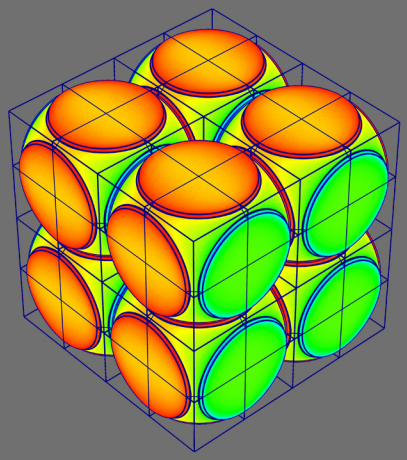
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Тимофеев В.Н. Моделирование дозвукового отрывного обтекания тел с донным срезом по схеме течения с эквивалентной полубесконечной поверхностью при малых углах атаки. Математическое моделирование и численные методы, 2019, № 4, с. 31–49.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/207/

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.89
11.10.2026 18:12:08

УДК 531.6.011.32:532.582.4 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-4-3149

Моделирование дозвукового отрывного обтекания тел с донным срезом по схеме течения с эквивалентной полубесконечной поверхностью при малых углах атаки

© В.Н. Тимофеев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматривается дозвуковое обтекание цилиндрических тел с отрывом, локализованном в окрестности донного среза. Используется схема течения с эквивалентной поверхностью, содержащей полубесконечный участок. Даны рекомендации по формированию конфигурации такой эквивалентной полубесконечной поверхности при ненулевых углах атаки. Трудоемкость вычислений снижена за счет учета специфики применяемой схемы течения и использования П-образных вихревых нитей в методе дискретных вихрей. Представлены результаты математического моделирования обтекания цилиндрических тел с оживальной головной частью и донным срезом при малых углах атаки.

Ключевые слова: *математическое моделирование, дозвуковое отрывное обтекание, схема течения, эквивалентное тело, метод дискретных вихрей*

Введение. Применение математического моделирования дозвукового отрывного обтекания тел целесообразно при решении широкого круга практических задач в самых различных областях деятельности, что делает актуальным дальнейшее развитие и совершенствование подходов, методов и алгоритмов, используемых при изучении явлений отрыва потока. Основанные на теории вязкой среды и дающие наиболее полную информацию о параметрах потока в различных областях отрывного течения исследования, использующие методы решения уравнений Навье-Стокса [1–5], характеризуются достаточно сложными алгоритмами и требуют существенных вычислительных ресурсов. Большие вычислительные возможности необходимы и для применения многих моделей, базирующихся на теории идеальной среды [6-11]. Многообразие и громоздкость применяемых алгоритмов, а также большие трудности при согласования параметров в различных областях течения, являются характерными особенностями исследований [12, 13], в которых осуществляется полная реализация концепции вязко-невязкого взаимодействия [13].

Для сокращения затрат вычислительных мощностей была разработана методика [14] математического моделирования дозвукового отрывного обтекания тел с применением эквивалентной поверхности. Методологической основой построения расчетной схемы течения является концепция вязко-невязкого взаимодействия. В соответствии с

данной концепцией скорости и давления на внешней поверхности исследуемого тела следует определять из расчетов невязкого обтекания некоторого тела вытеснения, которое и поверхность которого будем называть эквивалентными. Считается, что эквивалентная поверхность Σ состоит из носовой $\Sigma^{(1)}$ и хвостовой $\Sigma^{(2)}$ частей, каждая из которых может содержать несколько участков. Рассматривается дозвуковое обтекание пространственных тел с отрывом потока в области непосредственно примыкающей к линии донного среза. Поэтому предполагается, что поверхность обтекаемого тела образует поверхность носовой части эквивалентного тела (рис. 1), а линия L_c стыковки носовой и хвостовой частей эквивалентной поверхности, совпадает с линией донного среза.

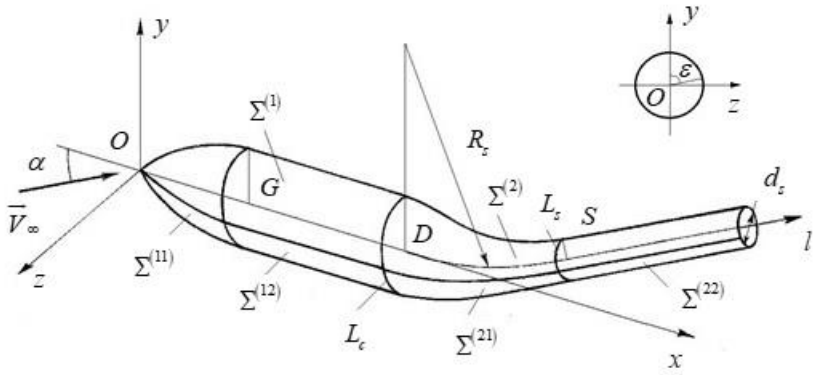


Рис. 1. Схема течения с эквивалентной полубесконечной поверхностью: L_c — линия стыковки носовой $\Sigma^{(1)}$ и хвостовой $\Sigma^{(2)}$ частей эквивалентной поверхности

В данной методике реализуется подход, предусматривающий формирование хвостовой части эквивалентной поверхности с достаточно простой конфигурацией, что позволяет избежать необходимости проведения сложных и затратных по ресурсам процедур согласования параметров вязкого и невязкого обтекания. Для математического моделирования предусмотрено использование схем течения с эквивалентными поверхностями двух видов [15]: содержащей хвостовую часть конечной длины или с участком, уходящим на бесконечность вниз по потоку от линии донного среза. В схеме течения второго вида полубесконечнымы будем называть сам означенный участок, всю эквивалентную поверхность, а также её хвостовую часть и эквивалентное тело. Численное моделирование проводится с использованием алгоритмов метода дискретных вихрей [17, 18, 19]. В случае применения схемы течения с эквивалентной полубесконечной поверхностью моделирование применяются панели, вихревые многоугольники и П-образные вихревые нити [20]. Опубликованные результаты исследований,

выполненных с применением указанной методики, относятся к изучению режимов обтекания при нулевых углах атаки. В данной статье рассматривается распространение области применения методики с эквивалентной полубесконечной поверхностью на моделирование обтекания тел с ненулевыми углами атаки.

