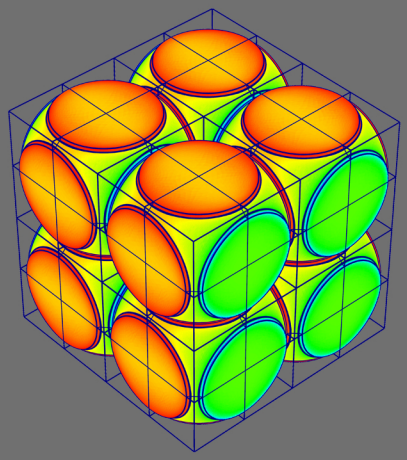
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Носов В.Н., Савин А.С. Численное моделирование возмущения свободной поверхности двухслойной жидкости точечным источником, локализованным в нижнем слое. Математическое моделирование и численные методы. 2019. № 3. с. 113–124.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/203/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.130
18.11.2026 06:56:44

УДК 532.59 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-3-113124

Численное моделирование возмущения свободной поверхности двухслойной жидкости точечным источником, локализованным в нижнем слое

© В.Н. Носов[1], А.С. Савин[2]

[1] ГЕОХИ РАН, Москва, 119991, Россия
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрен импульсный точечный источник в нижнем слое стратифицированной жидкости. Получено выражение для возмущения ее свободной поверхности. Показано, что на поверхности жидкости возникают две волны, связанные с наличием в ней скачка плотности. Приведены примеры численных расчетов для реальных морских условий. Импульсный точечный источник представляет собой модель элементарного возмущения толщи жидкой среды, допускающую полное математическое исследование в рамках приближения малых волн. Такое приближение вполне оправдано в случаях моделирования реальных источников возмущений, находящихся на значительных глубинах, поскольку эти источники передают на морскую поверхность очень слабый сигнал. Основной проблемой в таких случаях является выделение этого сигнала из фоновых помех, например ветрового волнения. Решение проблемы должно опираться на результаты математического моделирования возмущений морской поверхности разными источниками в толще морской среды. Более сложные модели могут быть построены при рассмотрении реальных возмущений морской среды как некоторых суперпозиций модельных элементарных возмущений от точечных импульсных источников. Кроме того, полное математическое решение задачи о точечном импульсном источнике дает представление о порядках величин возмущений морской поверхности, что создает основу для получения различных оценок возможных возмущений и поэтому представляет значительный интерес при разработке требований к аппаратуре дистанционного зондирования морской поверхности.

Ключевые слова: *двухслойная жидкость, точечный источник, волны на поверхности жидкости*

Введение. Процессы различной природы, протекающие в толще морской среды, представляют значительный интерес с точки зрения практического освоения океана. Однако при проведении мониторинга морской среды с помощью радиолокационных и оптических средств, размещенных на авиационных или космических носителях, явления, происходящие в водной толще на значительной глубине, недоступны для непосредственного наблюдения. О таких явлениях с той или иной степенью достоверности можно судить только по некоторым признакам на морской поверхности [1]. В связи с этим важно изучение волн на морской поверхности, вызывающих локализованные в водной среде источники возмущений различной природы, например, обтекаемые морским течением неровности дна, крупномасштабные вихревые структуры, подвижные участки дна и т. д.

При построении математической модели источники возмущений можно рассматривать как неоднородности гидродинамических полей, локализованные в относительно небольших областях, в которых характерные значения соответствующих полевых величин (например, скорости, завихренности или давления) заметно отличаются от фоновых. Один из наиболее эффективных способов моделирования неоднородностей в жидкой среде состоит в их замене эквивалентной системой гидродинамических особенностей (источников, стоков, вихрей, мультиполей) [2, 3]. При таком подходе расчет поверхностных волн, порождаемых некоторой неоднородностью в морской среде, может быть основан на определении элементарных волн от каждой из моделирующих эту неоднородность гидродинамических особенностей. В частности, если рассматриваемая неоднородность вызывает волны небольшой амплитуды, то они представляют собой суперпозицию элементарных волн. Таким образом, задача о генерации волн на поверхности жидкости уединенной гидродинамической особенностью становится базовой в рамках названного подхода.

