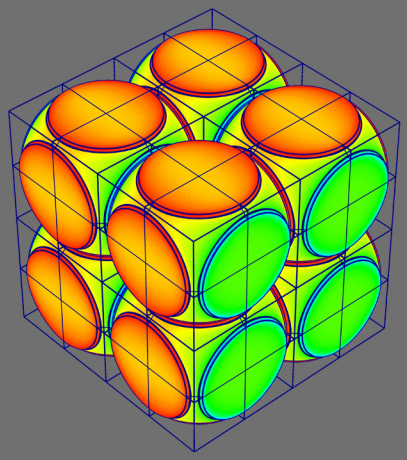
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Плюснин А.В. Численный расчет коэффициентов присоединенных масс тела, движущегося в слабо-сжимаемой жидкости. Математическое моделирование и численные методы. 2019. № 4. с. 15–30.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/206/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.187
14.11.2026 07:44:03

УДК 629.762 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-4-1530

Численный расчет коэффициентов присоединенных масс тела, движущегося в слабо-сжимаемой жидкости

© А.В. Плюснин[1,2]

[1]АО «ВПК «НПО машиностроения», г. Реутов, Московская обл., 143966, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Показано, что все 36 коэффициентов присоединенных масс и моментов инерции тела, находящегося в безграничной идеальной несжимаемой жидкости, можно ввести для мгновенного состояния покоя, используя потенциалы ускорений вместо классических потенциалов скоростей, определяющих, в общем случае, несуществующие безвихревые безотрывные течения. При помощи численного эксперимента, выполнявшегося в рамках акустического приближения, исследован смысл данной концепции применительно к реальным жидкостям, обладающим свойством сжимаемости.

Ключевые слова: *присоединенная масса, потенциал ускорений, несжимаемая жидкость, сжимаемая жидкость, акустическое приближение*

Введение. Как можно судить по характеру обоснования уравнений, с помощью которых описывается движение подводных аппаратов в воде [1, 2], модель идеальной несжимаемой жидкости остается попрежнему актуальной во многих практических вопросах гидродинамики. Сопряженная задача расчета пространственного подводного движения тела и расчета гидродинамических сил, оказывающих влияние на это движение, остается вне пределов досягаемости современных методов, если пользоваться сеточной дискретизацией нестационарных уравнений Навье–Стокса. Однако в рамках концепции Л. Прандтля о тонком пограничном слое вблизи тела, где основную роль играют эффекты вязкости и завихренности, внешнее течение вокруг некоторого воображаемого тела вытеснения [3, 4] можно рассматривать как практически невязкое. Правда при произвольных движениях тела в воде в это внешнее течение проникают вихри, отрывающиеся от тела, и применение потенциальной теории для математического моделирования внешнего течения во многих случаях оказывается неоправданным. Наиболее действенными при численном моделировании задач данного класса оказались методы дискретизации завихренности [5-10]. Новейшие достижения в развитии этих методов [11-15] позволяют успешно решать, в том числе, и сопряженные задачи, хотя для целей инженерного проектирования этот аппарат остается довольно трудоемким и не во всех случаях применимым.

В классической теории общего случая движения твердого тела в

безграничной идеальной несжимаемой жидкости, изложенной первоначально в работах Томсона, Тэта, Кирхгоффа [16], возмущенное движение жидкости рассматривается как безотрывное потенциальное течение. В связанной с телом системе координат потенциал скоростей этого течения представляется в виде суперпозиции 6, — по числу степеней свободы тела, — элементарных потенциалов, зависящих только от геометрии тела. При этом выражения для гидродинамических сил и их моментов, действующих на тело, содержат коэффициенты пропорциональности, определяемые элементарными потенциалами и называемые коэффициентами присоединенных масс и моментов инерции тела. Эти коэффициенты входят также и в уравнения движения подводного аппарата [1, 2].

С другой стороны, как отмечалось выше, движение тела в воде сопровождается генерацией завихренности. Этот эффект во многих случаях имеет фундаментальное значение для расчета силового взаимодействия тела с жидкостью, как это, скажем, видно на примере теории Н.Е. Жуковского [17] о подъемной силе крыла. Входящие в уравнения движения подводного аппарата коэффициенты гидродинамических сил и моментов, соответствующие такого рода явлениям, обычно определяются экспериментально в низкоскоростных аэродинамических трубах или в гидродинамических каналах. Для их приближенного определения часто используются варианты метода дискретных вихрей [5–7]. В последнем случае поле течения вокруг тела является потенциальным, но содержит внутри себя сосредоточенные вихревые особенности.

Таким образом, описание гидродинамических сил в общепринятой математической модели, описывающей динамику подводного аппарата, основывается как на потенциалах безотрываного обтекания тела, так и на потенциалах обтекания, учитывающих сход с поверхности тела вихревой пелены. К сожалению, описать полное поле течения, складывая указанные потенциалы, как правило, невозможно. В самом деле, форма подводного аппарата может иметь острые выступы, обращенные в поток. Поле скоростей, соответствующее потенциалу безотрывного обтекания, имеет в этих точках особенности, следствием чего является нефизичность суммарного поля скоростей [18].

В данной работе рассматривается один из способов примирить указанное несоответствие. Показывается, что коэффициентам присоединенных масс и моментов инерции можно поставить в соответствие вместо части поля течения вокруг тела (несуществующей, в общем случае, из-за особенности поля скоростей) часть поля давления, порожденного мгновенным линейным и угловым ускорением тела. Это построение оказывается особенно наглядным для состояния мгновенного покоя тела. Однако указанное построение теряет, на первый

взгляд, смысл, если жидкость обладает сжимаемостью, что является свойством всех реальных жидкостей. Чтобы разобраться в том, что происходит в этом случае в жидкостях, обладающих слабой сжимаемостью, в работе рассмотрен численный эксперимент по движению тела прямоугольной формы из состояния мгновенного покоя в рамках акустического приближения при учете сжимаемости среды.

