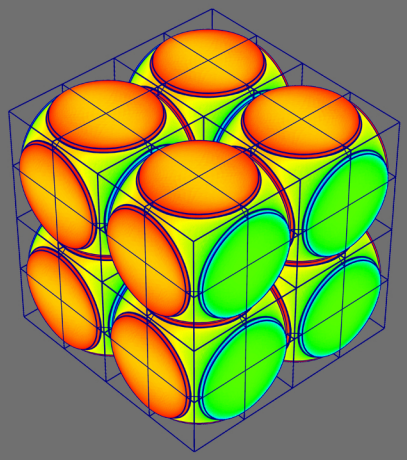
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Арутюнян Р.В., Арутюнян Т.Р. Моделирование и методы расчета электрических цепей с приближёнными характеристиками. Математическое моделирование и численные методы, 2019, № 4, с. 50–68.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/208/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.24
17.11.2026 03:12:19

УДК 519.6: 621.316: 621.396 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-4-5068

Моделирование и методы расчета электрических цепей с приближёнными характеристиками

© Р.В. Арутюнян[1], Т.Р. Арутюнян[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2]АО «ВПК «НПО машиностроения»,
г. Реутов, Московская обл., 143966, Россия

В статье исследуются два подхода к расчету электрических цепей в условиях неопределенности в исходных данных или влияния случайных воздействий, шумов различной природы. Первый подход основан на применении интервальных и двусторонних методов и является в некоторой степени примером робастных методов. Второй подход использует стохастическое уравнение Фоккера-Планка и является наиболее информативным. Хотя применение уравнения Фоккера-Планка ограничено некоторыми условиями (случайные воздействия имеют характер белых шумов или подчинены гауссовому закону распределения). Этот метод имеет широкую область применимости. В свою очередь существуют различные методы решения данного дифференциального уравнения. В статье рассмотрено решение соответствующей задачи при помощи метода конечных разностей.
Приведены примеры моделирования конкретных электрических и электронных цепей.

Ключевые слова: *электрические цепи, параметры, характеристики, погрешности, возмущения, шумы, приближенные методы, стохастические уравнения*

Введение. Параметры и характеристики электронных и электрических цепей обычно задаются с некоторой погрешностью, обычно не превосходящей 10–15%. Данная проблема особенно важна в теории чувствительности и допусков цепей, при проектировании и расчете микросхем и различных электротехнических устройств [1–11]. Для ее решения, как правило, применяются метод малого параметра (исследование чувствительности) и метод Монте – Карло. Относительно новым подходом является применение двусторонних и интервальных методов [3–6, 9–12]. В [6] описан пример интервального подхода при моделировании и исследовании чувствительности аналоговых цепей при вариации параметров и констатируется относительная экономичность и точность метода по сравнению с методом Монте-Карло. Неопределенные параметры цепи представляются как интервалы, с которыми осуществляется последовательность интервальных операций. Разработанные алгоритмы реализованы в SPICE3F5 с использованием методов разреженных матриц и протестированы на множестве реальных аналоговых схем.

Интервальные и двусторонние методы в основном позволяют находить оценки решения с гарантированной точностью и применимы

для расчета наихудшего случая. Для получения более точной и детальной информации применяется статистическое и вероятностное моделирование.

При воздействии шумов, помех и т.п. дисперсия решения часто неограниченно растет со временем. Дополнительным усложнением является существенное увеличение размерности задачи, так как соответствующие погрешности или возмущения являются функциями, а не постоянными параметрами. В указанных случаях возможно применение уравнений вероятностной меры Чепмена – Колмогорова, Фоккера–Планка либо имитационное моделирование на основе уравнений Ланжевена [1–3]. Считается, что если динамическая система имеет большую размерность $(N>2)$, то решение уравнения Фоккера – Планка найти практически невозможно [1–3]. При этом моделируемый процесс должен быть по меньшей мере марковским, что предполагает некоторые ограничения на источники шума. Если случайные воздействия независимые, то процесс марковский и применимо уравнение Чепмена-Колмогорова. Если шум гауссов, то процесс является диффузионным, и допустимо использование уравнения Фоккера – Планка. Возможно, по указанным причинам в литературе имеется недостаточно примеров численного моделирования многомерных радиотехнических и электронных систем на основе рассматриваемых вероятностных уравнений.

Имитационное моделирование является более употребительным и особенно эффективно, если процесс является эргодическим. При соответствующих требованиях к источникам шума имитационный и вероятностный методы должны давать эквивалентные результаты [1-3].

В статье осуществляется сравнение рассмотренных подходов на ряде примеров электрических и электронных цепей.

Расчет цепи выпрямителя с учетом погрешности ее характеристик и параметров. Рассмотрим электрическую цепь выпрямителя, схема (рис.1).

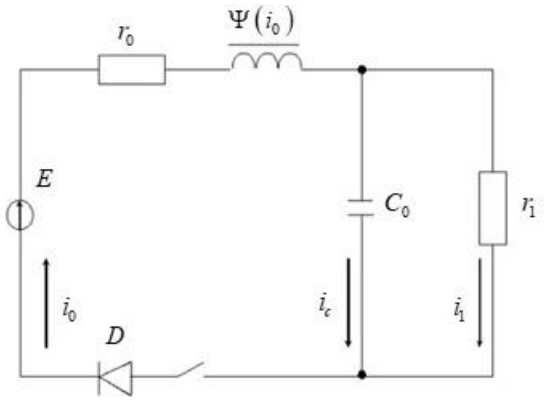


Рис. 1. Схема цепи

Система уравнений состояния рассматриваемой цепи может быть записана в виде:

$$\frac{d\Psi}{dt}+i_0r_0+i_1r_1+U_D(i_0)=E(t),\ \ \frac{Cdu_C}{dt}=i_0-i_1r_1,$$
$$i_1r_1-u_C=0, \qquad (1)$$

где $0<t<t_F$, $\Psi=\Psi(i_0)$ — потокосцепление катушки со стальным магнитопроводом; C — емкость; r_0 и r_1 — сопротивления; i_0 и i_1 — токи в соответствующих ветвях; u_C — напряжение на конденсаторе; $E(t)$ — периодическая ЭДС: $E(t)=E_m\sin(\omega_0t+\varphi_0)$, где E_m — амплитуда; ω_0 — циклическая частота; φ_0 — начальная фаза; $U_D(i_0)$ — падение напряжения на диоде с прямым сопротивлением $R_{\text{пр}}$ и обратным $R_{\text{обр}}$.

