	0.201	0.221
19	12	-15.773	-18.655	127.807	44.060
		9.180	10.024	5.652	3.200

Окончание табл. 5

20	29	8.673	-31.266	125.657	42.344
		3.493	3.702	1.228	0.504
21	24	-0.684	-0.886	128.667	42.037
		3.558	5.380	2.464	1.259
22	24	16.906	-18.726	121.979	40.522
		11.037	13.824	4.926	3.068
23	13	-29.839	-33.730	122.116	43.836
		12.541	5.905	6.783	3.028
24	8	6.104	-4.392	126.582	40.491
		3.510	4.846	3.193	1.969
25	16	30.107	-9.387	121.360	42.098
		12.152	27.318	4.199	0.696
26	8	-14.417	-29.441	126.131	42.831
		3.307	3.920	0.913	1.201
27	21	-14.023	-17.689	125.802	42.194
		7.893	9.288	1.754	1.078
28	6	16.590	-13.680	126.214	41.919
		1.844	5.665	0.635	0.399

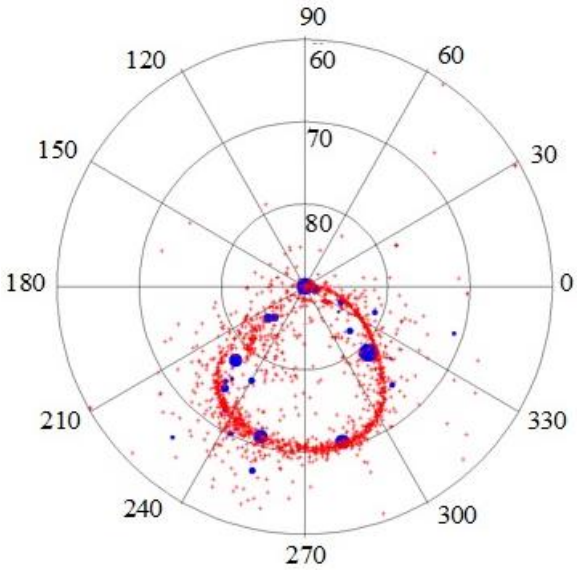


Рис. 3. Положения центров локализации и каталогизированных объектов в пространстве параметров нормали к плоскости орбиты

Наглядное представление о расположении плоскостей КО дает рис. 3. На нем красным цветом изображено расположение точек нормали (прямое восхождение и склонение в СК EME2000) к плоскостям КО. Кружками синего цвета разного диаметра показано расположение нормалей к плоскостям точек локализации. Кружки большего диаметра соответствуют точкам локализации, представляющим группу, содержащую большее число КО (см. столбец 2 табл. 5). На рис.4 видно, что нормали к плоскостям ГСО образуют характерное кольцо, что отражает хорошо известное явление прецессии плоскости пассивных КО на ГСО под действием гравитации Луны и Солнца.

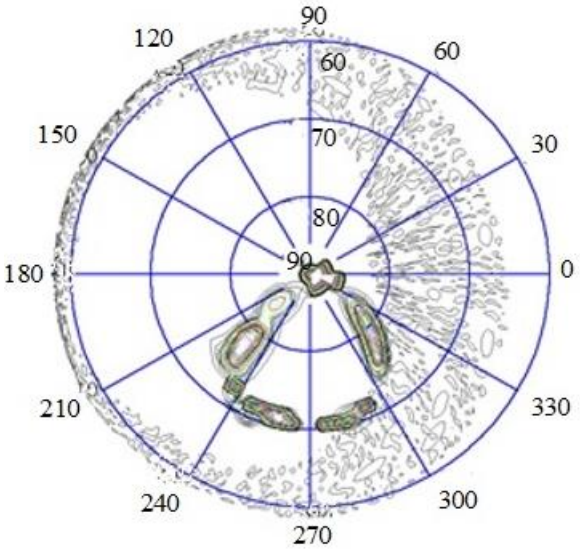


Рис. 4. Линии уровня плотности вероятности нахождения КО в окрестности нормали к плоскости орбиты, рассчитанные по центрам локализации

Расчет параметров концентрации космического мусора. Предложенная статистическая модель позволяет определять усредненную концентрацию частиц космического мусора (КМ) по высоте и широте заданной точки космического пространства.

Для демонстрации достоверности полученных результатов с использованием генератора случайных орбит на основе генератора случайных орбит в соответствии с параметрами разработанной модели. На рис. 5 представлен график зависимости средней по всем широтам концентрации КМ от высоты над поверхностью Земли. Красная линия соответствует концентрации, полученной с использованием параметров модели. Для сравнения на том же графике представлена зависимость концентрации от высоты, полученная непосредственно по данным каталога (зеленая линия).