Точечная гидродинамическая особенность характеризуется небольшим числом параметров, например точечный источник полностью задается своими координатами и интенсивностью, т. е. объемом выбрасываемой в единицу времени жидкости. С этим связано удобство использования уединенной гидродинамической особенности в качестве простого модельного источника возмущений жидкой среды при проведении численных расчетов для оценки параметров волн, возникающих на поверхности жидкости, в зависимости от тех или иных гидрофизических условий.

Существенную роль при передаче возмущений от источника в морской толще на свободную поверхность может играть стратификация водной среды. В реальных условиях открытого моря скачкообразные изменения плотности воды с глубиной связаны, прежде всего, с наличием сезонного и главного термоклинов. При возмущении морской среды на границе слоев жидкости с разными плотностями возникают внутренние волны, амплитуда которых может исчисляться десятками метров. Генерация волн в стратифицированной среде представляет как теоретический, так и практический интерес. Основные подходы к решению задач генерации отражены в работах [4–6]. Волновые движения стратифицированной жидкости, воздействуя на морскую поверхность, приводят к образованию длинных волн, которые можно рассматривать как вторичное проявление источника возмущений через посредство вызываемых им внутренних волн. Такой эффект продуцирует различные волновые режимы на свободной поверхности в зависимости от стратификации водной среды и параметров источника возмущений. При этом в одних гидрофизических

ситуациях источники возмущений в толще стратифицированной морской среды могут вызывать весьма заметные волны на поверхности жидкости, а в других — практически никак не проявляться [7]. В этой связи имеет значение влияние стратификации водной среды на заметность поверхностных возмущений. Достоверные оценки можно получить путем точного математического решения модельной задачи о возмущении жидкой среды, например точечным импульсным источником. Вопросы, близкие к обсуждаемым в настоящей статье, рассмотрены Л.В. Черкесовым в работе [8]. Изложено решение задачи об импульсном возмущении двухслойной жидкости, а также описана генерация волн при мгновенном подъеме участка дна.

Постановка задачи и основные соотношения. Рассмотрим тяжелую двухслойную жидкость со свободной поверхностью. Обозначим плотность жидкости в верхнем слое через ρ_1, в нижнем — через ρ_2. Будем считать, что $\rho_1 < \rho_2$, т. е. жидкость находится в состоянии устойчивого равновесия. Пусть в нижнем слое жидкости локализован неподвижный точечный источник переменной интенсивности $Q = Q(t)$. Направим ось z вверх и проведем ее через рассматриваемый источник. Если жидкость не ограничена по горизонтали, а ее течение вызвано исключительно источником, то задача обладает цилиндрической симметрией. Иными словами, ни одна из величин, характеризующих поле гидродинамических возмущений от источника, не зависит от полярного угла α, отсчитываемого от любой фиксированной прямой, лежащей в горизонтальной плоскости. В силу этого обстоятельства естественно будет ввести цилиндрическую систему координат (r, α, z).

Пусть в невозмущенном состоянии свободная поверхность жидкости совпадает с плоскостью $z = 0$, граница раздела жидких слоев — с плоскостью $z = -H$, а источник находится в точке $(0, 0, -h)$. Если в некоторый момент времени источник начинает свою работу, то под его воздействием на свободной поверхности жидкости и на границе раздела жидких слоев возникают волны. При достаточно большом удалении источника от границы раздела слоев жидкости эти волны имеют амплитуды намного меньше их длин. В рамках этого допущения, именуемого приближением малых волн, поле скорости жидкости является потенциальным в каждом слое [9]. Точнее, в нижнем слое это поле потенциально распространяется всюду, кроме точки локализации источника.

Будем искать потенциал скорости Φ_2 для нижнего слоя жидкости в виде суммы

$$\Phi_2(r, z, t) = \Phi_0(r, z, t) + \varphi(r, z, t). \qquad (1)$$

Здесь потенциал скорости течения, создаваемого рассматриваемым источником в безграничной однородной жидкости [2, 3], определяется по формуле

$$\Phi_0\left(r, z, t\right) = -\frac{Q\left(t\right)}{4\pi\sqrt{r^2 + \left(z+h\right)^2}}; \tag{2}$$

φ (*r, z, t*) — волновой потенциал, обусловленный наличием границы раздела верхнего и нижнего слоев жидкости и связанными с ней возмущениями волнового характера.