Нелинейная зависимость потокосцепления от тока выражается формулой [8]: $\Psi(i)=k_1k_2^{-1/2}arctg\left(ik_2^{-1/2}\right)$. Следовательно, дифференциальная индуктивность равна: $L_0(i)=k_1/(1+k_2i^2)$. Параметры и характеристики схемы замещения электрической цепи заданы с некоторыми относительными погрешностями:

$$r_0=M(r_0)(1+\varepsilon(r_0));\ r_1=M(r_1)(1+\varepsilon(r_1));C=M(C)(1+\varepsilon(C));$$
$$E_m=M(E_m)(1+\varepsilon(E_m));\ k_1=M(k_1)(1+\varepsilon(k_1));\ k_2=M(k_2)(1+\varepsilon(k_2)),$$

где $M(\xi)$ — известное среднее значение параметра ξ;

$$|\varepsilon(r_0)|\le\varepsilon_0(r_0);\ |\varepsilon(r_1)|\le\varepsilon_0(r_1);\ |\varepsilon(C)|\le\varepsilon_0(C),\ |\varepsilon(E_m)|\le\varepsilon_0(E_m);$$
$$|\varepsilon(k_1)|\le\varepsilon_0(k_1);\ \ |\varepsilon(k_2)|\le\varepsilon_0(k_2);$$

$\varepsilon_0(\xi)$ — заданное значение относительной погрешности параметра ξ. Погрешностью параметров ВАХ диода пренебрежем.

При замыкании такой цепи наблюдается явление, называемое броском тока, величина которого может представлять практический интерес. Требуется осуществить расчет переходного процесса в рассматриваемой цепи после замыкания ключа с учетом погрешности исходных данных задачи.

Система уравнений состояния цепи в нормальной форме имеет вид

$$dx_i/dt=f_i(x,t),\ i=1,2;\ t\in(0,t_F);\ x_1(0)=x_2(0)=0,\ x_1=i_0,\ x_2=i_1, \qquad (2)$$

$$f_1=\left(E(t)-x_1r_0-x_2r_1\right)/L_0\left(x_1\right),\quad f_2=\left(x_1-x_2\right)/\left(L_0\left(x_1\right)Cr_1\right). \qquad (3)$$

Расчет интервальной цепи осуществлялся при помощи двустороннего метода на основе принципа максимума Понтрягина, детально описанного и исследованного в [11]. При помощи принципа максимума отыскивается минимальное и максимальное значения решения в заданные моменты времени для всех допустимых значений параметров задачи (1)–(3). Краевая задача принципа максимума решается итерационно на основе конечно-разностной аппроксимации (1)–(2) высокого порядка точности [11].Существенно, что погрешность параметров и характеристик цепей в рассматриваемом методе предполагается интервальной и функциональной: известны только границы изменения параметров, в каждый момент времени параметр может принимать любое значение из допустимой области. Для применимости принципа максимума дополнительно предполагается, что коэффициенты задачи должны быть кусочно-непрерывными функциями.

Результаты вычислений двусторонних оценок тока $i_0(t)$ представлены на рис. 1. В расчетах было принято: $m(E_m)=75$ В, $\varepsilon_0(E_m)=0{,}15$, $\omega_0=100\pi$, $\varphi_0=0$, $m(r_0)=1$ Ом, $\varepsilon_0(r_0)=0{,}05$, $m(r_1)=1$ Ом, $\varepsilon_0(r_1)=0{,}05$, $m(k_1)=0{,}1$ Гн, $\varepsilon_0(k_1)=0$, $m(k_2)=0{,}25$, $\varepsilon_0(k_2)=0{,}05$, $m(C)=10^{-4}$ Ф, $\varepsilon_0(C)=0{,}05$, $t_F=0{,}05$ с, $R_{\text{пр}}=0{,}1$ Ом, $R_{\text{обр}}=100$ Ом, количество итераций — 10, количество разбиений отрезка интегрирования $m=500$. Время вычислений около 1 мин.

Рис. 2 показывает, что несмотря на относительно небольшую погрешность параметров и характеристик цепи (5–15%) расхождение нижней и верхней оценок решения весьма значительно и составляет до 100%. При увеличении отношения обратного и прямого сопротивлений диода для обеспечения одной и той же точности расчета требуется соответствующее уменьшение шага интегрирования.

На рис. 3 показаны двусторонние оценки для $i_0(t)$ при отсутствии в цепи диода (иллюстрация больших вариаций решения при броске тока при включении нелинейной индуктивности).

Основной вклад вносит погрешность ЭДС, о чем можно заключить из рассмотрения рис. 3 и 4.

Вблизи первого максимума тока чувствительность решения задачи к возмущениям в исходных данных наибольшая.

Понятно, что при отмеченных больших вариациях нижней и верхней границ решения, применение метода малого параметра необоснованно.

Если предполагается, что коэффициент задачи неопределенный, но постоянный, не зависит от времени, то границы полосы возможных решений значительно сужаются.

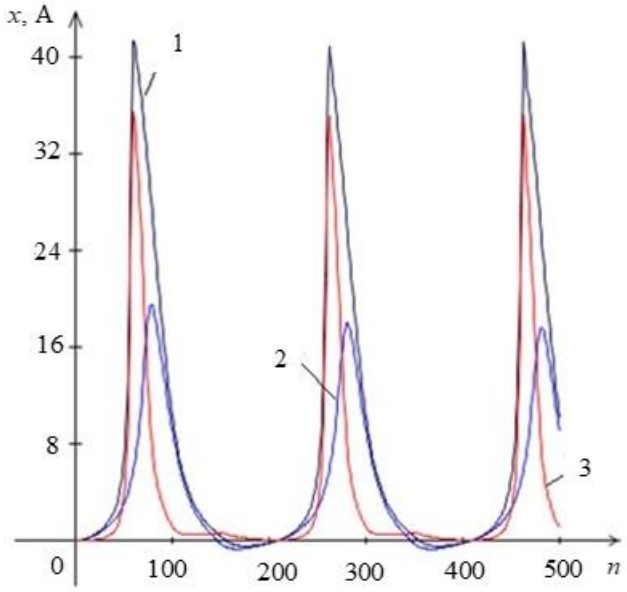


Рис. 2. Графики верхней (1) и нижней (2) оценок точного решения и их погрешности (3) для электрической цепи выпрямителя