Определение коэффициентов присоединенных масс для состояния мгновенного покоя тела. Задача данного раздела состоит в придании коэффициентам присоединенных масс и моментов инерции физического смысла, тесно связанного с действительным течением жидкости вокруг тела, тогда как при классическом определении они связываются с потенциалами скоростей безотрывных течений, которые по отношению к действительному течению непосредственного физического смысла не имеют. Отметим, однако, что физическая нереализуемость потенциалов скоростей безотрывных течений совсем не означает, что ими нельзя оперировать в математическом смысле.

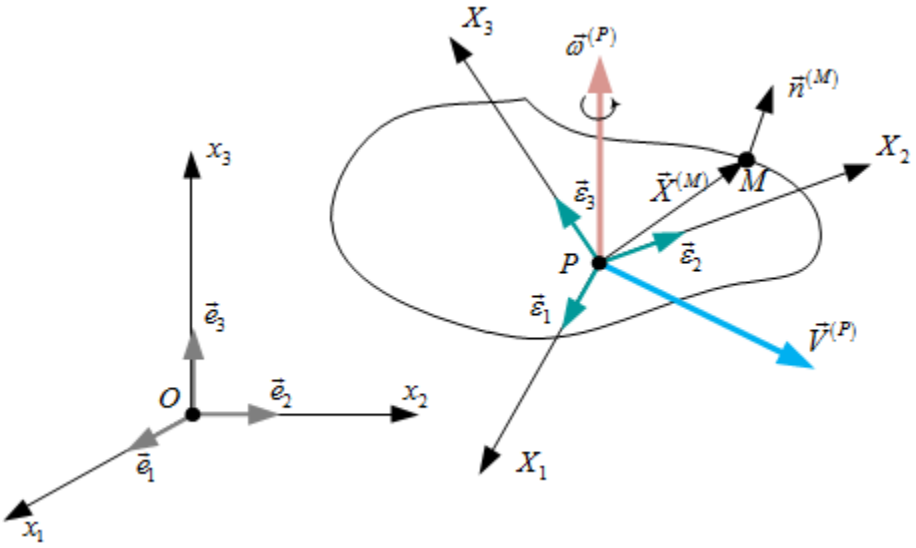


Рис. 1. Геометрическая схема движения тела в жидкости

При произвольном безвихревом движении тела в безграничной идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, мгновенное течение и потенциал скоростей (стремящийся к нулю на бесконечности) однозначно определяются граничным условием непротекания, т.е. мгновенными значениями линейной и угловой скорости тела. Это утверждение остается в силе и при наличии компактных вихревых образований, нужно только учитывать мгновенную индуцированную скорость на теле от этих вихрей [19–21]. Давление в жидкости, а тогда и действующие на тело гидродинамические силы этими

условиями еще не определяются. В частности, на тело, находящееся в данный момент в покое, но имеющее ненулевое ускорение, уже действуют гидродинамические силы. Примером может служить гидростатическое распределение давления в жидкости, покоящейся внутри полости, совершающей ускоренное движение [3]. Но тогда, какими бы угловыми точками ни обладало тело, вихревой отрыв в данный момент невозможен: он начнется мгновением позже с появлением у частиц жидкости скорости.

Представим в связанной системе координат (СК) $PX_1X_2X_3$ (рис. 1) потенциал скоростей идеального безотрывного течения в виде суперпозиции шести единичных потенциалов ϕ_j:

$$\phi\left(X_1, X_2, X_3, t\right)=\sum_{j=1}^{3}\left[\phi_j\left(X_1, X_2, X_3\right)V_j^{(P)}\left(t\right)+ \right.$$
$$\left. +\phi_{j+3}\left(X_1, X_2, X_3\right)\omega_j^{(P)}\left(t\right)\right], \qquad (1)$$

соответствующих элементарным движениям тела в направлении связанных осей с единичными линейными и угловыми скоростями. Зафиксируем произвольную точку M на поверхности тела. Формулы

$$x_j^{(M)}\left(t\right)=x_j\left(X_1^{(M)}, X_2^{(M)}, X_3^{(M)}, t\right),$$
$$\phi^{(M)}\left(t\right)=\phi\left(X_1^{(M)}, X_2^{(M)}, X_3^{(M)}, t\right)=\phi\left(x_1^{(M)}, x_2^{(M)}, x_3^{(M)}, t\right)$$

задают закон движения точки M относительно основной СК и изменение по времени потенциала скоростей соответственно его текущим значениям у проходящих мимо этой точки частиц жидкости. Вычисляя производную потенциала по времени, получаем:

$$\frac{d\phi^{(M)}}{dt}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{X_j}^{(M)}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{x_k}^{(M)}+\sum_{l=1}^{3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_l}\right)^{(M)}\frac{dx_l^{(M)}}{dt}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{x_k}^{(M)}+\vec{v}^{(M)}\cdot\vec{V}^{(M)},$$

где $\vec{v}^{(M)}$ — скорость текущей частицы жидкости в точке M, $\vec{V}^{(M)}=\vec{V}^{(P)}+\vec{\omega}^{(P)}\times\vec{X}^{(M)}$ — скорость самой точки M. С другой стороны, согласно разложению (1) имеем

$$\frac{d\phi^{(M)}}{dt}=\sum_{j=1}^{3}\left[\phi_j^{(M)}\dot{V}_j^{(P)}\left(t\right)+\phi_{j+3}^{(M)}\dot{\omega}_j^{(P)}\left(t\right)\right].$$

В результате получаем значение локальной производной потенциала по времени

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{x_k}^{(M)} = \sum_{j=1}^{3}\left[\phi_j^{(M)}\dot{V}_j^{(P)}(t) + \phi_{j+3}^{(M)}\dot{\omega}_j^{(P)}(t)\right] - \vec{v}^{(M)}\cdot\dot{\vec{V}}^{(M)}, \qquad (2)$$

входящей в интеграл Коши–Лагранжа

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|grad\,\phi|^2}{2} + \frac{\delta p}{\rho_{ж}} = 0, \qquad (3)$$

где $\delta p = p - p_\infty$ — давление, избыточное над некоторым характерным давлением на бесконечности p_∞, $\rho_{ж}$ — плотность жидкости.