Волновой потенциал φ представляет собой гармоническую в нижнем слое жидкости функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа. С учетом независимости функции φ от полярного угла α уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

Потенциал скорости Φ_1 верхнего слоя жидкости имеет исключительно волновой характер, обладает цилиндрической симметрией и, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа в виде (3). Для случая бесконечно глубокой жидкости должно выполняться условие затухания волновых возмущений с глубиной [10]. Поэтому уравнение Лапласа для потенциала скорости нижнего слоя жидкости следует решать при условии

$$\Phi_2\left(r, z, t\right) \to 0; \qquad \left(z \to -\infty\right). \tag{4}$$

В рамках рассматриваемого приближения малых волн граничные условия на свободной поверхности жидкости имеют вид [9, 10]

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + gS = 0;\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial t};\ z = 0, \tag{5}$$

где g — ускорение свободного падения; S — отклонение свободной поверхности жидкости от ее невозмущенного положения $z = 0$.

Исключив из равенств (5) величину S, получим одно граничное условие для потенциала скорости верхнего слоя жидкости [9, 10]

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 0;\ z = 0. \tag{6}$$

На границе раздела жидких слоев принимают кинематическое условие равенства нормальных составляющих скорости в верхнем и нижнем слоях жидкости и динамическое условие непрерывности давления. В приближении малых волн эти условия имеют вид [9, 10]:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \ z = -H; \tag{7}$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right), \ z = -H. \tag{8}$$

Общее решение задачи. Применив преобразование Ханкеля нулевого порядка [11]

$$F(\rho, z, t) = \int_0^\infty \varphi(r, z, t) J_0(r\rho) r dr,$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка (к обеим частям уравнения (3)), получим обыкновенное дифференциальное уравнение $F_{zz} - \rho^2 F = 0$ с общим решением

$$F(\rho, z, t) = A(\rho, t) \exp(-\rho z) + B(\rho, t) \exp(\rho z). \tag{9}$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Ханкеля [11]

$$\varphi(r, z, t) = \int_0^\infty F(\rho, z, t) J_0(r\rho) \rho d\rho,$$

находим из выражения (9) общий вид волнового потенциала скорости в нижнем слое жидкости

$$\varphi(r, z, t) = \int_0^\infty \left[A(\rho, t) \exp(-\rho z) + B(\rho, t) \exp(\rho z) \right] J_0(r\rho) \rho d\rho. \tag{10}$$

С учетом условия (4) следует принять $A(\rho, t) = 0$. Применение аналогичного приема к определению потенциала скорости в верхнем слое жидкости приводит к выражению

$$\Phi_1(r, z, t) = \int_0^\infty C(\rho, t) \exp(\rho z) J_0(r\rho) \rho d\rho. \tag{11}$$

С помощью известного интегрального соотношения [12] представим сингулярную часть потенциала скорости в нижнем слое жидкости (2) в виде

$$\Phi_0(r, z, t) = -\frac{Q(t)}{4\pi} \int_0^\infty \exp(-\rho |z + h|) J_0(r\rho) d\rho. \tag{12}$$

Подстановка общих выражений для потенциалов скорости в жидких слоях (1), (10)–(12) в граничные условия (6)–(8) приводит