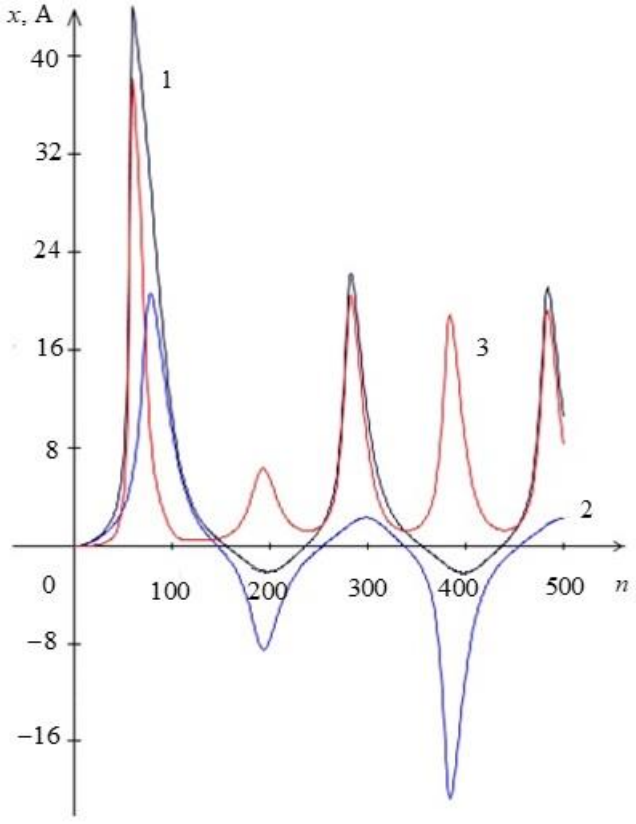


Рис. 3. Графики верхней (1) и нижней (2) оценок тока в цепи дросселя

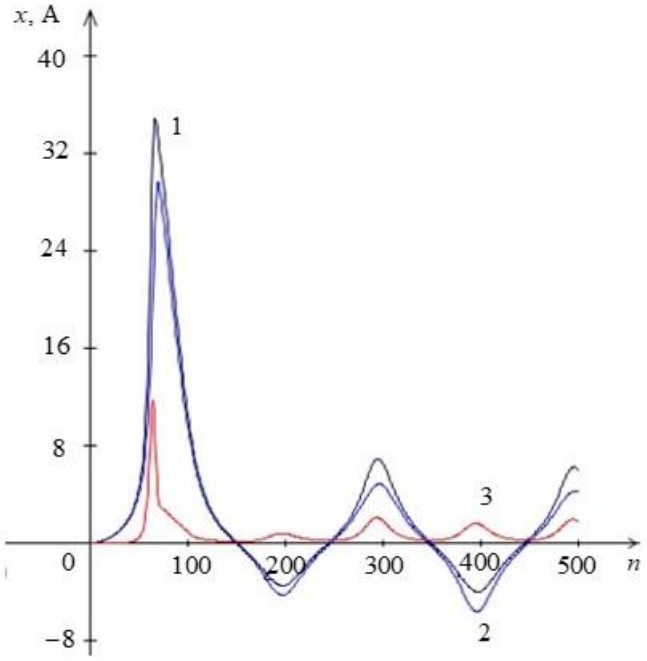


Рис. 4. Верхняя (1) и нижняя (2) оценки тока в цепи дросселя и их погрешность (3) при точном значении ЭДС

Интервальные и двусторонние методы [9–12], в принципе, применимы и для вычисления границ решения при воздействии помех и шумов с ограниченной дисперсией, так как позволяют находить полосу возможных решений с некоторой доверительной вероятностью. Недостатком данных методов является несколько завышенный характер оценок решения. По этой причине применение уравнения Фоккера–Планка в таких задачах может быть предпочтительней.

Моделирование случайного процесса в электрической цепи при помощи уравнения Фоккера-Планка. Для корректности использования данного уравнения требуется, чтобы шумы имели характер белого шума. Тем не менее, допустимо его применение для нахождения приближенного решения и в случае гауссовых шумов с ограниченной дисперсией [1–3]. Также существуют ограничения по постоянной времени случайных процессов. Предположим, что уравнения состояния цепи имеют вид системы ОДУ:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + g(x,t)\rho(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

где $x = (x_1,\ldots,x_N)^T$, $f = (f_1,\ldots,f_N)^T$, $\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_N)^T$, $g = \left[g_{jk}\right]_{j,k=1}^{N}$, $\rho(t)$ — статистически независимые нормированные источники нормально-

ного белого шума, $g(x,t)$ — его интенсивность, $\langle \rho(t) \rangle = 0$, $\langle \rho(t)\rho(t+u) \rangle = \delta(u)$, где угловые скобки обозначают среднее по множеству наблюдений, $\delta(u)$ — дельта-функция. Рассмотрим также соответствующую систему ОДУ при отсутствии шумов: $\frac{dx^0}{dt} = f(x^0,t)$, $x^0 = (x_1^0,\ldots,x_N^0)^T$. Процесс $x(t)$ является векторным диффузионным случайным процессом, для которого имеет место вероятностное уравнение Фоккера–Планка [1–3]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(A_j p) + \sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(B_{jk} p), t > 0, x \in R^N, \qquad (5)$$

где A — вектор сноса, B — матрица диффузии вероятности:

$$A_j = f_j(x,t), \;\; B_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} g_{ji} g_{ki},$$

$p(x,t)$ — плотность вероятности с условием нормировки:

$$\int_{R^N} p(x,t)dx = 1.$$

Начальное условие для уравнения (5): $p(x,0) = p_0(x)$; часто используется условие $p_0(x) = \delta(x - x(0))$; на бесконечности плотность вероятности считается равной нулю. В математическом отношении рассматриваемая задача относится к задаче Коши в пространстве для нестационарного уравнения диффузии с переменными коэффициентами в движущейся среде.

Аналогичное (5) уравнение имеет место для плотности вероятности переходов $v(x,t;x_0,t_0)$. Если интервальный подход, рассмотренный в предыдущем пункте, позволяет найти только полосу всевозможных решений, то уравнение (5) содержит в себе более детальную информацию о статистических свойствах их распределения.

Если шумы или помехи относительно малы, то полоса решений не очень широка и для рассматриваемой в статье задачи целесообразно сделать замену переменных в уравнении (5), при помощи перехода к движущейся системе координат с центром в точке $x^0(t)$, приближенно соответствующей тренду процесса (середине полосы): $y = x - x^0$. Такое преобразование позволяет многократно уменьшить

размер рассматриваемой области, что очень важно при численном решении. После замены переменных (5) запишется в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(A_j p\right)+\sum_{j,k=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k}\left(\hat{B}_{jk} p\right), \qquad (6)$$

где $\hat{A}=f\left(y+x^0,t\right)-f\left(x^0,t\right)$, $\hat{B}=B(y+x^0,t)$; $p\left(y,0\right)=p_0\left(y+x^0(0)\right)$.

Для задачи (1)–(3) $N=2$, выражения координат вектора сноса даны в (3), матрицы интенсивности шума и диффузии имеют только один отличный от нуля элемент: $g_{11}=d_1 L_0^{-1}\left(x_1\right)\sin\left(\omega_1 t\right)$, $B_{11}=0{,}5g_{11}^2$; то есть решаемое уравнение переноса и диффузии вероятности является вырожденным по одной переменной — x_2. Предполагается, что имеет место помеха в питающем напряжении, аппроксимируемая белым шумом, d_1 — коэффициент ширины шума (в расчете 0,02).