Пусть теперь тело находится в мгновенном состоянии покоя, но с произвольными значениями линейного $\dot{\vec{V}}^{(P)}$ и углового $\dot{\vec{\omega}}^{(P)}$ ускорения. Тогда и жидкость вне тела всюду покоится (по условию вихрей в ней нет), т.е. $\vec{v} = grad\,\phi \equiv 0$, и из формул (2), (3) получаем

$$p = p_\infty - \rho_{ж}\frac{\partial\phi}{\partial t} = p_\infty - \rho_{ж}\sum_{j=1}^{3}\left[\phi_j^{(M)}\dot{V}_j^{(P)}(t) + \phi_{j+3}^{(M)}\dot{\omega}_j^{(P)}(t)\right]. \qquad (4)$$

Выражение (4) подставим в формулы для главного вектора и главного момента гидродинамических сил, приложенных к ускорившемуся, но еще покоящемуся телу:

$$\vec{F} = -\int_S p\vec{n}\,dS = \rho_{ж}\sum_{j=1}^{3}\left[\dot{V}_j^{(P)}\int_S \phi_j\vec{n}\,dS + \dot{\omega}_j^{(P)}\int_S \phi_{j+3}\vec{n}\,dS\right], \qquad (5)$$

$$\vec{M}_P = -\int_S \vec{X}\times p\vec{n}\,dS = \rho_{ж}\sum_{j=1}^{3}\left[\dot{V}_j^{(P)}\int_S \phi_j\vec{X}\times\vec{n}\,dS + \dot{\omega}_j^{(P)}\int_S \phi_{j+3}\vec{X}\times\vec{n}\,dS\right]. \qquad (6)$$

Учитывая, что единичные потенциалы строились, исходя из удовлетворения граничных условий [3, 16, 19, 22]

$$\left.\frac{\partial\phi_j}{\partial n}\right|_S = \vec{n}\cdot\vec{\varepsilon}_j = n_j, \quad \left.\frac{\partial\phi_{j+3}}{\partial n}\right|_S = \left(\vec{X}\times\vec{n}\right)\cdot\vec{\varepsilon}_j,$$

и переходя в формулах (5), (6) к проекциям, будем иметь $(j,k = 1,2,3)$:

$$\begin{aligned} F_k &= \rho_{ж}\sum_{j=1}^{3}\left[\dot{V}_j^{(P)}\int_S \phi_j\frac{\partial\phi_k}{\partial n}\,dS + \dot{\omega}_j^{(P)}\int_S \phi_{j+3}\frac{\partial\phi_k}{\partial n}\,dS\right] = \\ &= -\sum_{j=1}^{3}\left[\lambda_{jk}\dot{V}_j^{(P)} + \lambda_{j+3\,k}\dot{\omega}_j^{(P)}\right], \end{aligned} \qquad (7)$$

$$\left(M_P\right)_k = \rho_{ж}\sum_{j=1}^{3}\left[\dot{V}_j^{(P)}\int_S \phi_j \frac{\partial \phi_{k+3}}{\partial n}\,dS + \dot{\omega}_j^{(P)}\int_S \phi_{j+3}\frac{\partial \phi_{k+3}}{\partial n}\,dS\right] = \\ = -\sum_{j=1}^{3}\left[\lambda_{j\,k+3}\dot{V}_j^{(P)} + \lambda_{j+3\,k+3}\dot{\omega}_j^{(P)}\right]. \qquad (8)$$

В формулах (7), (8) присутствуют все 36 коэффициентов присоединенных масс и моментов инерции, определяемых обычным образом как $\left(q, s = 1,2,3,4,5,6\right)$

$$\lambda_{qs} = -\rho_{ж}\int_S \phi_q \frac{\partial \phi_s}{\partial n}\,dS,$$

но безотносительно к требованию физической реализуемости единичных потенциалов. Более того, если сравнить разложение (2) при $\vec{V}^{(P)} = \vec{\omega}^{(P)} = 0$ (но $\dot{V}_j^{(P)} \neq 0$ или $\dot{\omega}_j^{(P)} \neq 0$) с разложением (1), то окажется, что ϕ_q можно трактовать как единичные потенциалы локального ускорения жидкости, вовлекаемой в движение телом из состояния покоя.

Определение коэффициентов присоединенных масс через потенциал ускорений сильно упрощает математическую сторону вопроса по сравнению с классическим определением через потенциалы скоростей [3, 19, 23]. В данной работе не ставится задача анализа физических следствий такого определения для уравнений динамики движения подводного аппарата [1, 2]. В первую очередь нас будет интересовать состоятельность данного определения в свете наличия у всех реальных жидкостей свойства сжимаемости, чему данное выше определение на первый взгляд противоречит.

Акустический подход к определению присоединенной массы тела. Условимся в данном разделе единичные потенциалы обтекания тела несжимаемой жидкостью отмечать верхним индексом $\left(0\right)$: $\phi_j^{(0)}$, тогда как прежние обозначения φ_j будут соответствовать течениям сжимаемой жидкости. В работе [24] отмечалось, что решение задачи гидростатики об относительном покое жидкости в ускоренно движущейся полости [3] почти всегда интерпретируется физически в виде предельного состояния жидкости, а конечность скорости распространения возмущений в ней полностью игнорируется. Аналогично, рассмотрим тело, приобретшее мгновенное ускорение, но еще находящееся в состоянии покоя вместе с окружающей его жидкостью. Если жидкость несжимаема, то тогда в ней возникает мгновенное распределение избыточного давления, описываемое единичными потенциалами ускорения, математически совпадающими с функциями $\phi_j^{(0)}$. В

сжимаемой жидкости в такой ситуации мгновенное избыточное давление отсутствует. Поскольку все реальные жидкости сжимаемы, вновь принятое определение коэффициентов присоединенных масс кажется бессмысленным в отношении любой реальной жидкости.