к системе интегральных равенств, из которых следует система дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $B(\rho, t)$, $C(\rho, t)$, $D(\rho, t)$. Пусть в момент времени $t = 0$ точечный источник, локализованный в изначально покоящейся жидкости, мгновенно выбрасывает жидкость объемом V и прекращает дальнейшую работу. В этом случае интенсивность источника может быть задана в виде $Q(t) = V\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция. При названных условиях функции $B(\rho, t)$, $C(\rho, t)$, $D(\rho, t)$ и их производные по времени имеют нулевые значения при любом $t < 0$. Решение системы дифференциальных уравнений для функций $B(\rho, t)$, $C(\rho, t)$, $D(\rho, t)$, удовлетворяющее таким начальным условиям, может быть найдено с помощью преобразования Лапласа [11]. Подстановка полученных таким путем выражений для функций $B(\rho, t)$, $C(\rho, t)$, $D(\rho, t)$ в равенства (10), (11) с учетом соотношений (1), (2) приводит к формулам для потенциалов скорости течений в верхнем и нижнем слоях жидкости. Мы не рассматриваем эти выражения ввиду их громоздкости.

Волна, возникающая на свободной поверхности жидкости, описывается амплитудой $S = S(r, t)$.

Из первого граничного условия (5) следует, что

$$S = -\frac{1}{g}\frac{\partial \Phi_1}{\partial z};\ z = 0. \tag{13}$$

Воспользовавшись найденной в результате решения системы дифференциальных уравнений для функций $B(\rho, t)$, $C(\rho, t)$, $D(\rho, t)$ формулой для потенциала скорости течения в верхнем слое жидкости, представим равенство (13) в виде

$$S(r, t) = S_1(r, t) + S_2(r, t). \tag{14}$$

Таким образом, на поверхности двухслойной жидкости возникает суперпозиция двух волн

$$S_1(r, t) = \int_0^\infty U(\rho)\cos\left(t\sqrt{g\rho}\right)J_0(r\rho)\rho d\rho; \tag{15}$$

$$S_2(r, t) = -\frac{1}{g}\int_0^\infty \omega^2(\rho)U(\rho)\cos(\omega t)J_0(r\rho)\rho d\rho; \tag{16}$$

$$U(\rho) = \frac{V}{2\pi}\frac{\left[1 + th(H\rho)\right]\exp(-h\rho)}{1 + (2\delta - 1)th(H\rho)}; \tag{17}$$

$$\omega(\rho) = \sqrt{\frac{(1-\delta)\rho g th(H\rho)}{1 + \delta th(H\rho)}}. \tag{18}$$

Полученные решения описывают модельные элементарные возмущения от точечного импульсного источника. Более сложные модели могут быть построены при рассмотрении реальных возмущений морской среды как некоторых суперпозиций модельных элементарных возмущений от точечных импульсных источников. Такой подход показал свою эффективность при рассмотрении не только поверхностных и внутренних волн, но и волн, возникающих в жидкости с упругими границами [13–15]. На основе аппарата обобщенных функций и получаемых с его помощью фундаментальных решений могут разрабатываться как модели глобальных океанских процессов [16], так и локальных взаимодействий морской среды с искусственными объектами [17, 18]. Заметим, что рассматриваемый подход может иметь приложения к внутренним задачам гидродинамики, связанным с искусственными объектами весьма небольших масштабов по сравнению с океанскими [19].

Численное решение. В дальнейших расчетах примем H = 50 м. В реальных морских условиях типичное значение плотности воды в верхнем слое ρ_1 = 1022 кг/м^3. Плотность воды в нижнем слое имеет характерные значения $1023 \text{ кг/м}^3 \le \rho_2 \le 1029 \text{ кг/м}^3$. Таким плотностям соответствуют значения параметра $\delta = \rho_1/\rho_2$ в границах $0,993 \le \delta \le 0,999$. Наиболее заметно эффекты, обусловленные наличием жидких слоев с разными плотностями, проявляются при существенном различии этих плотностей. Поэтому рассмотрим случай сильной стратификации морской среды, соответствующий значению параметра δ = 0,993. Пусть источник находится на глубине h =100 м и выбрасывает в момент времени $t_0 = 0$ жидкость объемом V = 100 м^3.