Конечно-разностный метод. Для численного решения уравнения переноса и диффузии вероятности применялись различные конечно-разностные схемы с дискретизацией по времени и пространству – как явные, так и неявные, первого и второго порядка точности по всем координатам. Положительно зарекомендовал себя неявный конечно-разностный метод на основе метода Гира с перенормировкой на каждом шаге, характеризующийся высокой устойчивостью:

$$\frac{1{,}5p_{i,j}^k-2p_{i,j}^{k-1}+0{,}5p_{i,j}^{k-2}}{\tau}=-\vartheta\left(\hat{A}_{1,i,j}^{k-1}\right)\frac{\hat{A}_{1,i,j}^k p_{i,j}^k-\hat{A}_{1,i-1,j}^k p_{i-1,j}^k}{h_1}-$$

$$-\vartheta\left(-\hat{A}_{1,i,j}^{k-1}\right)\frac{\hat{A}_{1,i+1,j}^k p_{i+1,j}^k-\hat{A}_{1,i,j}^k p_{i,j}^k}{h_1}-$$

$$-\vartheta\left(\hat{A}_{2,i,j}^{k-1}\right)\frac{\hat{A}_{2,i,j}^k p_{i,j}^k-\hat{A}_{2,i,j-1}^k p_{i,j-1}^k}{h_2}-\vartheta\left(-\hat{A}_{2,i,j}^{k-1}\right)\frac{\hat{A}_{2,i,j+1}^k p_{i,j+1}^k-\hat{A}_{2,i,j}^k p_{i,j}^k}{h_2}+$$

$$+\frac{\hat{B}_{11,i+1,j}^k p_{i+1,j}^k-2\hat{B}_{11,i,j}^k p_{i,j}^k-\hat{B}_{11,i-1,j}^k p_{i-1,j}^k}{h_1^2},$$

$$i=-n_1+1,\ldots,n_1-1,\ j=-n_2+1,\ldots,n_2-1;k=0,1,\ldots,$$

где

$$p_{i,j}^k\approx p\left(y_{1i},y_{2j},t_k\right),\ \hat{A}_{l,i,j}^k\approx\hat{A}_l\left(y_{1i},y_{2j},t_k\right),\ l=1,2;$$

$$\hat{B}_{11,i,j}^k\approx\hat{B}_{11}\left(y_{1i},y_{2j},t_k\right),\ y_{1i}=ih_1,\ y_2=jh_2,\ t_k=k\tau;$$

$\vartheta(u)$ — единичная функция, равная 0 при отрицательном и 1 при положительном аргументе.

На границе сеточной области решение считается равным нулю. Размер расчетной области выбирался из условия корректности данного краевого условия. На каждом шаге по времени система конечно-разностных уравнений решалась с высокой точностью итерационным методом Зейделя.

Исследование позволяет предположить, что улучшение вычислительных качеств конечно-разностного метода можно достичь при помощи применения разностных формул более высокого порядка точности и метода матричной прогонки.

Тестовая задача. В качестве тестовой рассматривалась линеаризованная задача для переходного процесса в цепи дросселя (1)–(3). Ее аналитическое решение находилось методом преобразования Лапласа и имеет вид:

$$x_1(t)=\int_0^t \frac{E(t-u)}{L} Ae^{au}\sin(\omega u+\varphi)du,\quad A=\frac{\sqrt{(a+d)^2+\omega^2}}{\omega},$$

$$d=\frac{1}{Cr_1},\quad \varphi=arctg\frac{\omega}{a+d},\quad a=-0{,}5\left(d+r_0L^{-1}\right),\quad \omega^2=dL^{-1}(r_0+r_1)-a^2,$$

$$x_2(t)=\int_0^t \frac{E(t-u)}{LC\omega r_1} e^{au}\sin(\omega u)du,\quad E(t)=\left(E_m+d_1\rho(t)\right)\sin(\omega_0 t),$$

$$E_m=75B,\quad \omega_0=100\pi,\quad d_1=0{,}02.$$

Данное решение представляет собой нестационарный случайный процесс, каждое сечение которого распределено по двумерному нормальному закону:

$$p_n(x_1,x_2)=\frac{exp\left\{-\frac{0.5}{1-r^2}\left[\frac{\left(x_1-x_1^0(t)\right)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{\left(x_1-x_1^0(t)\right)\left(x_2-x_2^0(t)\right)}{\sigma_1^2\sigma_2^2}+\frac{\left(x_2-x_2^0(t)\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}},\quad (7)$$

Его статистические характеристики имеют вид:

$$\left\langle x_j(t)\right\rangle=x_j^0(t),\ D\left[x_j(t)\right]=d_1^2\int_0^t K_j^2(t,u)du,\ \sigma_j(t)=\sqrt{D\left[x_j(t)\right]}\ ,\ j=1,2;$$

$$\left\langle x_1(t_1)x_2(t_2)\right\rangle=x_1^0(t_1)x_2^0(t_2)+d_1^2\int_0^{\min(t_1,t_2)} K_1(t_1,u)K_2(t_2,u)du,$$

$$\left\langle x_1(t)x_2(t)\right\rangle=x_1^0(t)x_2^0(t)+d_1^2\int_0^t K_1(t,u)K_2(t,u)du,$$

$$r(t)=\frac{x_1(t)x_2(t)-x_1^0(t)x_2^0(t)}{\sigma_1(t)\sigma_2(t)},$$

$$K_1(t,u)=AL^{-1}e^{a(t-u)}\sin(\omega(t-u)+\varphi)\sin(\omega_0 u),$$

$$K_2(t,u)=(LC\omega r_1)^{-1}e^{a(t-u)}\sin(\omega(t-u))sin(\omega_0 u).$$

Результаты моделирования для тестовой задачи. Задача (5)–(6) решалась на интервале времени от 0 до 0,02 с. В расчетах было принято: $E_m=75B$, $\omega_0=100\pi$, $r_0=1$ Ом, $L=0{,}1$ Гн, $C=2\cdot10^{-3}$ Ф, количество разбиений области интегрирования: по времени – $n=100$, по координатам x_1, x_2; $n_1=n_2=50$ (область изменения координат: $-y_{\max}\le y_1$, $y_2\le y_{\max}=0{,}1$). Время вычислений около 2 мин (решение сеточных уравнений вычислялось практически точно).

На рис. 5 представлены графики в относительных координатах для приближенного тренда случайного процесса $x_1^0(t)$, $x_2^0(t)$ (масштаб по вертикальной оси: 1 о.е.=5 А), а также среднеквадратического отклонения $\sigma_1(t)$ и его конечно-разностной оценки $\sigma_1^h(t)$ (масштаб по вертикальной оси: 1 о.е.=0,05 А). Масштаб по горизонтальной оси: 1 о.е.=20 мс.

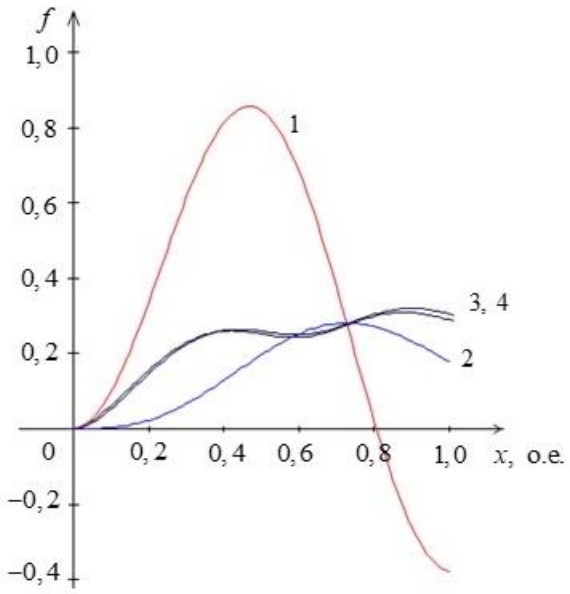


Рис. 5. Графики решения: 1 — $x_1(t)$, 2 — $x_2(t)$, 3 — $\sigma_1(t)$, 4 — $\sigma_1^h(t)$

На рис. 6 и 7 изображены графики плотности случайного процесса (вверху конечно-разностное решение $p^h(x_1,x_2,t)$, внизу – плотность двумерного нормального распределения $p_n(x_1,x_2)$, соответствующая формуле (7), а также среднеквадратического отклонения $\sigma_1(t)$ и его конечно-разностной оценки $\sigma_1^h(t)$. Масштаб по вертикальной оси: 1 о.е.$=3000$ А$^{-2}$, по горизонтальной оси: для рис. 5 — 1 о.е.$=0{,}05$ А, для рис. 7 — 1 о.е.$=0{,}025$ А.