На самом же деле, оно должно быть столь же правомочно и, по-видимому, полезно, если понимать его в предельном смысле, как и упомянутая выше интерпретация состояния покоя жидкости, находящейся в ускоренно движущемся баке. Интуитивно, а также опираясь на численный эксперимент, можно представить себе, что за короткое время вокруг тела, начинающего свое движение из состояния покоя, возникает неволновая возмущенная зона [25], избыточное давление в которой будет примерно тем же, что и в несжимаемой среде.

Наша задача будет состоять в рассмотрении этого процесса на простом примере равноускоренного из состояния покоя движения прямоугольника на плоскости, заполненной слабосжимаемой жидкостью. Аналогично задачам определения единичных потенциалов $\phi_1^{(0)}$, $\phi_2^{(0)}$, $\phi_\omega^{(0)}$ для несжимаемой жидкости, рассматриваются движения вдоль координатных осей X_1, X_2 и вращение вокруг оси X_3, но теперь с линейными скоростями $V_j = A_j t$ и угловой скоростью $\omega_3 = \varepsilon_3 t$, где A_j и ε_3 — соответствующие постоянные ускорения.

На начальной стадии процесса взаимодействия тела с жидкостью — при не слишком большом ускорении — перемещениями тела и приобретенной им скоростью допустимо пренебречь, и мы получаем постановку задачи в акустическом приближении, с граничными условиями непротекания на поверхности тела в его исходном положении. Переходя к потенциалам [25], которые обозначим как ϕ_j, ϕ_ω, будем иметь начально-краевую задачу для волнового уравнения (рис. 2). При этом геометрические размеры и пространственные координаты отнесены к половине ширины тела R, а время масштабируется с использованием акустической скорости звука в жидкости $a_{ж0}$:

$$\bar{X}_j = \frac{X_j}{R}, \quad \bar{t} = \frac{a_{ж0} t}{R}. \tag{9}$$

Учитывая граничные условия, например, на стороне $\bar{X}_1 = 2$:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial X_1} = V_1 = A_1 t, \quad \frac{\partial \phi_\omega}{\partial X_1} = -\omega_3 X_2 = -\varepsilon_3 X_2 t,$$

определим безразмерные потенциалы формулами

$$\bar{\phi}_j = \frac{a_{ж0}}{A_1 R^2}\phi_j, \quad \bar{\phi}_\omega = \frac{a_{ж0}}{\varepsilon_3 R^3}\phi_\omega, \tag{10}$$

чтобы иметь эти условия в форме $\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{X}_1} = \bar{t}$ и $\frac{\partial \bar{\phi}_\omega}{\partial \bar{X}_1} = -\bar{X}_2 \bar{t}$ соответственно.

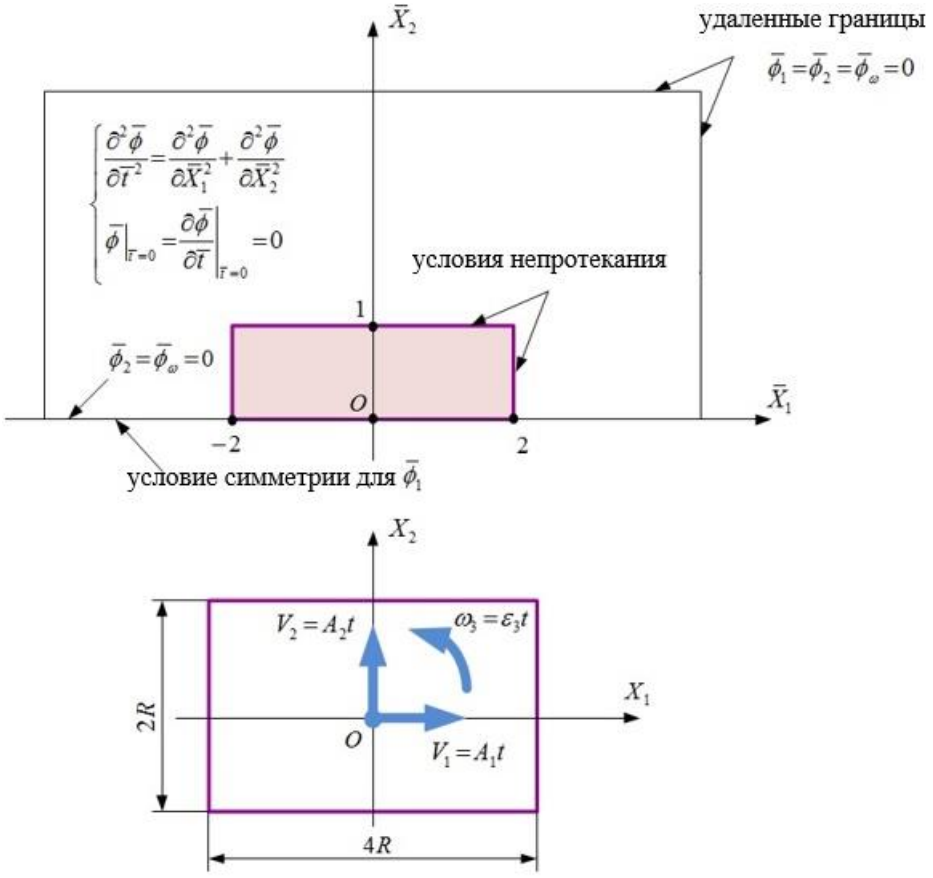


Рис. 2. Постановка численного эксперимента по определению коэффициентов присоединенных масс в акустическом расчете