Полное возмущение свободной поверхности жидкости, которое описывается выражением (14), представляет собой суперпозицию двух волн. В результате проведения численных расчетов выяснилось, что генерируемая рассматриваемым источником поверхностная (баротропная) волна S_1, амплитуда которой определяется формулами (15), (17), практически не зависит от толщины верхнего слоя жидкости. При ее изменении в пределах 30…70 м амплитуда волны S_1 меняется примерно на 0,1 %. Это можно объяснить тем, что даже при сильной стратификации морской среды значение отношения плотностей жидких слоев δ близко к единице. Поэтому волна S_1 с большой точностью соответствует волне, распространяющейся в однородной жидкости. Профили волны $S_1 = S_1(r,t)$ в разные моменты времени приведены на рис. 1. На рис. 2 показаны профили внутренней (бароклинной) волны $S_2 = S_2(r,t)$, амплитуду которой рассчитывают по формулам (16)–(18).

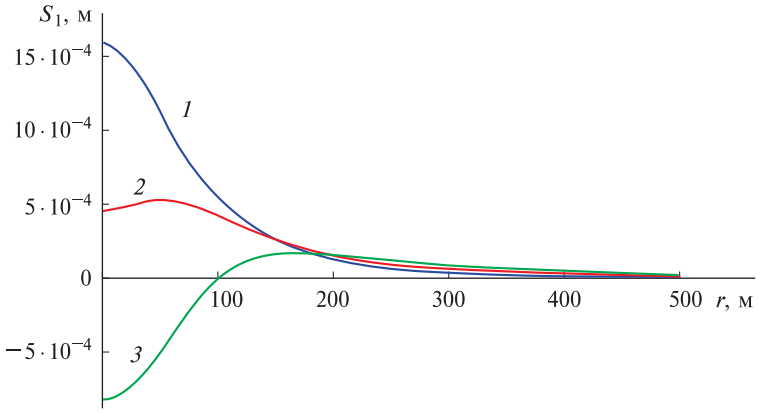


Рис. 1. Профили волны $S_1 = S_1(r, t)$:
1 — $t = 0$ с; *2* — $t = 3$ с; *3* — $t = 6$ с

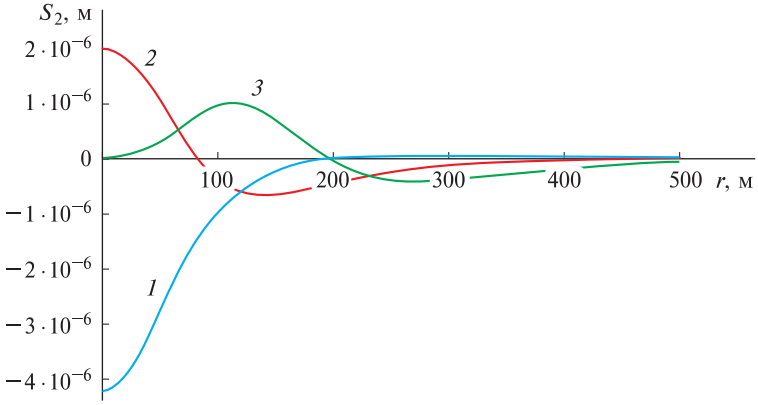


Рис. 2. Профили волны $S_2 = S_2(r, t)$:
1 — $t = 0$ с; *2* — $t = 100$ с; *3* — $t = 200$ с

Из графиков, приведенных на рис. 1 и 2, следует, что амплитуда волны S_2 имеет существенно больший характерный временной период, чем амплитуда волны S_1. При рассмотренных гидрофизических условиях волна S_1 в начальной стадии имеет максимальную амплитуду около 10^{-3} м и характерную длину 100 м. Для волны S_2 максимальная амплитуда составляет 10^{-6} м, длина — около 100 м. Заметность волны на морской поверхности можно характеризовать ее наклоном, т. е. отношением характерных значений амплитуды и длины. Проведенные расчеты показывают, что волна S_1 имеет наклон 10^{-5}, а волна S_2 — наклон 10^{-8}. Характерный период колебаний точек свободной поверхности жидкости, обусловленный волной S_1, составляет 1 с, волной S_2 — 100 с.