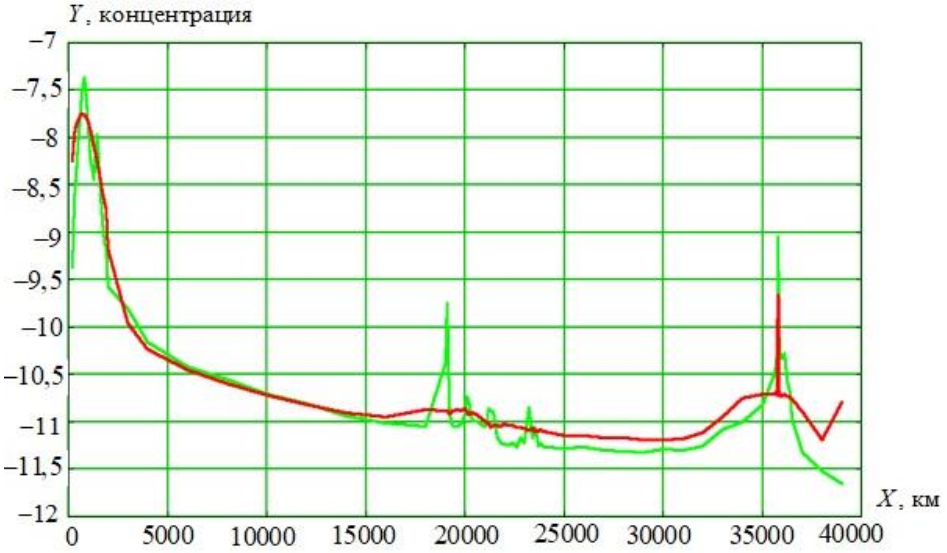
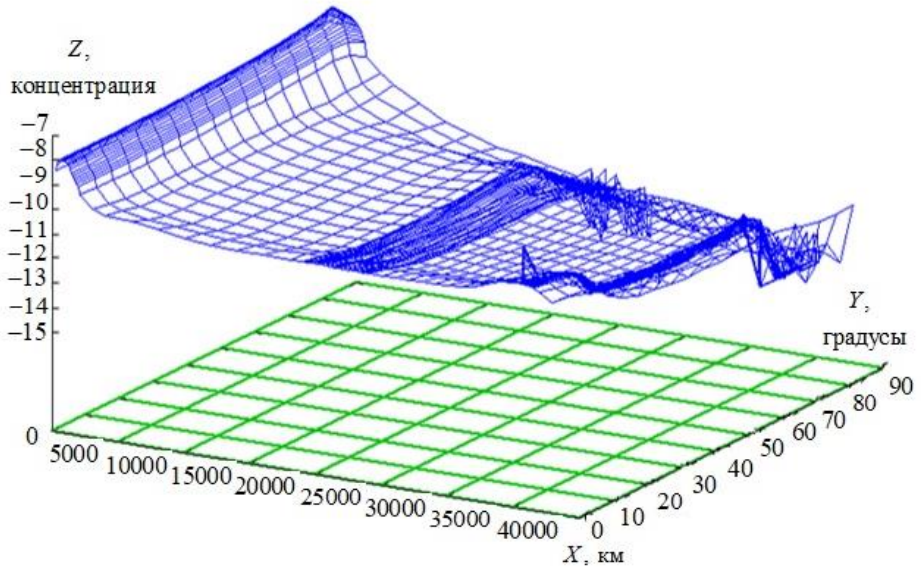
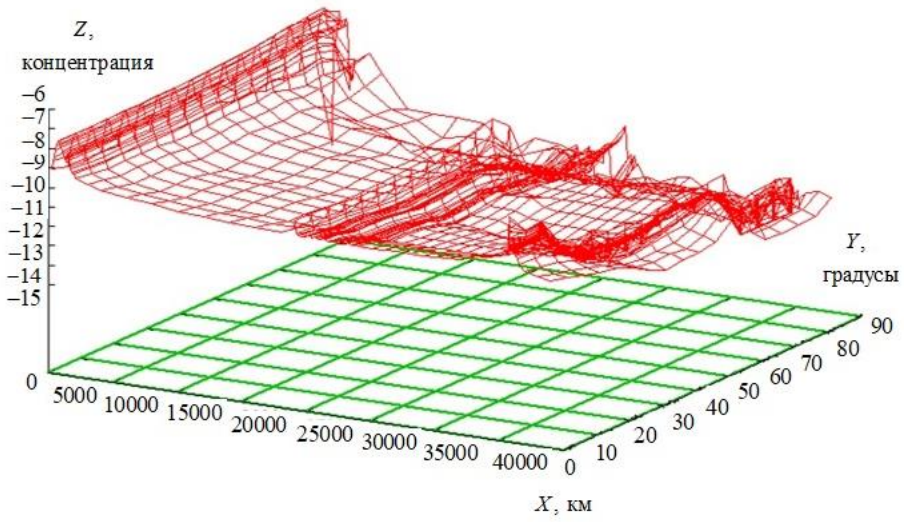