Построение схемы течения. Моделируется обтекание цилиндрических тел с головной частью оживальной формы и плоским донным срезом при ненулевых углах атаки. Используются безразмерные значения длин и координат, которые получаются отношением соответствующей размерной величины к диаметру миделевого сечения d_m^*. Поэтому безразмерное значение диаметра миделевого сечения принимается равным единице $d_m = 1$. У исследуемых тел сопряжение поверхностей оживальной $\sum^{(11)}$ и цилиндрической частей $\sum^{(12)}$ осуществляется плавно без излома образующей. Безразмерные длины головной (l_g) и цилиндрической (l_c) частей измеряются вдоль координатной линии Ox от точки O до точки G и от точки G до точки D, соответственно. Поверхность оживальной головной части образована вращением вокруг оси Ox дуги радиуса R_g, который можно выразить через длину головной части по формуле $R_g = l_g^{\,2} + 1/4$. Таким образом геометрическая форма исследуемого обтекаемого тела полностью определяется безразмерными длинами головной и длины цилиндрической частей. Суммарная длина обтекаемого тела равняется $l_g + l_c$ и обозначается через l_b.

Конфигурация поверхности хвостовой части эквивалентного тела формируется, ориентируясь на реализацию упомянутого выше требования её достаточной простоты. Сначала в соответствии с рекомендациями работы [15] строится начальное приближение формы поверхности $\Sigma^{(2)}$ хвостовой части, соответствующее режиму обтекания с нулевым углом атаки α (рис. 2а). При этом определяются начальные приближения для значений диаметра d_s полубесконечного участка и длины l_s (вдоль оси l от точки D до точки S) участка $\Sigma^{(21)}$ поверхности хвостовой части эквивалентного тела .

Затем осуществляется плавная деформация участка $\Sigma^{(21)}$ хвостовой части эквивалентной поверхности обеспечивающая поворот полубесконечного участка на такой угол чтобы его ось оказалась параллельной вектору скорости набегающего потока (рис. 1 и 2б, в). Для исследуемых тел указанная деформация получалась посредством искривления оси участка поверхности $\Sigma^{(21)}$ с сохранением прямолинейности оси полубесконечного участка $\Sigma^{(22)}$. В данной статье радиус

искривления R_s принимается постоянным и предполагается, что в сечениях поверхности $\Sigma^{(22)}$, перпендикулярных к оси, получаются окружности , диаметр которых уменьшается от значения $d_m = 1$ до диаметра d_s полубесконечного участка с сохранением закона изменения площади поперечного сечения, определенного при нулевом угле атаки.

Математическая модель, вихревая схема течения и алгоритм решения. Рассматривается установившееся пространственное обтекание исследуемого тела заданной геометрической формы потоком газа с умеренной дозвуковой скоростью. Газовая среда считается несжимаемой, однородной и невесомой, а её движение описывается системой, состоящей из уравнения неразрывности и уравнений движения в форме Эйлера.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}; \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}, \end{cases} \tag{1}$$

где u, v, w, ρ и p — координаты вектора скорости, плотность и статическое давление частиц среды, определяемые в декартовой системе координат $Oxyz$, связанной с обтекаемым телом. Вектор скорости потока определяется по формуле $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$.

Согласно граничному условию непротекания поверхности эквивалентного тела нормальная к этой поверхности составляющая вектора скорости частиц среды равняется нулю:

$$\bar{V}(M_0)\cdot\bar{n}(M_0)\big|_{\Sigma} = 0,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка на поверхности Σ; $\bar{n}(M_0)$ — орт вектора нормали к Σ в точке M_0.

В соответствии с граничным условием затухания возмущений вектор скорости частиц среды $\bar{V}(M_0) = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$ при $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \to \infty$ должен стремиться к вектору скорости набегающего потока $\vec{V}_\infty = u_\infty\vec{i} + v_\infty\vec{j} + w_\infty\vec{k}$.

Предполагается, что вне поверхности эквивалентного тела течение является потенциальным. Поэтому вектор возмущенной скорости, равный разности $\vec{V}(M_0)-\vec{V}_\infty$, считается равным градиенту потенциала $\varphi(M_0)$ возмущенных скоростей, а вектор скорости частиц среды находится по следующей формуле:

$$\vec{V}\left(M_0\right)=\vec{V}_\infty+\vec{\nabla}\varphi\left(M_0\right), \tag{2}$$

где $\vec{\nabla}=\vec{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x_0}+\vec{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y_0}\,\vec{j}+\vec{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z_0}$ — оператор Гамильтона.

Подстановка соотношения (2) в уравнение неразрывности из системы (1) дает уравнение Лапласа для потенциала возмущенных скоростей. В соответствии с граничными условиями непротекания поверхности обтекаемого тела и затухания возмущений на бесконечности потенциал возмущенных скоростей является решением следующей внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi\left(M_0\right)=0,\ \ M_0\notin\Sigma; \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi\left(M_0\right)}{\partial n}\right|_{\Sigma}=-\vec{V}_\infty\cdot\vec{n}\left(M_0\right)\Big|_{\Sigma},\ \ M_0\in\Sigma; \tag{4}$$

$$\lim_{R\to\infty}\varphi\left(M_0\right)=0, \tag{5}$$

$$\lim_{R\to\infty}\nabla\varphi\left(M_0\right)=0, \tag{6}$$

где $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial {x_0}^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial {y_0}^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial {z_0}^2}$ — оператор Лапласа; $\vec{n}(M_0)$ — орт нормали к поверхности Σ в точке M_0.