Заключение. Импульсный источник, локализованный в нижнем слое жидкости, генерирует на поверхности жидкости две кольцевые расходящиеся волны. В реальных морских условиях волна S_1 слабо зависит от соотношения плотностей жидких слоев и практически совпадает с волной, возникающей под действием источника в однородной жидкости. Волна S_2 связана исключительно со стратификацией и в однородной среде не образуется, ее можно рассматривать как поверхностное проявление внутренней волны. В рассмотренных гидрофизических условиях волна S_2 проявляется существенно слабее как по амплитуде, так и по наклону по сравнению с волной S_1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нестеров С.В., Шамаев А.С., Шамаев С.И., ред. *Методы, процедуры и средства аэрокосмической компьютерной радиотомографии приповерхностных областей Земли*. Москва, Научный мир, 1996, 272 с.

[2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели.* Москва, Наука, 1977, 407 с.

[3] Милн-Томпсон Л.М. *Теоретическая гидродинамика*. Москва, Мир, 1964, 655 с.

[4] Степанянц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн. *Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа*. Москва, ВИНИТИ, 1987, т. 21, с. 93–179.

[5] Булатов В.В., Владимиров Ю.В. *Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах.* Москва, Наука, 2005, 195 с.

[6] Булатов В.В., Владимиров Ю.В. *Волны в стратифицированных средах*. Москва, Наука, 2015, 735 с.

[7] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Поверхностные эффекты при обтекании препятствий в неоднородно-стратифицированной среде. *Доклады Академии наук*, 2011, т. 440, № 6, с. 826–829.

[8] Черкесов Л.В. *Поверхностные и внутренние волны*. Киев, Наукова думка, 1973, 248 с.

[9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. Москва, Наука, 1986, 736 с.

[10] Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. Москва, Наука, 1977, 815 с.

[11] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, Наука, 1987, 688 с.

[12] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Москва, Наука, 1971, 1108 с.

[13] Chowdhury R.G., Mandal B.N. Motion due to fundamental singularities in finite depth water with an elastic solid cover. *Fluid Dynamics Research*, 2006, vol. 38, no. 4, pp. 224–240.

[14] Lu D.Q., Dai S.Q. Generation of transient waves by impulsive disturbances in an inviscid fluid with an ice-cover. *Archive Applied Mechanics*, 2006, vol. 76, no. 1–2, pp. 49–63.

[15] Lu D.Q., Dai S.Q. Flexural and capillary-gravity waves due to fundamental singularities in an inviscid fluid of finite depth. *International journal of engineering science*, 2008, vol. 46, no. 11, pp. 1183–1193.

[16] Пархоменко В. П. Глобальная модель климата с описанием термохалинной циркуляции Мирового океана. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 1, с. 94–108.

[17] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Моделирование волнового воздействия стратифицированного течения на подводный трубопровод. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 62–76.

[18] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Моделирование волнового воздействия на горизонтальные элементы конструкций в верхнем слое стратифицированного течения. *Математическое моделирование и численные методы,* 2014, № 4, с. 74–87.

[19] Плюснин А.В. Моделирование внутреннего и внешнего нестационарного взаимодействия корпуса летательного аппарата с жидкостью методом граничных элементов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 77–100.

Статья поступила в редакцию 17.01.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Носов В.Н., Савин А.С. Численное моделирование возмущения свободной поверхности двухслойной жидкости точечным источником, локализованным в нижнем слое. *Математическое моделирование и численные методы*. 2019. № 3. с. 113–124.

Носов Виктор Николаевич — д-р техн. наук, зав. отделом морских исследований ГЕОХИ РАН. Автор более 100 научных работ в области гидродинамики, акустики, физики моря. e-mail: viktor_nosov@mail.ru

Савин Александр Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области теоретической и прикладной гидродинамики. e-mail: assavin@list.ru

Numerical simulation of perturbation of two-layer liquid free surface by a point source localized in the lower layer

© V.N. Nosov[1], A.S. Savin[2]