Аналогичные вычисления осуществлены для плотности случайного процесса при вдвое меньших шагах интегрирования $(n_1=n_2=100)$. Время вычислений во втором варианте 15 мин (табл. 1).

Рассмотрение результатов решения тестовой задачи показывает весьма точное совпадение вычисленной и теоретической дисперсии, а также удовлетворительное совпадение графиков вычисленной и теоретической плотности распределения вероятностей.

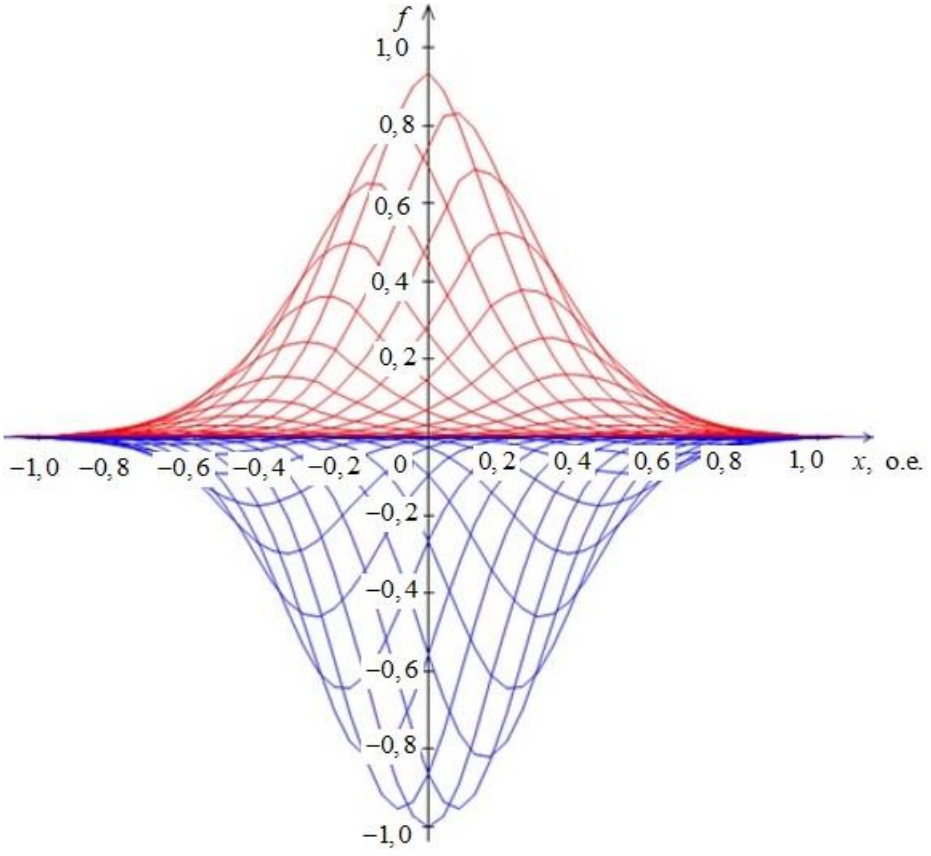


Рис. 6. Плотности случайного процесса (вверху — $p^h(x_1,x_2,t)$, внизу — $p_n(x_1,x_2)$, $x_2=\text{fixed}$)

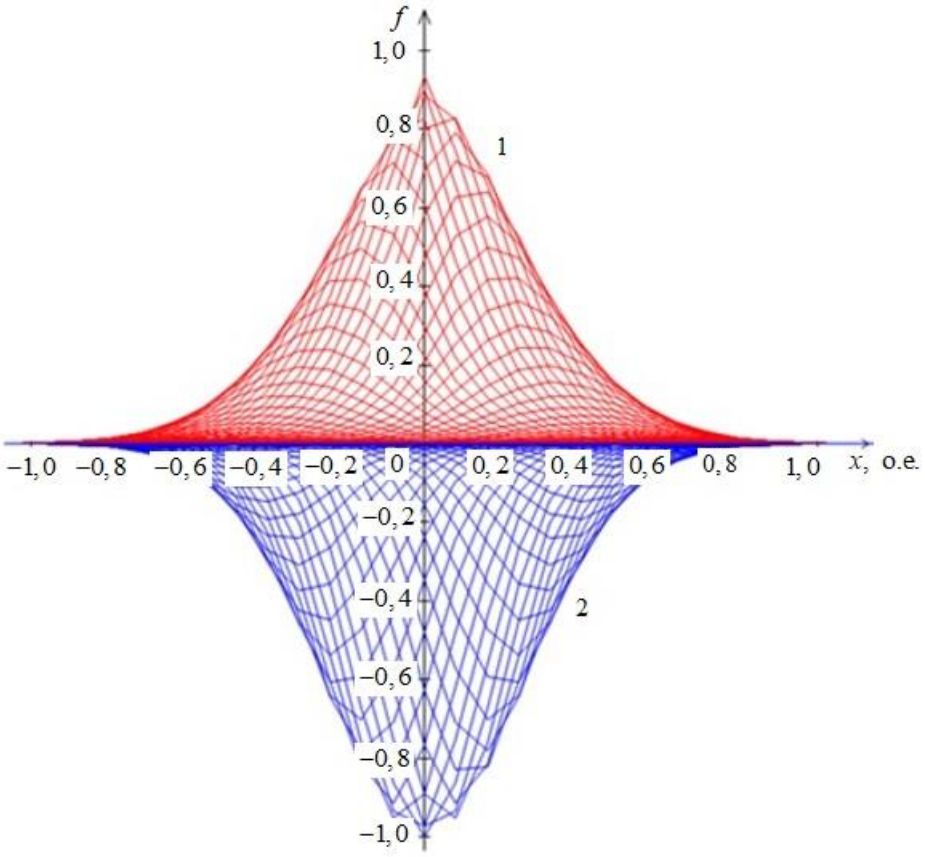


Рис. 7. Плотности случайного процесса (вверху $\overline{p^h}(x_1,x_2,t)$, внизу $\overline{p_n}(x_1,x_2)$, $x_1 = \text{fixed}$)

Таблица 1

Результаты расчета

№	Величина	1 вариант	2 вариант
1	$x_1^0(t_F)$	-1,89	-1,89
2	$x_2^0(t_F)$	0,90	0,88
3	$\sigma_1(t_F)$	0,014	0,014
4	$\sigma_2(t_F)$	0,0064	0,0064
5	$\sigma_1^h(t_F)$	0,015	0,015
6	$\sigma_2^h(t_F)$	0,0069	0,0066
7	$\langle y_1(t_F)\rangle$	0,00	0,00
8	$\langle y_2(t_F)\rangle$	0,00	0,00
9	$r(t_F)$	0,82	0,82
10	$r^h(t_F)$	0,73	0,77

Результаты решения основной задачи. Основная задача отличается от тестовой наличием нелинейной индуктивности (см. п. 1) и решалась на интервале времени от 0 до 6,9 мс, на котором происходил бросок тока. Поскольку в области пика тока производные решения принимают большие значения, данная задача относительно трудна для численного решения уравнения Фоккера-Планка.