Внешняя задача Неймана (3)–(6) имеет единственное решение, которое ищется в виде потенциала двойного слоя

$$\varphi\left(M\right)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}\,(M)}{r^3}\,g(M)\,d\sigma, \tag{7}$$

где $\bar{r}$ — вектор, направленный в точку вычисления M_0 из точки M, расположенной на элементарной площадке $d\Sigma$ с площадью $d\sigma$ и ортом вектора нормали $\vec{n}\left(M\right)$; r — модуль вектора $\vec{r}$; $g\left(M\right)$ — поверхностная плотность потенциала двойного слоя.

Потенциал возмущенных скоростей $\varphi\left(M_0\right)$ является решением сформулированной внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа

(3)–(6), если его поверхностная плотность удовлетворяет следующему интегральному уравнению (7):

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}(M)}{r^3}g(M)d\sigma=-\overrightarrow{V_\infty}\cdot\vec{n}(M_0). \qquad (8)$$

При численном решении интегрального уравнения (8) участки $\Sigma^{(11)}$, $\Sigma^{(12)}$ и $\Sigma^{(21)}$ поверхности эквивалентного тела аппроксимируется набором панелей Σ_k, $k=1,...N$, на каждой из которых плотность потенциала двойного слоя считается постоянной величиной, равной g_k, $k=1,...,N$. В случае ненулевых углов атаки и скольжения для аппроксимации эквивалентной поверхности применяется набор прямоугольников и треугольников [20], а на участке $\Sigma^{(21)}$ хвостовой части эквивалентного тела дополнительно используются трапеции и четырехугольники произвольной формы. Полубесконечный участок $\Sigma^{(22)}$ эквивалентного тела моделируется панелями Σ_k $k=N+1,...,N+N_r$, представляющими собой прямоугольники, у которых одна из сторон устремляется в бесконечность (будем называть их полубесконечными прямоугольниками); здесь N_r — количество панелей указанного рода. Поверхностная плотность потенциала двойного слоя на каждом полубесконечном прямоугольнике также считается постоянной величиной, равной g_k $k=N+1,...,N+N_r$. Обозначим суммарное число панелей $N+N_r$ через N_t. В соответствии с формулами (2) и (7) скорость потока газовой среды определяется соотношением

$$\vec{V}(M_0)=\overrightarrow{V_\infty}+\sum_{k=1}^{N_t}g_k\left(\frac{1}{4\pi}\nabla\iint\limits_{\Sigma_k}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}(M)}{r^3}g(M)d\sigma\right). \qquad (9)$$

Если ввести в рассмотрение векторы функции скорости, индуцированной в точке M_0 потенциалом двойного слоя, который размещен на панели Σ_k $(k=1,...,N_t)$ и имеет постоянную поверхностную плотность g_k

$$\vec{w}_k(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\nabla\iint\limits_{\Sigma_k}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}(M)}{r^3}d\sigma,$$

то равенство (9) примет следующий вид:

$$\vec{V}(M_0)=\overrightarrow{V_\infty}+\sum_{k=1}^{N_t}(-g_k)\vec{w}_k(M_0).$$

Градиент потенциала двойного слоя, размещенного на панели Σ_k с постоянной плотностью g_k, равен [18] вектору скорости, индуцированной замкнутой вихревой нитью L_k, расположенной на границе $\partial\Sigma_k$ указанной панели и имеющей циркуляцию

$$\Gamma_k = -g_k \tag{10}$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\frac{g_k}{4\pi}\nabla\iint\limits_{\Sigma_k}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}(M)}{r^3}g(M)d\sigma = \frac{\Gamma_k}{4\pi}\int\limits_{L_k}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3},$$

а векторы функции скорости, можно вычислять по формуле

$$\vec{w}_k\left(M_0\right) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{L_k}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3},\quad k=1,\ldots,N_t. \tag{11}$$

В соответствии с законом Био-Савара каждый из указанных векторов равен вектору скорости, индуцированной в точке M_0 вихревой нитью L_k с единичной циркуляцией. Представление векторов $\vec{w}_k\left(M_0\right)$ функции скорости в форме (11) позволяет отыскивать скорость частиц газа в виде суммы скорости набегающего потока и скоростей, индуцируемых всеми вихревыми нитями, моделирующими поверхность тела

$$\vec{V}\left(M_0\right) = \vec{V}_\infty + \sum_{k=1}^{N_t}\Gamma_k\vec{w}_k\left(M_0\right), \tag{12}$$

и использовать алгоритмы метода дискретных вихрей [19] .

Для нахождения численного решения на границах панелей Σ_k, имеющих конечные размеры, располагаются вихревые многоугольники L_k, $k=1,\ldots,N$ циркуляции Γ_k которых подлежат определению в ходе дальнейших вычислений. Каждый из этих вихревых многоугольников L_k составляется из вихревых отрезков L_{kj}, $k=1,\ldots,N$; $j=1,\ldots,T_k$, где T_k — число сторон данного многоугольника. Для вихревого многоугольника L_k вектор $\vec{w}_k\left(M_0\right)$ функции скорости находится как сумма векторов $\vec{w}_{kj}\left(M_0\right)$ функций скорости составляющих его вихревых отрезков

$$\vec{w}_k\left(M_0\right) = \sum_{j=1}^{T_k}\vec{w}_{kj}\left(M_0\right),\quad k=1,\ldots,N.$$

На границах полубесконечных прямоугольников Σ_k ($k = N+1,...,N_t$), моделирующих участок $\Sigma^{(22)}$ хвостовой части эквивалентной поверхности, размещаются П-образные вихревые нити L_k, $k = N+1,...,N_t$. Два из трех вихревых отрезков, образующих каждую такую вихревую нить, являются полубесконечными. Подчеркивая полубесконечность указанных объектов вводятся дополнительные обозначения: $L_{\Pi k}$, $k = N+1,...,N_t$ — для П-образных вихревых нитей и $\vec{w}_{\Pi k}(M_0)$, $k = N+1,...,N_t$ — для векторов функций скорости, индуцированных этими нитями в точке M_0. Для всех вихревых многоугольников L_k, $k = 1,...,N$ и П-образных вихревых нитей $L_{\Pi k}$, $k = N+1,...,N_t$ векторы функции скорости $\vec{w}_k(M_0)$, $k = 1,...,N$ и $\vec{w}_k(M_0) = \vec{w}_{\Pi k}(M_0)$, $k = N+1,...,N_t$ определяются по адаптированным для компьютерных вычислений формулам, представленным в работе [20] через векторы функции скорости конечных и бесконечных вихревых отрезков.