Волновое уравнение интегрировалось явным конечно-разностным методом второго порядка на равномерной сетке с шагом $h_1 = h_2 = 0{,}1$ по пространственным координатам и $\tau = 0{,}01$ по времени. Для аппроксимации производных всюду использовались центральные разности, кроме аппроксимации условий непротекания на теле, где использовались односторонние трехточечные формулы. На рис. 3 показаны изменения во времени акустических потенциалов $\bar{\phi}_1$, $\bar{\phi}_2$ и $\bar{\phi}_\omega$ в нескольких

характерных точках поверхности тела. Из представленных результатов видно, что за время $(3\div 5)\dfrac{R}{a_{ж0}}$ (диаметр прямоугольника равен $R\sqrt{20}\approx 4,47R$) во всех точках тела зависимость потенциала от времени становится линейной. Следовательно, каждой точке границы тела можно поставить в соответствие определенное число (для данного вида движения тела) – угловой коэффициент указанной зависимости, который обозначим $\left(\dfrac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{t}}\right)_{пред}$. Расчетные значения получаются при этом численным дифференцированием (рис. 4).

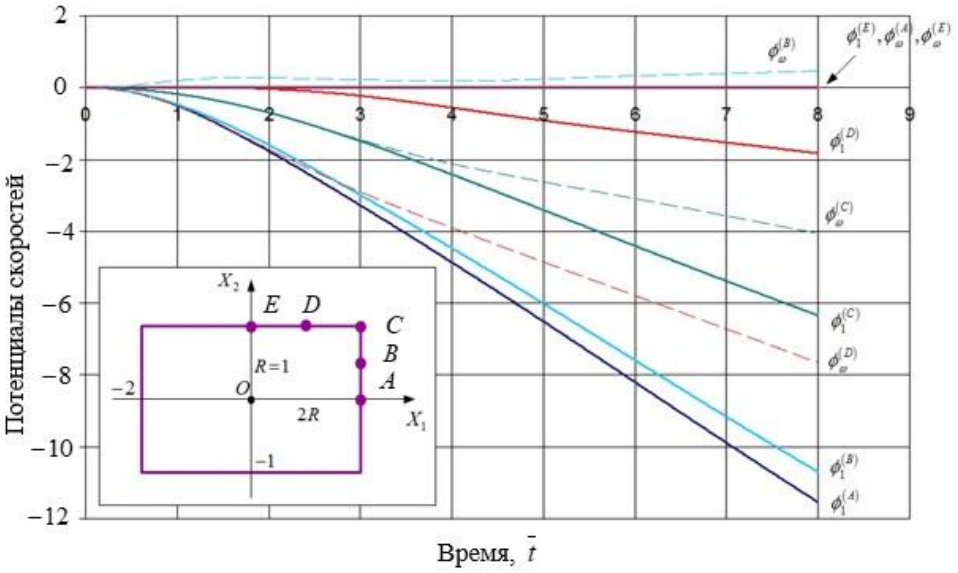


Рис. 3. Характер временной зависимости потенциалов на границе прямоугольника при акустическом расчете

Единичные потенциалы $\phi_j^{(0)}$, $\phi_\omega^{(0)}$ для движения прямоугольника в несжимаемой жидкости были получены численным расчетом по методу дискретных вихрей (МДВ), как это описано в [18]. Результаты даны на рис. 5. Для равноускоренных движений прямоугольника, аналогичных тому, как это было принято в акустическом расчете, потенциалы скоростей принимают вид

$$\phi^{(0)}=V_j\phi_j^{(0)}=A_jt\,\phi_j^{(0)},\quad \phi^{(0)}=\omega_3\phi_\omega^{(0)}=\varepsilon_3t\,\phi_\omega^{(0)}.$$

Для их производных по времени в фиксированных точках границы будем иметь выражения

$$\frac{d\phi^{(0)}}{dt}=A_j\phi_j^{(0)},\ \frac{d\phi^{(0)}}{dt}=\varepsilon_3\phi_\omega^{(0)}. \qquad (11)$$

В акустическом приближении локальная $\frac{\partial\phi}{\partial t}$, относительная $\frac{d\phi}{dt}$ и субстанциональная $\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{v}$ производные идентичны, и тогда разумно предположить, что величины $\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{t}}\right)_{пред}$ при их должном масштабировании будут соответствовать или же даже точно совпадать с потенциалами $\phi_j^{(0)}$, $\phi_\omega^{(0)}$ для несжимаемой жидкости.

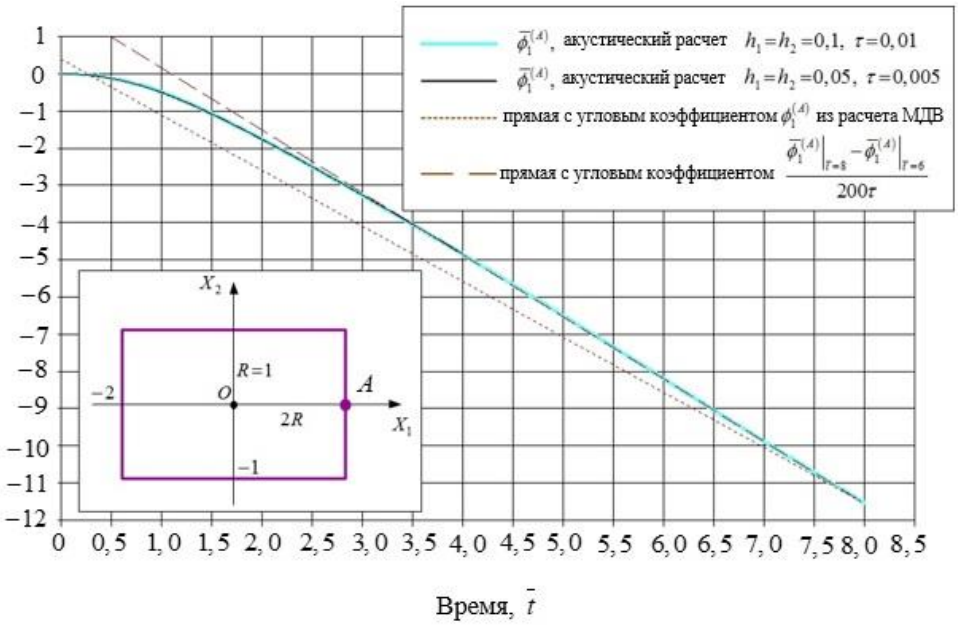


Рис. 4. Иллюстрация вычислений величины $\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{t}}\right)_{пред}$ из акустического расчета