В расчетах было принято: количество разбиений области интегрирования: по времени — $n=500$, по координатам x_1, x_2, $n_1=100$, $n_1=20$ (область изменения координат: $-y_{\max}\le y_1,\ y_2\le y_{\max}=5$). Время вычислений около 5 мин (решение сеточных уравнений вычислялось практически точно).

На рис. 8 представлены графики в относительных координатах для приближенного тренда случайного процесса $x_1^0(t)$, $x_2^0(t)$ (масштаб по вертикальной оси: 1 о.е.=50 А), а также конечно-разностной оценки среднеквадратического отклонения $\sigma_1^h(t)$ (масштаб по вертикальной оси: 1 о.е.=2 А). Масштаб по горизонтальной оси: 1 о.е.=6,9 мс. График (3) отражает динамику изменения максимального значения плотности (масштаб по вертикальной оси: 1 о.е.=400 А^{-2}). Серия кривых (1) соответствует плотности распределения $p^h(x_1,x_2,t)$, $x_2=\text{fixed}$, а кривая (2) — значениям плотности распределения $p^h(0,x_2,t)$, т.е. максимуму плотности по x_1 (масштабы по вертикальной оси: 1 о.е.=8 А^{-2}, по горизонтальной оси соответственно — 1 о.е.=5 А и 1 о.е.=1 А). Различие характера графиков плотности объясняется отсутствием диффузии по координате x_2.

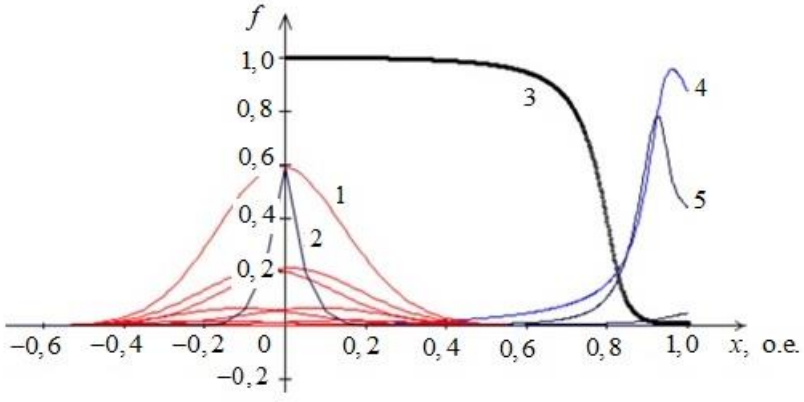


Рис. 8. Графики решения:
1 — $p^h(x_1,x_2,t_F)$, $x_2=\text{fixed}$; 2 — $p^h(0,x_2,t_F)$, 3 — $p^h(0,0,t)$, 4 — $x_1^0(t)$, 5 — $\sigma_1^h(t)$

Разряд нелинейной емкости при наличии белого шума. Шумы конденсаторов (фликкер-шум, электрические и акустические шумы, мерцание емкости, пьезоэлектрические шумы), наряду с тепловыми и токовыми шумами резисторов являются значительным источником внутренних шумов в усилителях и других электронных устройствах.

Цепь *LC*-контура с нелинейной емкостью описывается уравнениями:

$$L\frac{di}{dt}+u_C=0,\ \ i=\frac{dq}{dt},\ \ u_C=\frac{q}{C(q)},\ \ t>0;$$

$$i(0)=0,\ \ u_C(0)=u_{C0},\ \ C(q)=\frac{C_0}{1+kq^2},$$

где i — ток в цепи; L — индуктивность; u_C — напряжение на конденсаторе; u_{C0} — начальное напряжение на конденсаторе; $C=C(q)$ — емкость, содержащая шумовую компоненту, q — заряд конденсатора, C_0, k — некоторые положительные константы. В результате преобразований система уравнений приводится к следующей задаче Коши:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\ \ \frac{dx_2}{dt}=-\left(\lambda_1+\lambda_2x_1^2+d\xi(t)\right)x_1,$$

$$x_1(0)=x_{01},\ \ x_2(0)=x_{02},\ \ t>0,$$

где $q=x_1(t),\ \ i=x_2(t);\ \ \lambda_1,\lambda_2,\ \ d=\text{const},\ \ \xi(t)$ — нормированный белый шум.

На рис. 9 представлены результаты моделирования при меньшей интенсивности шума $d=0{,}1$ и следующих исходных данных: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=15$; $n_1=n_2=50$, $t_F=5$, $n=500$, $x_{1\max}=x_{2\max}=1$; $x_{01}=0$, $x_{02}=1$.

Масштаб по вертикали для плотности: 1 о.е.$=31{,}25\ \text{А}^{-2}$, по горизонтали — 1 о.е.$=1$ А. Масштаб по вертикали для среднеквадратического отклонения: 1 о.е.$=1{,}25$ А. Значения решения в конечный момент времени: $x_1(t_F)=-0{,}44$, $x_2(t_F)=-0{,}73$, $\langle x_1(t_F)\rangle=0{,}015$, $\langle x_2(t_F)\rangle=0{,}088$, $\sigma_1(t)=0{,}14$, $\sigma_2(t)=0{,}23$, $r=-0{,}49$;

Из рассмотрения результатов следует, что имеют место значительные дисперсии значений тока, поэтому метод малого параметра неприменим. Плотности решения асимметричны, имеют место большие хвосты распределения, значительное отличие от нормального распределения. Также шум относительно трудоемко моделировать методом Монте-Карло. По этим причинам моделирование на основе численного решения уравнения Фоккера-Планка информативно и в ряде случаев целесообразно перед применением других методов, например,

метода моментов.