Для нахождения циркуляций Γ_k, $k = 1,...,N_t$ на некотором множестве состоящем из N_ν точек C_ν, $\nu = 1,...,N_\nu$, которые будем называть контрольными и располагать на панелях Σ_ν, требуется выполнение граничного условия (4) непротекания поверхности эквивалентного тела. С целью сокращения количества неизвестных, циркуляции П-образных вихрей, которые располагаются вниз по потоку от линии L_s стыковки участков $\Sigma^{(21)}$ и $\Sigma^{(22)}$ эквивалентной поверхности, считаются равными циркуляциям вихревых многоугольников конечных размеров, примыкающим к указанной линии с противоположной стороны. Такой прием позволяет сократить число неизвестных циркуляций с N_t до N. Поэтому контрольные точки располагаются на поверхностях панелей $\sum_\nu$, $\nu = 1,...,N$ конечных размеров, которые аппроксимируют всю поверхность эквивалентного тела, за исключением её полубесконечного участка. Координаты контрольной каждой точки c_ν находится после определения её радиуса-вектора как среднего арифметического радиусов–векторов $\vec{r}_{\nu l}$, соответствующих l-м вершинам вихревого многоугольника L_k, размещенного на границах панели $\sum_\nu$ и имеющего T_ν сторон:

$$\vec{r}_{C_\nu} = (1/T_\nu)\sum_{l=1}^{T_\nu}\vec{r}_{\nu l}, \quad \nu = 1,...,N.$$

Целесообразно ввести в рассмотрение преобразованные векторы функции скорости, индуцированной в точке M_0 , которые определяются следующим образом

$$\vec{w}_k^*\left(M_0\right)=\vec{w}_k\left(M_0\right),\ k=1,...,N-N_r;$$
$$\vec{w}_k^*\left(M_0\right)=\vec{w}_k\left(M_0\right)+\vec{w}_{\Pi\, k+N_r}\left(M_0\right),\ k=N-N_r+1,...,N.$$

Использую преобразованные векторы функции скорости можно векторное равенство (12) заменить соотношением

$$\vec{V}\left(M_0\right)=\vec{V}_\infty+\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\vec{w}_k^*\left(M_0\right). \tag{13}$$

Нормальная производная потенциала возмущенных скоростей, определяемого как потенциал двойного слоя, на поверхности эквивалентного тела непрерывна, поэтому граничное условие непротекания (4), выполняемое на множестве контрольных точек, записывается в следующем в виде:

$$\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\left(\vec{w}_k^*(C_\nu)\cdot\vec{n}(C_\nu)\right)=-\vec{V}_\infty\cdot\vec{n}(C_\nu),\ \nu=1,...,N. \tag{14}$$

Вводя в рассмотрение величины

$$a_{\nu k}=\vec{w}_k^*(C_\nu)\cdot\vec{n}(C_\nu),\ \ \nu=1,...,N,\ \nu=1,...,N;$$
$$b_\nu=-\vec{V}_\infty\cdot\vec{n}(C_\nu),\quad \nu=1,...,N.$$

представим соотношения (14) как систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{N}a_{\nu k}\Gamma_k=b_\nu,\ \nu=1,...,N.$$

Решение этой системы с применением регуляризирующей функции, используемой в алгоритмах метода дискретных вихрей [17], позволяет найти циркуляции вихревых многоугольников $\Gamma_k,\ \nu=1,...,N$.

После нахождения циркуляций Γ_k вектор скорости потока в точках, расположенных вне поверхности эквивалентного тела определяется из соотношения (13). В контрольных точках, лежащих на поверхности эквивалентного тела, вектор скорости как градиент потенциала двойного слоя испытывает разрыв своей тангенциальной составляющей

$$\overrightarrow{\Delta V}(C_\nu)=g'_{\tau_1}(C_\nu)\,\vec{\tau}_1(C_\nu)+\ g'_{\tau_2}(C_\nu)\,\vec{\tau}_2(C_\nu), \tag{15}$$

где частные производные $g'_{\tau_1}(C_\nu)$ и $g'_{\tau_2}(C_\nu)$ вычисляются в контрольной точке C_ν по двум направлениям, задаваемых неколлинеарными ортами $\vec{\tau}_1(C_\nu)$ и $\vec{\tau}_2(C_\nu)$, лежащими в плоскости, касательной к эквивалентной поверхности Σ. С учетом соотношения (10) частные производные в формуле (15) определяются численным дифференцированием по значениям циркуляций ν-го и соседних с ним вихревых многоугольников. Вектор скорости газового потока в контрольных точках находится как предельное значение градиента потенциала двойного слоя [18]:

$$\vec{V}(C_\nu) = \bar{V}_\infty + \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \vec{w}_k^*(C_\nu) + 0,5\overrightarrow{\Delta V}(C_\nu). \qquad (16)$$