На основании формул (9), (10) легко получить выражения

$$\frac{\partial\phi_j}{\partial t}=A_jR\frac{\partial\bar{\phi}_j}{\partial\bar{t}},\quad \frac{\partial\phi_\omega}{\partial t}=\varepsilon_3R^2\frac{\partial\bar{\phi}_\omega}{\partial\bar{t}}. \qquad (12)$$

Расчеты для несжимаемой жидкости, приведенные на рис. 5, были получены для значения $R=1$. Сопоставляя в этом случае формулы (11) и

(12), будем иметь $\frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial \bar{t}} \sim \phi_j^{(0)}$ и $\frac{\partial \bar{\phi}_\omega}{\partial \bar{t}} \sim \phi_\omega^{(0)}$. Сравнение на рис. 5 результатов, полученных указанными двумя способами, обнаруживает, по сути дела, их совпадение. В табл. 1 сравниваются также результаты вычисления коэффициентов присоединенных масс (КПМ).

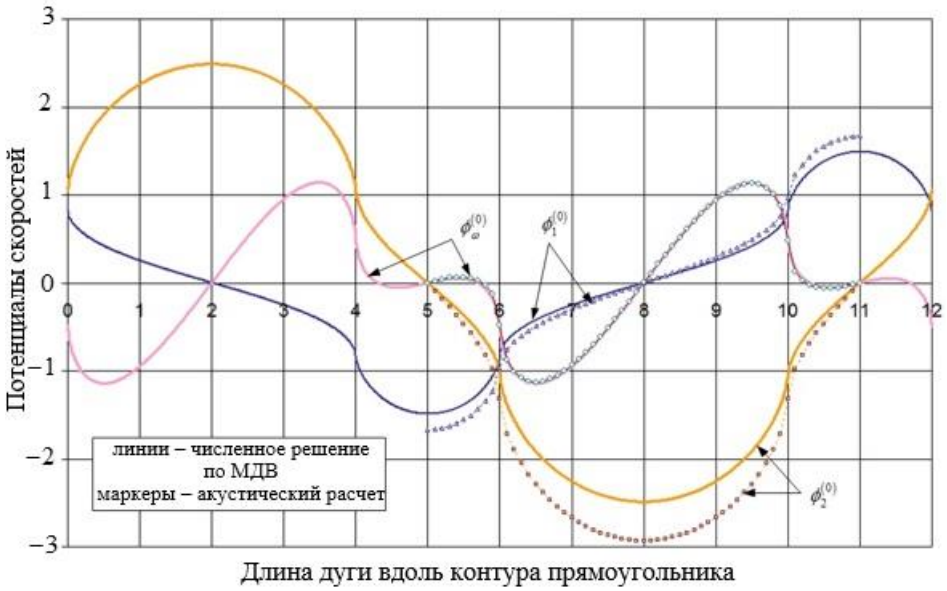


Рис. 5. Сравнение единичных потенциалов прямоугольника, полученных для несжимаемой жидкости (МДВ) и акустическим методом

Таблица 1

Сравнение двух расчетов КПМ прямоугольника

КПМ	Расчет МДВ	Акустический расчет	Рассогласование результатов, %
$\lambda_{X_1X_1}/\rho_{ж}$	5,2947	5,9782	~13
$\lambda_{X_2X_2}/\rho_{ж}$	17,0495	20,242	~19
$\lambda_{\omega\omega}/\rho_{ж}$	7,3536	7,3597	~ 0,082

При анализе рассогласования расчетов следует иметь в виду, что в несжимаемой жидкости скорость изменения потенциала вблизи угла ведет себя как величина, обратная корню квадратному из расстояния. Поэтому при воспроизведении этой же величины как $\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}}\right)_{пред}$ в акустическом расчете, выполнявшемся на не слишком мелкой сетке,

должны были проявиться заметные погрешности вычислений. Потенциалы ϕ_1 / ϕ_2 накапливают максимальные погрешности в точках A / E (рис. 3), максимально удаленных вдоль контура прямоугольника от точек E / A, где эти потенциалы обращаются в нуль в силу симметрии. Причем при поступательных движениях в координатных направлениях вклады от «сильно» воздействующих на жидкость сторон двух углов тела, принадлежащих расчетной области (рис. 2), складываются. При вращательном движении все стороны этих углов «сильно» воздействуют на жидкость, но их вклады по знаку различаются. Вероятно, причина довольно неожиданного разброса рассогласований в результатах этим и объясняется. Отметим, что в акустические расчетах часто используются конечно-разностные схемы весьма высокого порядка.

В качестве предварительных выводов можно считать, что определение КПМ через потенциал ускорений не противоречит реальной природе жидкостей, если держать в уме некоторое запаздывание отклика на интервал времени порядка $\frac{L}{a_{ж0}}$, где L — диаметр тела (максимальное расстояние между его точками). С практической же точки зрения необходимо следить за соотношением значения $\frac{L}{a_{ж0}}$ и ускорения тела. При большой приобретенной скорости тела за время $\frac{L}{a_{ж0}}$ в процесс «вмешивается» конвективная составляющая (например, формируется ударная волна), и концепция присоединенной массы, вероятно, полностью теряет смысл. Другой случай — высокочастотные колебания тела с периодом $T \le \frac{L}{a_{ж0}}$. Здесь формирование неволновой зоны вблизи тела [25] вообще невозможно, поэтому учет сжимаемости жидкости здесь принципиален. В этом случае понятие присоединенной массы может быть введено, но соответствующие коэффициенты очень сильно отличаются [26, 27] от значений, получаемых по теории несжимаемой жидкости, т.е. в пределе $a_{ж0} \to \infty$.