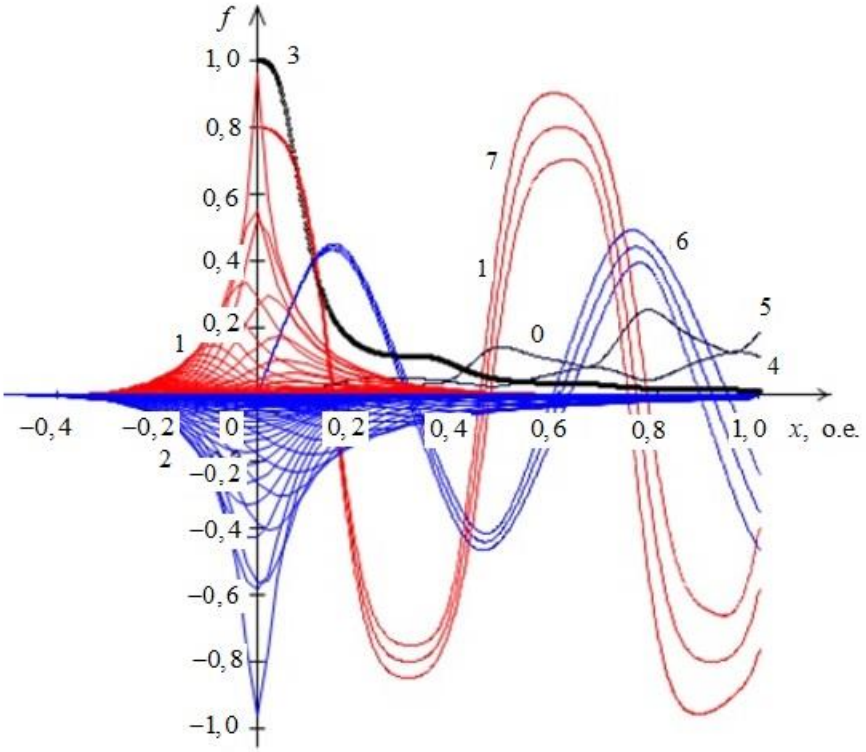


Рис. 9. Графики решения:
1 — $p(x_1, x_2 = \text{fixed}, t)$, $x_2 = \text{fixed}$; 2 — $p(x_1 = \text{fixed}, x_2, t)$, 3 — $p(0,0,t)$, 4 — $\sigma_1(t)$,
5 — $\sigma_2(t)$; 6 — $\{x_1(t), x_1(t) \pm \sigma_1(t)\}$; 7 — $\{x_2(t) \pm \sigma_2(t)\}$

Моделирование цепи автогенератора при наличии белого шума. На рис. 10 представлена эквивалентная схема низкочастотного радиофизического генератора с источниками шума, где $G_N(U)$ — нелинейная проводимость с вольтамперной характеристикой $I = -G_0 U + bU^3$; G, C, L — постоянные проводимость, емкость и индуктивность, $I_{\text{ш}}$ — эквивалентный шумовой ток, E — источник постоянного напряжения.

Стохастическое дифференциальное уравнение автогенератора имеет вид [1]:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,\ \frac{dx_2}{dt} = \left(k_0 - x_1^2\right)x_2 - x_1 + \sqrt{2D}\xi(t),\ x_1(0) = x_{01},$$
$$x_2(0) = x_{02},\ t > 0,$$

где x_1 — величина, пропорциональная напряжению U, k_0 — безразмерный параметр возбуждения, D — определяет интенсивность шума, $\xi(t)$ — нормированный белый шум.

На рис. 11 представлены результаты моделирования при следующих исходных данных: $D=0{,}0001, k_0=0{,}05$, $n_1=n_2=20$, $t_F=2\pi$, $n=100$, $x_{1\max}=x_{2\max}=0{,}2$; $x_{01}=0{,}45$, $x_{02}=0$.

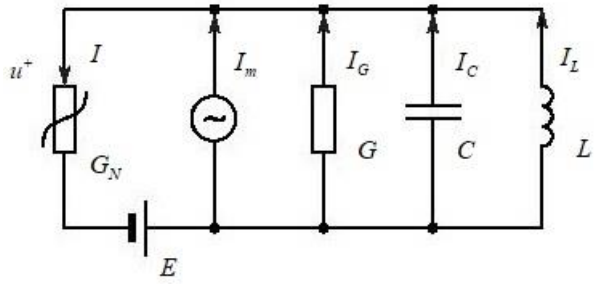


Рис. 10. Схема автогенератора [1]

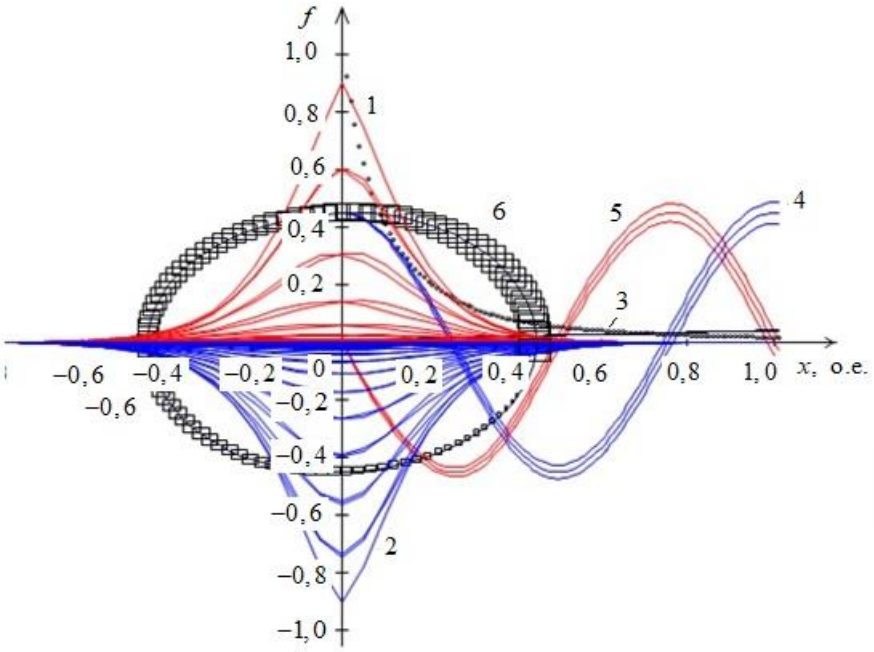


Рис. 11. Графики решения:

1 — $p\left(x_1, x_2=\text{fixed}, t\right)$; 2 — $p\left(x_1=\text{fixed}, x_2, t\right)$, 3 — $p(0,0,t)$;

4 — $\left\{x_1(t), x_1(t)\pm\sigma_1(t)\right\}$; 5 — $\left\{x_2(t)\pm\sigma_2(t)\right\}$;

6 — фазовый портрет полосы решений

$\left\{x_1(t)-\sigma_1(t)<x_1<x_1(t)+\sigma_1(t),\ x_2(t)-\sigma_2(t)<x_2<x_2(t)+\sigma_2(t)\right\}$

Масштаб по вертикали для плотности: 1 о.е.$=200$ А$^{-2}$, по горизонтали — 1 о.е.$=0{,}2$ А, масштаб по вертикали для $x_1(t)$, $x_2(t)$: 1 о.е.$=1$ А. Значения решения в конечный момент времени: $x_1(t_F)=0{,}45$, $x_2(t_F)=-0{,}03$, $\langle x_1(t_F)\rangle=-0{,}0008$, $\langle x_2(t_F)\rangle=-0{,}00009$, $\sigma_1(t)=0{,}037$, $\sigma_2(t)=0{,}04$, $r=-0{,}03$.