Безразмерные коэффициенты давления $c_p = 2(p - p_\infty)/(\rho V_\infty^2)$ находятся из интеграла Бернулли

$$p = p_\infty + 0,5\rho(V_\infty^2 - V^2),$$

где p, p_∞, $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ и $V_\infty = \sqrt{u_\infty{}^2 + v_\infty{}^2 + w_\infty{}^2}$ — статические давления и модули векторов скорости газовой среды и набегающего потока, соответственно. Поэтому в произвольной точке течения значение безразмерной скорости V/V_∞ определяет величину коэффициента давления

$$c_p = 1 - (V/V_\infty)^2. \qquad (17)$$

Для корректировки значений длины l_s поверхности $\sum^{(21)}$ и диаметра d_s полубесконечного участка эквивалентного тела проводится итерационный цикл. Требуется выполнение условия равенства расчетного осредненного значения коэффициента донного давления $(c_p)_c$ на линии L_c стыковки носовой и хвостовой частей эквивалентной поверхности и оценочного значения коэффициента донного давления $(c_p)_s$, который определяется по оценочному значению аэродинамического коэффициента донного сопротивления $(c_{x_{дон}})_s$ носовой части эквивалентного тела. При обтекании осесимметричных тел с нулевыми углами атаки картина течения оказывается осесимметричной, значение коэффициента давления c_p одинаково во всех точках линии стыковки L_c и принимается за расчетное значение коэффициента $(c_p)_c$. В случае ненулевых углов атаки расчетное значение $(c_p)_c$

определяется как среднее интегральное значение коэффициента давления c_p на линии стыковки L_c. Предполагается, что оценочное значение коэффициента донного сопротивления $(c_{x_{дон}})_s$ для удлиненных цилиндрических тел с головной частью и донным срезом складывается из двух составляющих. Первая составляющая вычисляется по формуле Хорнера ([14,16,20]) и определяется геометрическими параметрами обтекаемого тела и числом Рейнольдса, которое находится по скорости набегающего потока и по суммарной длине обтекаемого тела l_t^*. Вторая составляющая пропорциональна некоторой степени модуля угла атаки. Как в процессе отработки такого подхода, так и в данной статье считается, что при малых углах атаки второй составляющей можно пренебречь.

Цикл корректировки завершается выбором таких значений длины l_s поверхности $\Sigma^{(21)}$ и диаметра d_s полубесконечного участка, при которых выполняется равенство $(c_p)_c = (c_p)_s$. В ходе проведения цикла дополнительно обеспечивается соответствие значения диаметра d_s параметрам дальнего следа [13], образующегося за обтекаемым телом. Для обеспечения такого соответствия требуется выполнение соотношения $d_s = \sqrt{2c_x}$, где c_x — аэродинамический коэффициент суммарного сопротивления обтекаемого тела. Здесь коэффициент c_x равняется сумме аэродинамических коэффициентов сопротивления давления c_{x_p} и трения c_{x_τ} и коэффициента донного сопротивления $c_{x_{дон}}$: $c_x = c_{x_p} + c_{x_\tau} + c_{x_{дон}}$. Значения всех указанных коэффициентов получаются отнесением к скоростному напору набегающего потока и площади миделевого сечения. В ходе выполнения коррекционного цикла аэродинамические коэффициенты сопротивления давления c_{x_p} и трения c_{x_τ} определяются интегрированием коэффициентов давления c_p и поверхностного трения c_f, соответственно, по носовой поверхности $\Sigma^{(1)}$ эквивалентного тела. Местный коэффициент поверхностного трения c_f находится как для турбулентного пограничного слоя на плоской пластине [17] по формуле $c_f = 0.455(\lg \mathrm{Re})^{-2,58}$. Коэффициент донного сопротивления $c_{x_{дон}}$ для исследуемых в данной статье тел с плоским торцем за цилиндрическим участком обтекаемого поверхности вычисляется как взятое с обратным знаком расчетное значение коэффициента донного давления $\left(c_p\right)_s$.

По скорректированным значениям длины l_s и диаметра d_s осуществляется окончательный расчет распределения модуля безразмерной скорости $v = V/V_\infty$ и коэффициента давления c_p по поверхности обтекаемого тела.

Результаты численного моделирования. По рассмотренной выше методике проводилось численное моделирование тел, у которых головная часть, имеющая оживальную форму, плавно переходит в цилиндрическую часть с плоским торцом в донной области. Безразмерные длины головной и цилиндрической частей равняются l_g и l_c, соответственно. Поэтому носовая $\Sigma^{(1)}$ часть эквивалентной поверхности составляется из оживального $\Sigma^{(11)}$ и цилиндрического $\Sigma^{(12)}$ участков с такими же длинами l_g и l_c.

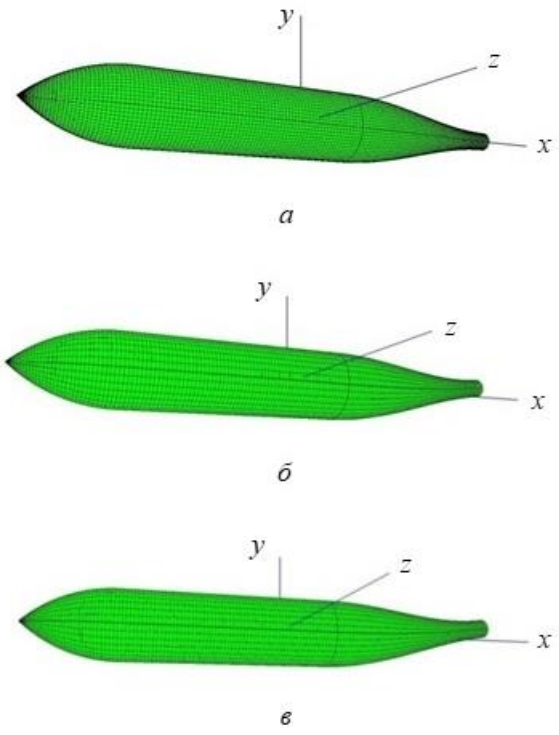


Рис. 2. Конфигурация эквивалентной поверхности при $l_c = 3$, $l_g = 1,25$ и $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$ для различных углов атаки:
а — $\alpha = 0^\circ$; *б* — $\alpha = 6^\circ$; *в* — $\alpha = 8^\circ$