Выводы. В работе показано, что все 36 коэффициентов присоединенных масс и моментов инерции тела, совершающего произвольные движения в безграничной идеальной несжимаемой жидкости, можно определить через потенциалы ускорения жидкости для мгновенного состоянии покоя тела, находящегося с ней во взаимодействии и имеющего ненулевые значения линейного и углового ускорения. Такая точка зрения существенно упрощает теорию и позволяет обойти проблему существования для реального течения единичных потенциалов скоростей классического подхода. При помощи численного экспери-

мента, выполнявшегося в рамках акустического приближения, показано, что данная концепция имеет смысл и при наличии у жидкости естественного свойства сжимаемости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Грумондз В.Т., Половинкин В.В., Яковлев Г.А. *Теория движения двусредных аппаратов. Математические модели и методы исследования*. Москва, Вузовская книга, 2012, 644 с.

[2] Дегтярь В.Г., Пегов В.И. Гидродинамика подводного старта ракет. Москва, Машиностроение, 2009, 448 с.

[3] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. Москва, Дрофа. 2003, 840 с.

[4] Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. Отрывные и кавитационные течения. Москва, Наука, 1990, 384 с.

[5] Белоцерковский О.М. *Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа*. Москва, Наука, 1965, 244 с.

[6] Белоцерковский С.М., Ништ М.И., Котовский В.Н., Федоров Р.М. *Трехмерное отрывное обтекание тел произвольной формы*. Москва, ЦАГИ, 2000, 265 с.

[7] Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн*. Москва, ТОО «Янус», 1995, 519 с.

[8] Головкин М.А., Головкин В.А., Калявкин В.М. *Вопросы вихревой гидромеханики*. Москва, Физматлит, 2009, 264 с.

[9] Тимофеев В.Н. Построение полубесконечного эквивалентного тела при математическом моделировании дозвукового отрывного осесимметричного обтекания. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4, с. 67–83.

[10] Тимофеев В.Н. Особенности вихревой схемы при моделировании дозвукового обтекания с полубесконечным эквивалентным телом. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 4, с. 73–91.

[11] Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. *Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок*. Москва, Изд-во Московск. ун-та, 2006, 184 с.

[12] Cottet G.H., Koumoutsakos P. *Vortex Methods: Theory and Practice*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000, 320 p.

[13] Щеглов Г.А. Модификация метода вихревых элементов для расчета гидродинамических характеристик гладких тел. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2009, № 2, с. 26–35.

[14] Marchevsky I.K., Shcheglov, G.A. Efficient semi-analytical integration of vortex sheet influence in 3D vortex method. *5th International Conference on Particle-Based Methods — Fundamentals and Applications*, 2017, pp. 703–714.

[15] Дергачев С.А., Щеглов Г.А. Моделирование обтекания тел методом вихревых элементов с использованием замкнутых вихревых петель. Научный вестник МГТУ ГА, 2016, № 223, с. 19–27.

[16] Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1932, 928 p.

[17] Жуковский Н.Е. *Аэродинамика. Т. 4*. Москва, Ленинград, Гостехиздат, 1949, 652 с.

[18] Плюснин А.В. Численный эксперимент по расчету ускоренного движения тела в вязкой сжимаемой жидкости в целях уточнения концепции присоединенных масс летательных аппаратов, движущихся в воде. *Сборник трудов конференции «XLIII Академические чтения по космонавтике, посвященные*

памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства», 2019, с. 149–172.

[19] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика. Часть 1*. Москва, Физматгиз, 1963, 584 с.

[20] Batchelor G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000, 615 p.

[21] Saffman P.G. *Vortex Dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992, 311 p.

[22] Плюснин А.В. Расчет коэффициентов внутреннего и внешнего нестационарного взаимодействия корпуса ЛА с жидкостью методом граничных элементов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 77–100.

[23] Петров А.Г. *Аналитическая гидродинамика*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2010, 520 с.

[24] Плюснин А.В. Практика решения задач газодинамики старта и взаимодействия ЛА с жидкостью и преподавание на Аэрокосмическом факультете. *Сборник трудов конференции «XL Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства»*, 2016, с. 209–222.

[25] Исакович М.А. Общая акустика. Москва, Наука, 1973, 496 с.

[26] Хаскинд М.Д. Акустическое излучение колеблющихся тел в сжимаемой жидкости. Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1946, т. 16, вып. 7, с. 634–646.

[27] Седов Л.И. *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*. Москва, Наука, 1980, 440 с.

Статья поступила в редакцию 09.06.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Плюснин А.В. Численный расчет коэффициентов присоединенных масс тела, движущегося в слабо-сжимаемой жидкости. *Математическое моделирование и численные методы.* 2019. № 4. с. 15–30.

Плюснин Андрей Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, зам. начальника отдела АО «ВПК «НПО машиностроения». Автор около 40 работ по нестационарным задачам гидрогазодинамики и теории упругости.
e-mail: andrey.plusnin@gmail.com

Numerical evaluation of body added mass coefficients introduced by means of acceleration potentials, for the case of slightly compressible liquids

© A.V. Pliusnin[1,2]

[1]Joint stock company “Military and industrial corporation JSC “MIC “Mashinostroyenia”, Reutov, Moscow Region, 143966, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

It is demonstrated that all 36 added mass and inertia coefficients of a body located in an unbounded ideal incompressible liquid may be introduced for the momentary state of rest by using acceleration potentials instead of classical velocity potentials specifying generally not-existent irrotational unseparated flows. The meaning of this conception is investigated with respect to real liquids having the compressibility property, by means of a numerical experiment fulfilled in the framework of an acoustical approach.