Рис. 5. Зависимость концентрации КО от высоты (X — высота над поверхностью Земли, км, Y — десятичный логарифм количества КО, концентрация)

На рис. 6 представлена зависимость концентрации КМ от широты и высоты над поверхностью Земли. Рис. 6, *а* демонстрирует результаты, полученные на остове разработанной модели. Для сравнения на рис. 6, *б* представлены аналогичные результаты, полученные непосредственно по данным каталога.



а



б

Рис. 6. Зависимость концентрации от широты и высоты над поверхностью Земли (X — высота над поверхностью Земли, км, Y — широта, градусы, Z — десятичный логарифм количества КО, концентрация):
а — статистическая модель; *б* — орбитальные данные каталога

Выводы. Разработана статистическая модель распределения орбитальных параметров объектов техногенного происхождения в ОКП. Алгоритм формирования параметров модели разработан на основе информации о каталогизированных КО. Математическая модель и алгоритмы реализованы в виде программного комплекса.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kessler D.J. Collisional Cascading: The Limits of Population Growth in Low Earth Orbit. *Advances in Space Research*, 1991, vol. 11., pp. 2637–2646.

[2] Назаренко А.И. *Моделирование космического мусора*. Москва, ИКИ РАН, 2013, 216 с.

[3] *Classification of geosynchronous objects*, ESA, 28 March, 2015, iss. 17.

[4] Степаньянц В.А., Львов Д.В. Эффективный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений движения. Математическое моделирование, 2008, т. 20, № 6, с. 79–85.

[5] Дубошин Г.Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Москва, Наука, 1976, 864 с.

[6] Montenbruck O., Gill E. *Satellite orbits: models, methods, applications.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000, 370 p.

[7] Usovik I., Stepanov D., Stepanyants V., Zakhvatkin M., Molotov I., Nazarenko A. Improvement of the space debris model in MEO and GEO regions according to the catalog of the Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian academy of sciences). *Proceedings 7th European Conference on Space Debris*, 2017, 10 p.

[8] Zalles R., Molotov I., Kokina T. and etc. First ISON observations for satellite conjunction analysis in the Western Hemisphere. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofisica (Serie de Conferencias)*, 2018, vol. 50, pp. 36–37.

[9] Молотов И.Е., Воропаев В.А., Захваткин М.В., Степаньянц В.А. и др. Первое участие Краснодарской обсерватории КубГУ в международной наблюдательной кампании проекта НСОИ АФН. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2017, № 4, вып. 3, с. 102–108.

[10] Voropaev V., Molotov I., Zakhvatkin M., Khutorovsky Z., Streltsov A., Stepanyants V., Borovin G., Pavlova E. Recent developments of the KIAM Space Debris database for space situation awareness and conjunction analysis. *Proceedigs of the 69th International Astronautical Congress*, 2018, 7 p.

[11] Molotov I., Zakhvatkin M., Elenin L., Canals Ros L., Graziani F., Teofilato P., Schildknecht T., Ehgamberdiev Sh., Aliev A., Ivashchenko Yu., Zalles R., Streltsov A., Krylov A., Erofeeva A., Chornaya E., Rusakov O., Stepanyants V., Agletdinov V., Borovin G., Pavlova E. ISON network tracking of space debris: current status and achievements. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica (Serie de Conferencias)*, 2019, vol. 51, pp. 144–149.

[12] Молотов И.Е., Сун Р.Ю., Занг Ч., Баррес У. де Алмейда, Захваткин М.В. и др. Российско-китайские наблюдения фрагментов разрушения ракетной ступени «Центавр» — первый шаг к сети обсерваторий БРИКС. Космический мусор: фундаментальные и практические аспекты угрозы, 2019, с. 95–102.