В качестве примера применения методики с эквивалентной полубесконечной поверхностью представлены результаты моделирования

обтекания тела с $l_c = 3$ и $l_g = 1,25$ при значении числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$. После задания плотности ρ, статического давления p_∞, модуля вектора скорости набегающего потока V_∞ и угла атаки α последовательными расчетами по представленным выше алгоритмам с проведением корректировочного цикла определяется конфигурация хвостовой $\sum^{(2)}$ части $\sum^{(2)}$ эквивалентной поверхности. Для углов атаки α, равных 0°, 6°, 8°, полученные формы эквивалентной поверхности представлены на рис. 2 *а, б, в*, а при $\alpha = 4^\circ$ — на рис. 3. Поверхность $\Sigma^{(22)}$ полубесконечного участка хвостовой части эквивалентного тела, имеющая постоянный диаметр d_m и расположенная вниз по потоку от линии стыковки L_s, на данных рисунках не изображается.

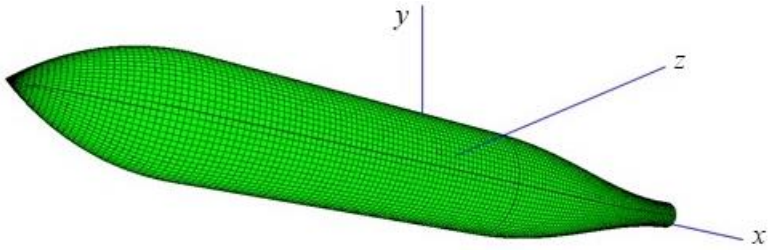


Рис. 3. Конфигурация эквивалентной поверхности при $l_c = 3$, $l_g = 1,25$, $\alpha = 4^\circ$ и $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$

Окончательный расчет распределения модуля безразмерной скорости $\nu = V/V_\infty$ и коэффициента давления c_p (рис. 4 и 5) по поверхности эквивалентного тела проводится по соотношениям (16) и (17).

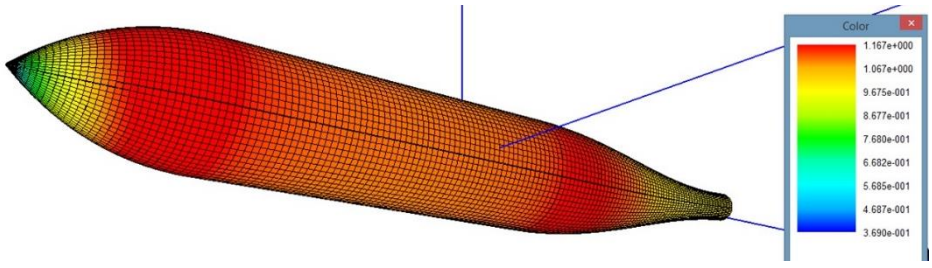


Рис. 4. Распределение безразмерной скорости ν по поверхности эквивалентного тела при $l_c = 3$, $l_g = 1,25$, $\alpha = 4^\circ$ и $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$

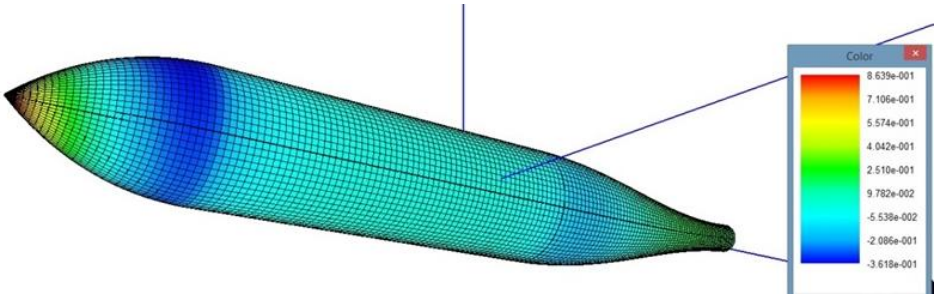


Рис. 5. Распределение коэффициента давления c_p по поверхности эквивалентного тела при $l_c = 3$, $l_g = 1,25$, $\alpha = 4^\circ$ и $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$

Для удобства анализа неравномерного распределение коэффициента давления c_p по поверхности эквивалентного тела строятся графики (рис. 6) зависимостей $c_p = f(l, \varepsilon)$ коэффициента давления от безразмерной координаты, отсчитываемой по оси l в различных продольных сечениях, расположение которых задается углом ε (см. рис. 1) . На рис. 6 кривые 1, 2 и 3 соответствуют верхнему, боковому и нижнему продольным сечениям, получающимся при значениях угла ε, равных 0°, 90°, 180°. Следует отметить, что в боковом продольном сечении кривая 2 мало отличается от кривой, задающей распределение коэффициента давления при обтекании этого же тела с нулевым углом атаки. Данное совпадение объясняется тем, что в силу малости угла атаки при нахождении оценочного значения коэффициента донного сопротивления c_{ps}, не учитывалась вторая составляющая, пропорциональная некоторой степени модуля этого угла. Вид кривых 1 и 3 закономерно соответствует ускорению или замедлению частиц газового потока в различных зонах поверхности эквивалентного тела (см. рис. 4). Например, при обтекании оживальной головной части с положительными углами атаки скорости частиц потока в нижней зоне поверхности меньше, чем в соответствующих точках её верхней зоны. Из интеграла Бернулли следует, что тогда, наоборот, давления в нижней зоне (кривая 3) будут больше, чем в верхней (кривая 1). Поэтому наибольшие по абсолютному значению разрежения наблюдаются в верхней зоне на некотором расстоянии вниз по потоку от линии сопряжения головной и цилиндрической частей обтекаемого тела. Аналогичным образом, учитывая, что хвостовая часть эквивалентной поверхности изгибается вверх, можно объяснить взаимное расположение кривых 1 и 3 в области, примыкающей к донному срезу.