Keywords: *added mass, acceleration potential, incompressible liquid, compressible liquid, acoustical approach*

REFERENCES

[1] Grumondz V.T., Polovinkin V.V., Yakovlev G.A. *Teoriya dvizheniya dvusrednykh apparatov. Matematicheskie modeli i metody issledovaniya* [Theory of motion of two-medium vehicles. Mathematical models and research methods]. Moscow, Vuzovskaia kniga Publ., 2012, 644 p.

[2] Degtyar' V.G., Pegov V.I. *Gidrodinamika podvodnogo starta raket* [Hydrodynamics of underwater rocket launch]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2009, 448 p.

[3] Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid mechanics]. Moscow, Drofa Publ., 2003, 840 p.

[4] Gogish L.V., Stepanov G.YU. *Otryvnye i kavitacionnye techeniya* [Separation and cavitation flows]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 384 p.

[5] Belotserkovskiy O.M. *Tonkaya nesushchaya poverhnost' v dozvukovom potoke gaza* [Thin bearing surface in subsonic gas flow]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 244 p.

[6] Belocerkovskij S.M., Nisht M.I., Kotovskij V.N., Fedorov R.M. *Trekhmernoe otryvnoe obtekanie tel proizvol'noj formy* [Three-dimensional tear-off flow of bodies of arbitrary shape]. Moscow, TsAGI Publ., 2000, 265 p.

[7] Lifanov I.K. *Metod singulyarnyh integral'nyh uravnenij i chislennyj eksperiment v matematicheskoj fizike, aerodinamike, teorii upru-gosti i difrakcii voln* [Method of singular integral equations and numerical experiment in mathematical physics, aerodynamics, theory of elasticity and wave diffraction]. Moscow, TOO “Yanus” Publ., 519 p.

[8] Golovkin M.A., Golovkin V.A., Kalyavkin V.M. *Voprosy vihrevoj gidromekhaniki* [Questions of vortex hydromechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 264 p.

[9] Timofeev V.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 4, pp. 67–83.

[10] Timofeev V.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 4, pp. 73–91.

[11] Andronov P.R., Guvernyuk S.V., Dynnikova G.YA. *Vihrevye metody rascheta nestacionarnyh gidrodinamicheskih nagruzok* [Vortex methods of calculation of unsteady hydrodynamic loads]. Moscow, MSU Publ., 2006, 184 p.

[12] Cottet G.H., Koumoutsakos P. *Vortex Methods: Theory and Practice*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000, 320 p.

[13] Shcheglov G.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Engineering*, 2009, no. 2, pp. 26–35.

[14] Marchevsky I.K., Shcheglov, G.A. Efficient semi-analytical integration of vortex sheet influence in 3D vortex method. *5th International Conference on Particle-Based Methods — Fundamentals and Applications*, 2017, pp. 703–714.

[15] Dergachev S.A., Shcheglov, G.A. *Nauchnyj vestnik MGTU GA — Civil Aviation*

High Technologies, 2016, no. 223, pp. 19–27.
[16] Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1932, 928 p.
[17] Zhukovskij N.E. *Aerodinamika. T. 4.* [Aerodynamics. Vol. 4.]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949, 652 p.
[18] Plyusnin A.V. Chislennyj eksperiment po raschetu uskorennogo dvizhe-niya tela v vyazkoj szhimaemoj zhidkosti v celyah utochneniya koncepcii prisoedinennyh mass letatel'nyh apparatov, dvizhushchihsya v vode [Numerical experiment to calculate the accelerated motion of a body in a viscous compressible liquid in order to clarify the concept of attached masses of aircraft moving in water]. *Sbornik trudov konferencii «XLIII Akademicheskie chteniya po kosmo-navtike, posvyashchennye pamyati akademika S. P. Korolyova i drugih vyda-yushchihsya otechestvennyh uchenyh — pionerov osvoeniya kosmicheskogo prostranstva»* [Proceedings of the conference «XLIII Academic space conference, dedicated to the memory of academician S. P. Korolev and other outstanding national scientists — pioneers of space exploration»], 2019, pp. 149–172.
[19] Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika. Chast' 1.* [Theoretical hydromechanics. Part 1]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 584 p.
[20] Batchelor G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000, 615 p.
[21] Saffman P.G. *Vortex Dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992, 311 p.
[22] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 77–100.
[23] Petrov A.G. *Analiticheskaya gidrodinamika* [Analytical hydrodynamics]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2010, 520 p.
[24] Plyusnin A.V. Praktika resheniya zadach gazodinamiki starta i vzaimodejstviya LA s zhidkost'yu i prepodavanie na Aerokosmicheskom fakul'tete [Practice of solving problems of gas dynamics of launch and interaction of aircraft with liquid and teaching on Aerospace faculty]. *Sbornik trudov konferencii «XL Akademicheskie chteniya po kosmo-navtike, posvyashchennye pamyati akademika S. P. Korolyova i drugih vyda-yushchihsya otechestvennyh uchenyh — pionerov osvoeniya kosmicheskogo prostranstva»* [Proceedings of the conference «XL Academic space conference, dedicated to the memory of academician S. P. Korolev and other outstanding national scientists - pioneers of space exploration»], 2016, pp. 209–222.
[25] Isakovich M.A. *Obshchaya akustika* [General acoustics]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 496 p.
[26] Haskind M.D. *Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki — Journal of experimental and theoretical physics*, 1946, vol. 16, iss. 7, pp. 634–646.
[27] Sedov L.I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Plane problems of hydrodynamics and aerodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 440 p.

Plyusnin A.V., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical Univerity; Deputy Head of Department, Joint stock company “Military and industrial corporation JSC “MIC “Mashinostroyenia”. Author of about 40 scientific publications on non-stationary problems of fluid dynamics and elasticity theory. e-mail: andrey.plusnin@gmail.com