[13] Павлова Е.А., Захваткин М.В., Стрельцов А.И., Еленин Л.В., и др. Обеспечение безопасности полётов высокоорбитальных космических аппаратов. Космический мусор: фундаментальные и практические аспекты угрозы, 2019, с. 131–138.

[14] Mahalanobis P.C. On the generalised distance in statistics. *Proceedings of the National Institute of Sciences of India*, 1936, vol. 2, pp. 49–55.

[15] Maesschalck R., Jouan-Rimbaud D., Massart D.L. The Mahalanobis distance. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 2000, vol. 50, iss. 1, pp. 1–18.

[16] Базей А.А., Базей Н.В., Боровин Г.К., Золотов В.Е., Кашуба В.И., Кашуба С.Г., Куприянов В.В., Молотов И.Е. Эволюция орбиты пассивного фрагмента с большой площадью поверхности на высокой околоземной орбите. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, №1 (5), с. 83-93.

Статья поступила в редакцию 05.08.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Боровин Г.К., Захваткин М.В., Степаньянц В.А., Усовик И.В. Статистическая модель распределения космических объектов в пространстве орбитальных параметров. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 4, с. 69–90.

Боровин Геннадий Константинович — д-р физ.-мат. наук, г. н. с., главный научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, математическое моделирование, системы управления, баллистика, методы вычислений, небесная механика, робототехника, космический мусор, более 200 научных публикаций, SPIN-код 6604-4668, Scopus Author ID, ORCID: 0000-0002-7942-9613,Web of Science Researcher ID R-1861-2018. e-mail: borovin@keldysh.ru

Степаньянц Виктор Аркадьевич — канд. физ.-мат. наук, в. н. с., ведущий научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, механика космического полета, определение орбит, обработка измерений, вычислительные методы, более 150 научных публикаций, Scopus Author ID 8887774600, 56388770200, ORCID 0000-0002-2548-1539, e-mail vic-stepan@rambler.ru

Захваткин Михаил Витальевич — канд. физ.-мат. наук, с. н. с., старший научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, механика космического полета, определение орбит, обработка измерений, 25 научных работ. SPIN: 2669-9728, Scopus Author ID: 55621162800, ORCID: 0000-0002-0900-5786, Web of Science Researcher ID: R-9339-2018. e-mail: zakhvatkin@kiam1.rssi.ru

Усовик Игорь Вячеславович — канд. техн. наук, и.о. начальника отдела, АО ЦНИИмаш, системный анализ, механика космического полёта, исследование операций, исследование проблем космического мусора, более 60 научных трудов, Scopus Author ID 55515823100. e-mail: usovikiv@mail.ru

Statistical model of space objects distribution in space of orbital parameters

© G.K.Borovin[1,3], M.V. Zakhvatkin[1], V.A. Stepanyants[1], I.V. Usovik[2]

[1]KIAM RAS, Moscow, 125047, Russia
[2]TSNIIMash, Moscow region, Korolev, 141070, Russia
[3]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

A statistical model of space debris is proposed. The model is based on the catalog of orbits of space objects, constructed using domestic and foreign sources. To build this model, the cataloged objects are clustering using criterion of closeness in a 4d space of orbital parameters characterizing the semimajor axis, eccentricity and position of the plane of the

satellite orbits composing a cluster. The distribution of objects in each cluster is determined by the mathematical expectation and the covariance matrix of the spread of the orbital parameters of the cluster.

Keywords: *space object, orbital parameters, model of space debris distribution*

REFERENCES

[1] Kessler D.J. Collisional Cascading: The Limits of Population Growth in Low Earth Orbit. *Advances in Space Research*, 1991, vol. 11., pp. 2637–2646.

[2] Nazarenko A.I. *Modelirovanie kosmicheskogo musora* [Space debris modeling]. Seri. Mekhanika, upravlenie i informatika [Ser. Mechanics, Control and Informatics]. Moscow, IKI RAN Publ., 2013, 216 p.

[3] *Classification of geosynchronous objects*, ESA, 28 March, 2015, iss. 17.

[4] Stepanyants V.A., L'vov D.V.*Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2008, vol. 20, no 6, pp. 79–85.

[5] Duboshin G.N. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoj mekhanike i astrodinamike* [Handbook of celestial mechanics and astrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 864 p.

[6] Montenbruck O., Gill E. *Satellite orbits: models, methods, applications.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000, 370 p.