[1]Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991, Russia

[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The paper considers a pulse point source in the lower layer of stratified fluid. An expression for the perturbation of its free surface is obtained. It is shown that two waves arise on the surface of the liquid, associated with the presence of a density jump in it. Examples of numerical calculations for real sea conditions are shown. The pulse point source is a model of elementary perturbation of the liquid medium depth, allowing a complete mathematical study in the framework of the approximation of small waves. This approximation is quite justified in cases of simulating real disturbance sources located at considerable depths, since these sources transmit a very weak signal to the sea surface. The main problem in such cases is the isolation of this signal from background noise, such as wind waves. The solution of the problem should be based on the results of mathematical modeling of sea surface disturbances by different sources in the depth of the marine environment. More complex models can be designed by considering real disturbances of the

marine environment as some superpositions of model elementary disturbances from point pulse sources. Furthermore, a complete mathematical solution to the problem of a point pulse source gives an idea of the orders of the sea surface disturbance magnitudes, which creates the basis for obtaining various estimates of possible disturbances and therefore is of considerable interest in the development of requirements for sea surface remote sensing equipment.

Keywords: *liquid, point source, waves on the surface of the liquid*

REFERENCES

[1] Nesterov S.V., Shamayev A.S., Shamaev S.I. *Metody, protsedury i sredstva aerkosmicheskoy komputernoy radiotomografii pripoverkhnostnykh oblastey Zemli* [Methods, procedures and tools in aerospace computer radiotomography of the Earth surficial regions]. Moscow, Nauchnyy mir Publ., 1996, 272 p.

[2] Lavrentyev M.A., Shabat B.V. *Problemy gidrodinamiki i ikh matematicheskie modeli* [Problems of hydrodynamics and their mathematical models]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 407 p.

[3] Milne-Thompson L. M. *Theoretical hydrodynamics*. London, Macmillan Publ., 1938, 552 p. [Milne-Thompson L. M. *Teoreticheskaya gidrodinamika*. Moscow, Mir Publ., 1964, 655 p.

[4] Stepanyants Y.A., Sturova I.V., Teodorovich E.V. Linenaya teoriya generatsii poverkhnostnykh i vnutrennikh voln [Linear theory of generation of surface and internal waves]. In: *Itogi nauki i tekhniki. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Outcomes of science and technology. Fluid mechanics]. Moscow, VINITI Publ., 1987, vol. 21, pp. 93–179.

[5] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. *Vnutrennie gravitatsionnye volny v neodnorodnykh sredakh* [Internal gravitational waves in inhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 2005, 195 p.

[6] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. *Volny v stratifitsirovannykh sredakh* [Waves in stratified media]. Moscow, Nauka Publ., 2015, 735 p.

[7] Vladimirov I.Yu., Korchagin N.N., *Doklady Akademii nauk — Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2011, vol. 440, no. 6, pp. 826–829.

[8] Cherkesov, L.V., *Poverkhnostnye i vnutrennie volny* [Surface and internal waves]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1973, 248 p.

[9] Landau L.D., Lifshitz E.M. *Gidrodynamika* [Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 736 p.

[10] Sretensky L.N. *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [The theory of wave motion of a liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 815 p.

[11] Lavrentyev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of complex variable functions]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 688 p.

[12] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 1108 p.

[13] Chowdhury R.G., Mandal B.N. *Fluid Dynamics Research*, 2006, vol. 38, no. 4, pp. 224–240.

[14] Lu D.Q., Dai S.Q. *Archive of Applied Mechanics*, 2006, vol. 76, no. 1–2, pp. 49–63.

[15] Lu D.Q., Dai S.Q. *International Journal of Engineering Science*, 2008, vol. 46, no. 11, pp. 1183–1193.

[16] Parkhomenko V.P. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 1, pp. 94–108.

[17] Vladimirov I.Yu., Korchagin N.N., Savin A.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 62–76.

[18] Vladimirov I.Yu., Korchagin N.N., Savin A.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 74–87.

[19] Plusnin A. V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 77–100.

Nosov V.N., Dr. Sc. (Eng.), Head of the Department of Maritime Research, Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry of Russian Academy of Sciences. Author of over 100 research publications in the field of hydrodynamics, acoustics, physics of the sea. e-mail: viktor_nosov@mail.ru

Savin A.S., Dr. Sc. (Phys.-Mat.), Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 100 research publications in the field of theoretical and applied hydrodynamics. e-mail: assavin@list.ru