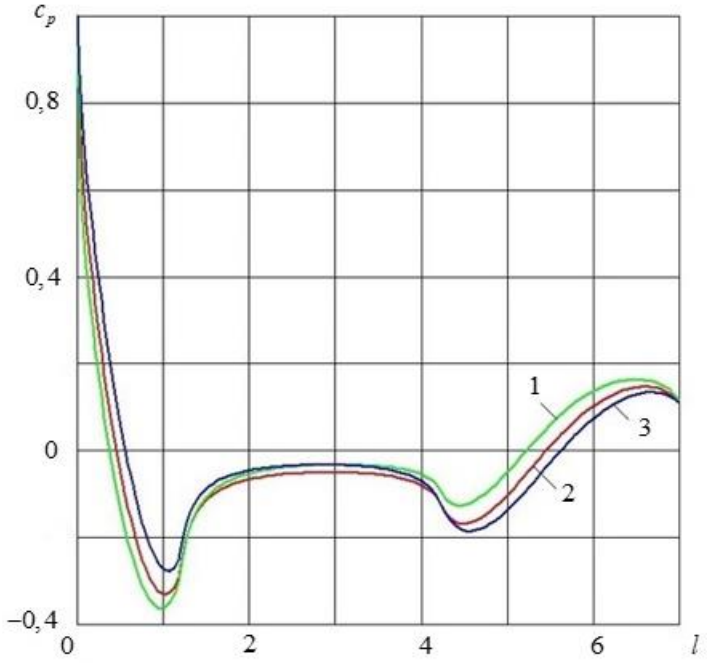


Рис. 6. Зависимость коэффициента давления c_p на поверхности эквивалентного тела от безразмерной продольной координаты l, отсчитываемой по оси эквивалентного тела, и угла ε при $l_c = 3$, $l_g = 1,25$, $\alpha = 4^\circ$ и $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$: *1* — $\varepsilon = 0^\circ$; *2* — $\varepsilon = 90^\circ$; *3* — $\varepsilon = 180^\circ$

Заключение. Предложены подходы, позволяющие расширить область применения методики моделирования, использующей схему течения с эквивалентной поверхностью, на задачи дозвукового отрывного обтекания тел при ненулевых углах атаки. Даны рекомендации по формированию конфигурации хвостовой части эквивалентной поверхности с полубесконечным участком. При численном моделировании методом дискретных вихрей снижена трудоемкость вычислений за счет учета специфики применяемой схемы течения и использования П-образных вихревых нитей. Проанализированы результаты математического моделирования обтекания цилиндрических тел с оживальной головной частью и донным срезом при малых углах атаки. Предложенная методика может также применяться для расчета параметров внешнего невязкого потока в задачах пограничного слоя и в практических задачах для оперативной оценки распределения скорости и давления на поверхности обтекаемого тела.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. Методы расчета различных течений*. Москва, Мир, 1991, 552 с.

[2] Патанкар С.В. *Численные методы решения задач теплообмена и динамики*. Москва, Энергоатомиздат, 1984, 152 с.

[3] Калугин В.Т., Соболев В.Ю. Математическое моделирование процессов дозвукового турбулентного обтекания стабилизирующих устройств летательных аппаратов в условиях отрыва потока. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2005, № 2, с. 20–30.

[4] Ефремова М.Ю., Крюков П.В., Галактионов А.Ю. Численный расчет аэродинамических характеристик сферического тела с протоком при дозвуковых скоростях. Вестник Московского государственного университета леса – Лесной вестник, 2015, № 1, с. 129–135.

[5] Вальгер С.А., Федоров А.В., Федорова Н.Н. Структура турбулентного отрывного течения в окрестности установленной на пластине призмы с квадратным сечением. *Теплофизика и Аэромеханика*, 2015, т. 22, № 1, с. 29–42.

[6] Белоцерковский С.М., Ништ М.И., Котовский В.Н., Федоров Р.М. *Трехмерное отрывное обтекание тел произвольной формы*. Москва, ЦАГИ, 2000, 265 с.

[7] Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. *Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок*. Москва, Ин-т механики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006, 184 с.

[8] Lewis R.I. *Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems*. Cambridge University Press, 2005, 592 p.

[9] Kuzmina K.S., Marchevskii I.K., Moreva V.S. Vortex sheet intensity computation in incompressible flow simulation around an airfoil by using vortex methods. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2018, vol. 10, iss. 3, pp. 276–287.

[10] Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Milani D., Ryatina E.P. Accuracy comparison of different approaches for vortex sheet discretization on the airfoil in vortex particles method. *Proceedings of 5th International Conference on Particle-Based Methods, Particles*,2017, pp. 691–702.

[11] Коцур О.С., Щеглов Г.А. Реализация метода обмена интенсивностями вортонов-отрезков для учета вязкости в методе вихревых элементов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 3, с. 48–67.

[12] Дергачев С.А., Щеглов Г.А. Моделирование обтекания тел методом вихревых элементов с использованием замкнутых вихревых петель. *Научный вестник МГТУ ГА*, 2016, № 223, с. 19–27.
DOI 10.26467/2079-0619-2016--223-19-27

[13] Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. *Отрывные и кавитационные течения. Основные свойства и расчет модели*. Москва, Наука, 1990, 384 с.

[14] Тимофеев В.Н. Математическое моделирование отрывного дозвукового обтекания осесимметричных тел с учетом донного давления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 10. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1246.html (дата обращения 17.10.2017).

[15] Тимофеев В.Н. Построение полубесконечного эквивалентного тела при математическом моделировании дозвукового отрывного осесимметричного обтекания. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4 (12), с. 67–83.

[16] Timofeev V.N. Mathematical simulation of the subsonic flow around the lengthening bodies with the flow separation in the region of ground shear with the use of an equivalent body. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1141, iss. 1, art. no 012095.

[17] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. Москва, Дрофа, 2003, 840 с.