[7] Usovik I., Stepanov D., Stepanyants V., Zakhvatkin M., Molotov I., Nazarenko A. Improvement of the space debris model in MEO and GEO regions according to the catalog of the Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian academy of sciences). *Proceedings 7th European Conference on Space Debris*, 2017, 10 p.

[8] Zalles R., Molotov I., Kokina T. and etc. First ISON observations for satellite conjunction analysis in the Western Hemisphere. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica (Serie de Conferencias)*, 2018, vol. 50, pp. 36–37.

[9] Molotov I.E., Voropaev V.A., Zahvatkin M.V., Stepan'yanc V.A. et al. *Ekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva — Ecological Bulletin of the scientific centers of the black sea economic cooperation*, 2017, no. 4, iss. 3, pp. 102–108.

[10] Voropaev V., Molotov I., Zakhvatkin M., Khutorovsky Z., Streltsov A., Stepanyants V., Borovin G., Pavlova E. Recent developments of the KIAM Space Debris database for space situation awareness and conjunction analysis. *Proceedigs of the 69th International Astronautical Congress*, 2018, 7 p.

[11] Molotov I., Zakhvatkin M., Elenin L., Canals Ros L., Graziani F., Teofilato P., Schildknecht T., Ehgamberdiev Sh., Aliev A., Ivashchenko Yu., Zalles R., Streltsov A., Krylov A., Erofeeva A., Chornaya E., Rusakov O., Stepanyants V., Agletdinov V., Borovin G., Pavlova E. ISON network tracking of space debris: current status and achievements. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica (Serie de Conferencias)*, 2019, vol. 51, pp. 144–149.

[12] Molotov I.E., Sun R.Yu., Zang Ch., Barres U. de Almejda, Zahvatkin M.V. et al. Rossijsko-kitajskie nablyudeniya fragmentov razrushe-niya raketnoj stupeni «Centavr» — pervyj shag k seti observatorij BRIKS [Russian-Chinese observations of fragments of the destruction of the Centauri rocket stage — the first step to THE BRICS Observatory network]. *Kosmicheskij musor: fundamental'nye i prakticheskie aspekty ugrozy* [Space debris: fundamental and practical aspects of the threat], 2019, pp. 95–102.

[13] Pavlova E.A., Zahvatkin M.V., Strel'cov A.I., Elenin L.V., et al. Obespechenie bezopasnosti polyotov vysokoorbital'nyh kosmicheskih apparatov [Ensuring flight safety of high-orbit space vehicles]. *Kosmicheskij musor: fundamental'nye i prakticheskie aspekty ugrozy* [Space debris: fundamental and practical aspects of the threat], 2019, pp. 131–138.

[14] Mahalanobis P.C. On the generalised distance in statistics. *Proceedings of the National Institute of Sciences of India*, 1936, vol. 2, pp. 49–55.
[15] Maesschalck R., Jouan-Rimbaud D., Massart D.L. The Mahalanobis distance. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 2000, vol. 50, iss. 1, pp. 1–18.
[16] Bazey A.A., Bazey N.V., Borovin G.K., Zolotov V.E., Kashuba V.I., Kashuba S.G., Kupriyanov V.V., Molotov I.E. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods,* 2015, no. 5 (1), pp. 83–93.

Borovin G.K., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Chief Research Fellow, Keldysh Institute of Applied Mathematics, mathematical modeling, control systems, ballistics, numerical methods, celestial mechanics, robotics, space debris, SPIN-code 6604-4668, Scopus Author ID, ORCID: 0000-0002-7942-9613,Web of Science Researcher ID R-1861-2018. e-mail: borovin@keldysh.ru

Stepaniants V.A., Ph.D. (Phys.-Math.), Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics, mechanics of space flight, determination of orbits, processing of measurements, numerical methods, more than 150 scientific publications, Scopus Author ID 8887774600, 56388770200, ORCID 0000-0002-2548-1539.
e-mail vic-stepan@rambler.ru

Zahvatkin M.V., Ph.D. (Phys.-Math.), senior researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics, space flight mechanics, orbit determination, measurement processing, 25 scientific publications. SPIN: 2669-9728, Scopus Author ID: 55621162800, ORCID: 0000-0002-0900-5786, Web of Science Researcher ID: R-9339-2018.
e-mail: zakhvatkin@kiam1.rssi.ru

Usovik I.V., Cand. Sc. (Eng.), Joint stock company, TSNIIMash, systems analysis, mechanics of space flight, operations research, investigation of space debris problems, more than 60 scientific publications, Scopus Author ID 55515823100.
e-mail: usovikiv@mail.ru