Моделирование показывает, что дисперсии решения в целом растут со временем, но ограниченны и постепенно устанавливается стационарный режим с соответствующей плотностью распределения вероятностей.

Выводы. Рассмотрен ряд известных методов для решения стохастических задач теории электрических и электронных цепей при помощи интервальных и двусторонних методов, а также уравнения Фоккера-Планка.

Осуществлено сравнительное исследования эффективности рассматриваемых методов, рассмотрено решение некоторых типичных задач теории электрических и электронных цепей с неточно заданными и случайными параметрами и характеристиками.

Полученные результаты могут использоваться в практике расчета и проектирования различных электронных и электротехнических устройств.

Благодарность. Выражаем благодарность профессору Некрасову С.А. за всестороннюю помощь при подготовке рукописи статьи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. *Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций*. Москва, Интеллект, 2009, 312 с.

[2] Тихонов В.И. *Статистическая радиотехника*. Москва, Радио и связь, 1982, 624 с.

[3] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И. Статистические свойства динамического хаоса. *Успехи физических наук*, 2005, № 175 (2), с. 163–179.

[4] Беляков Ю.Н., Курмаев Ф.А., Баталов Б.В. *Методы статистических расчетов микросхем на ЭВМ*. Москва, Радио и Связь, 1985, 232 с.

[5] Гехер К. *Теория чувствительности и допусков электронных цепей*. Москва, Советское Радио, 1973, 200 с.

[6] Richard C.-J.S., Michael W.T. Simulation and sensitivity of linear analog circuits under parameter variations by Robust interval analysis. *ACM Transactions on Design Automation of Electronic Systems*, 1999, vol. 4, iss. 3, pp. 280–312.

[7] Денисенко В.В. Моделирование разброса параметров транзистров в КМОП СБИС. *Компоненты и технологии*, 2004, № 1, с. 28–34.

[8] Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. *Основы теории цепей*. Москва, Энергия, 1975, 752 с.

[9] Nekrasov S.A. Interval methods and algorithms of global nonlinear optimization and their application to designing electrotechnical devices. Part I. *Elektrichestvo*, 2001, no. 8, pp. 43–49.

[10] Nekrasov S.A. Using the interval and bilateral methods for optimizing the design

of electro-magnets under conditions of inexact specified initial data. Part 2. *Elektrichestvo*, 2002, no. 7, pp. 54–58.

[11] Nekrasov S.A. A numerical method for solving dynamical systems with lumped parameters which accounts for an input data error. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2016, no. 10 (4), pp. 528–537.

[12] Nekrasov S.A. Bilateral methods for the numerical integration of initial-and boundary-value problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1995, vol. 35, no. 10, pp. 1189–1202.

Статья поступила в редакцию 25.09.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Арутюнян Р.В., Арутюнян Т.Р. Моделирование и методы расчета электрических цепей с приближёнными характеристиками. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 4, с. 50–68.

Арутюнян Роберт Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ. e-mail: rob57@mail.ru

Арутюнян Тигран Робертович — инженер-программист, АО «ВПК «НПО машиностроения». e-mail: tigran_201094@mail.ru

Modeling and methods of calculation of electric circuits with approximate characteristics

© R.V. Harutyunyan[1], T.R. Harutyunyan[2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2]Joint stock company "Military and industrial corporation JSC "MIC "Mashinostroyenia", Reutov, Moscow Region, 143966, Russia

The article investigates two approaches to the calculation of electric circuits in the conditions of uncertainty in the initial data or the influence of random influences, noise of different nature. The first approach is based on the application of interval and bilateral methods and is to some extent an example of robust methods. The second approach uses the stochastic Fokker-Planck equation and is the most informative. Although the application of the Fokker-Planck equation is limited by some conditions (random effects have the character of white noise or are subject to the Gaussian distribution law). This method has a wide scope of applicability. In turn, there are various methods for solving this differential equation. The arti cle considers the solution of the corresponding problem using the finite difference method. Examples of modeling of specific electrical and electronic circuits are given.

Keywords: *body electric circuits, parameters, characteristics, errors, perturbations, noise, approximate methods, stochastic equations*

REFERENCES

[1] Anishchenko V.S., Astahov V.V., Vadivasova T.E. *Regulyarnye i haoticheskie avtokolebaniya. Sinhronizaciya i vliyanie fluktuacij* [Regular and chaotic self-oscillations. Synchronization and influence of fluctuations]. Moscow, Intelekt Publ., 2009, 312 p.

[2] Tikhonov V.I. *Statisticheskaya radiotekhnika* [Statistical radio engineering].

Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1982, 624 p.
[3] Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Okrokverckhov G.A., Strelkova G.I. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk — Physics-Uspekhi*, 2005, no. 175 (2), pp. 163–179.
[4] Belyakov YU.N., Kurmaev F.A., Batalov B.V. *Metody statisticheskih raschetov mikroskhem na EVM* [Methods of statistical calculations of microcircuits on a computer]. Moscow, Radio i Svyaz' Publ., 1985, 232 p.
[5] Gekher K. *Teoriya chuvstvitel'nosti i dopuskov elektronnyh cepej* [Theory of sensitivity and tolerances of electronic circuits]. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1973, 200 p.
[6] Richard C.-J.S., Michael W.T. Simulation and sensitivity of linear analog circuits under parameter variations by Robust interval analysis. *ACM Transactions on Design Automation of Electronic Systems*, 1999, vol. 4, iss. 3, pp. 280–312.
[7] Denisenko V.V. *Komponenty i tekhnologii — Components & Technologies*, 2004, no. 1, pp. 28–34.
[8] Zeveke G.V., Ionkin P.A., Netushil A.V., Strahov S.V. *Osnovy teorii cepej* [Fundamentals of chain theory]. Moscow, Energiya Publ., 1975, 752 p.
[9] Nekrasov S.A. Interval methods and algorithms of global nonlinear optimization and their application to designing electrotechnical devices. Part I. *Elektrichestvo*, 2001, no. 8, pp. 43–49.
[10] Nekrasov S.A. Using the interval and bilateral methods for optimizing the design of electro-magnets under conditions of inexact specified initial data. Part 2. *Elektrichestvo*, 2002, no. 7, pp. 54–58.
[11] Nekrasov S.A. A numerical method for solving dynamical systems with lumped parameters which accounts for an input data error. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2016, no. 10 (4), pp. 528–537.
[12] Nekrasov S.A. Bilateral methods for the numerical integration of initial-and boundary-value problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1995, vol. 35, no. 10, pp. 1189–1202.

Harutynyan R.V., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 60 scientific publications. e-mail: rob57@mail.ru

Harutyunyan T.R., engineer-programmer, Joint stock company “Military and industrial corporation JSC “MIC “Mashinostroyenia”. e-mail: tigran_201094@mail.ru