[18] Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн)*. Москва, ТОО «Янус», 1995, 520 с.

[19] Аубакиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И., Ништ М.И. *Нелинейная теория крыла и ее приложения*. Алматы, Гылым, 1997, 448 с.

[20] Тимофеев В.Н. Особенности вихревой схемы при моделировании дозвукового отрывного обтекания с полубесконечным эквивалентным телом. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 4 (16), с. 73–91.

Статья поступила в редакцию 29.08.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тимофеев В.Н. Моделирование дозвукового отрывного обтекания тел с донным срезом по схеме течения с эквивалентной полубесконечной поверхностью при малых углах атаки. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 4, с. 31–49.

Тимофеев Валерий Николаевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных и методических работ. Область научных интересов: математическое моделирование, численные методы, механика жидкости и газа, аэродинамика, численные методы, методы оптимизации. e-mail: v_n_1951@mail.ru

Simulation of the subsonic detachable body with a bottom cut on the current pattern with an equivalent half-infinite surface at small angles of attack

© V.N. Timofeev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The subsonic flow of cylindrical bodies with a detachment located in the vicinity of the bottom cut is considered. The current scheme with an equivalent surface, which is accompanied by a half-infinite section is used. Recommendations have been given on the formation of a configuration of such an equivalent semi-infinite surface at non-zero attack angles. The laboriousness of the calculations is reduced by taking into account the specifics of the applied flow pattern and the use of P-shaped vortex threads in the method of discrete vortexes. The results of mathematical modeling of the flow of cylindrical bodies with a revitalized head and a bottom slice at small angles of attack are presented.

***Keywords**: mathematical simulation, subsonic detached flow, flow scheme, equivalent body, the method of single vortices*

REFERENCES

[1] Fletcher K. *Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostej. T. 2. Metody rascheta razlichnyh techenij* [Computational methods in fluid dynamics. Vol. 2. Methods for calculating different flows]. Moscow, Mir Publ., 1991, 552 p.

[2] Patankar S.V. *Chislennye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki* [Numerical methods for solving heat transfer and dynamics problems]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984, 152 p.
[3] Kalugin V.T., Sobolev V.Yu. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Mashinostroenie – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Mechanical Engineering*, 2005, no. 2, pp. 20–30.
[4] Efremova M.Yu., Kryukov P.V., Galaktionov A.Yu. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta lesa – Lesnoj vestnik– Bulletin of the Moscow state forest University – Forest Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 129–135.
[5] Val'ger S.A., Fedorov A.V., Fedorova N.N. Teplofizika i Aeromekhanika – *Thermophysics and Aeromechanics*, 2015, vol. 22, no. 1, pp. 29–42.
[6] Belotserkovskiy S.M., Nisht M.I., Kotovskiy V.N., Fedorov R.M. *Trekhmernoe otryvnoe obtekanie tel proizvolnoy formy* [Three-dimensional detached flow of the bodies of arbitrary form]. Moscow, TsAGI (Central Aerohydrodynamic Institute) Publ., 2000, 265 p.
[7] Andronov P.R., Guvernyuk S.V., Dynnikova G.Ya. *Vikhrevye metody rascheta nestatsionarnykh gidrodinamicheskikh nagruzok* [Vortex methods of calculation of nonstationary hydrodynamic loads]. Moscow, Institute of Mechanics Lomonosov MSU Publ., 2006, 184 p.
[8] Lewis R.I. *Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems*. Cambridge University Press, 2005, 592 p.
[9] Kuzmina K.S., Marchevskii I.K., Moreva V.S. Vortex sheet intensity computation in incompressible flow simulation around an airfoil by using vortex methods. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2018, vol. 10, iss. 3, pp. 276–287.
[10] Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Milani D., Ryatina E.P. Accuracy comparison of different approaches for vortex sheet discretization on the airfoil in vortex particles method. *Proceedings of 5th International Conference on Particle-Based Methods, Particles*,2017, pp. 691–702.
[11] Kocur O.S., Shcheglov G.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2018, no. 3, pp. 48–67.
[12] Dergachev S.A., Scheglov G.A. *Nauchnyy vestnik MGTU GA — Bulletin of Civil Aviation High Technologies*, 2016, no. 223, pp. 19–27.
DOI 10.26467/2079-0619-2016--223-19-27
[13] Gogish L.V., Stepanov G.Yu. *Otryvnye i kavitatsionnye techeniya. Osnovnye svoiystva i raschet modeli* [Detached and cavitational flows. Basic properties and model calculation]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 384 p.
[14] Timofeev V.N. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, no. 10. Available at: http://engjournal.ru/ catalog/mathmodel/aero/1246.html (accessed October 17, 2017).
[15] Timofeev V.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 4 (12), pp. 67–83.
[16] Timofeev V.N. Mathematical simulation of the subsonic flow around the lengthening bodies with the flow separation in the region of ground shear with the use of an equivalent body. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1141, iss. 1, art. no 012095.
[17] Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid mechanics]. Moscow, Drofa Publ., 2003, 840 p.
[18] Lifanov I.K. *Metod singulyarnykh integralnykh uravneniy i chislennyy eksperiment (v matematicheskoi fizike, aerodinamike, teorii uprugosti i difraktsii voln)*

[The method of singular integral equations and numerical experiment (in mathematical physics, aerodynamics, theory of elasticity and diffraction of waves)]. Moscow, LLP Yanus Publ., 1995, 520 p.

[19] Aubakirov T.O., Belotserkovskiy S.M., Zhelannikov A.I., Nisht M.I. *Nelineinaya teoriya kryla i ee prilozheniya* [Nonlinear wing theory and its applications]. Almaty, Gylym Publ., 1997, 448 p.

[20] Timofeev V.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 4 (16), pp. 73–91.

Timofeev V.N., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 40 research and methodological papers. Research interests include mathematical modeling, computational methods, fluid mechanics, aerodynamics, optimization methods. e-mail: v_n_1951@mail.ru