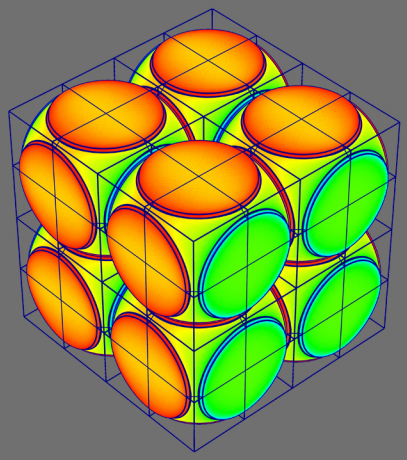
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Рождественская Т.П. Численное исследование трехмерных течений неоднородной жидкости около кругового цилиндра. Математическое моделирование и численные методы, 2019, № 1, с. 86–99.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/201/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.210
01.02.2026 13:55:11

УДК 551.555.9. DOI: 10.18698/2309-3684-2019-3-8699

Численное исследование трехмерных течений неоднородной жидкости около кругового цилиндра

© Т.И. Рождественская

Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, 123056, Россия

Актуальность изучения стратифицированной по плотности жидкости, в частности морской воды, имеет очень большое значение для науки и техники. Результаты таких исследований могут применяться при изучении обтекания морской водой подводных судов и частей судов, погруженных в воду, при исследовании морских течений за островами и, следовательно, безопасности мореплавания. В данной работе в качестве стратифицированной жидкости рассматривается вода, в которой растворена соль NaCl. Это наиболее распространенная в природе жидкость (вода в морях и океанах). Течение стратифицированной жидкости имеет особенности, не свойственные течению однородной жидкости. При исследовании двухмерной структуры течения вокруг препятствия были обнаружены такие явления, как опережающее возмущение (блокировка жидкости перед препятствием) и присоединенные внутренние волны. При более подробном рассмотрении тонкой структуры течения удалось выявить и другие особенности. В данной работе в вычислительном эксперименте исследовано трехмерное обтекание кругового цилиндра потоками стратифицированной жидкости в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Фруда. Обнаружено, что область, занятая присоединенными волнами, простирается на значительное расстояние вверх от передней критической точки цилиндра. В качестве численного метода исследования был использован разностный метод Белоцерковского — Гущина — Коньшина, имеющий второй порядок точности по пространственным координатам. Метод многократно тестировался и показывал хорошие результаты. Он осуществляется поэтапно: сначала вычисляются приближенные значения скоростей, затем по ним рассчитывается давление, по нему уточняются скорости и, наконец, вычисляется соленость. Программный комплекс, реализующий этот метод, адаптирован для машин с параллельной архитектурой с помощью техники MPI. Расчеты проводились на суперкомпьютере МВС-1000.

***Ключевые слова**: стратифицированная жидкость, круговой цилиндр, поле внутренних волн*

Введение. Стратифицированная жидкость характеризуется следующими параметрами: масштабом стратификации (плавучести), периодом плавучести, частотой Вяйсяля — Брента (частотой, с которой элементарный объем жидкости, смещенный в направлении силы тяжести из положения равновесия, колеблется около него под действием силы Архимеда). Если стратификация слабая, ее можно считать линейной. Стратификация характеризуется линейным масштабом $\Lambda = \left| d(\ln \rho)/dy \right|^{-1}$ и периодом плавучести $T_b = 2\pi / N = 2\pi\sqrt{\dfrac{\Lambda}{g}}$.

Здесь N — частота Вяйсяля — Брента; g — ускорение свободного падения. Основные свойства неоднородной жидкости описаны в ра-

боте [1]. Один из часто встречающихся в природе видов — экспоненциальная стратификации. Если стратификация слабая, ее можно считать линейной. В данной работе в качестве стратифицированной жидкости рассматривается морская вода, В данной работе в качестве препятствия рассматривался круглый цилиндр (тело вращения) — классический объект для изучения течений в механике сплошной среды. Все особенности моделировались численно. Конкретная реализация упомянутого выше метода Белоцерковского — Гущина — Коньшина описана в работе [2].

Исследование трехмерного обтекания цилиндра неоднородной по плотности жидкостью, насколько известно автору, до настоящего времени не проводилось ни теоретически, ни экспериментально. По неопубликованным результатам экспериментов стало известно, что трехмерность течения проявляется начиная с чисел Рейнольдса Re $\approx$ $\approx$ 250–300. Предварительные результаты этих экспериментов опубликованы в работе [3]. Этим обусловлен указанный далее диапазон параметров исследуемых течений. Рассматриваются течения двух жидкостей с разными периодами плавучести: более соленой, тяжелой с периодами плавучести T_b = 6,28 с, и T_b = 15 с, менее соленой, более легкой.

Диаметр цилиндра d во всех расчетах постоянный, равный 2 см, так что число Рейнольдса Re = Ud/ν, где U — скорость набегающего потока, а ν — вязкость жидкости, характеризует в данном рассмотрении скорость течения. Течения каждой из жидкостей рассматривались при одинаковых значениях чисел Рейнольдса: 300, 450, 600 и 1000. Течение жидкости описано уравнением Навье — Стокса для неоднородной жидкости, которое решается с помощью разностной схемы с теми же начальными и граничными условиями, как и для двумерной задачи, дополненными для 3D-течений условиями периодичности на обоих концах цилиндра.

Постановка задачи. Рассматривается поперечное обтекание кругового цилиндра диаметром d потоком линейно стратифицированной жидкости, плотность которой убывает с высотой y вследствие изменения солености:

$$\rho(y) = \rho_0(1 - y/\Lambda + s),$$

где $\rho_0 = \rho(0) = 1$; Λ — масштаб стратификации; s — возмущение солености.

Это явление описывается системой уравнений, состоящей из уравнения Навье — Стокса, записанного в приближении Буссинеска, которое применимо вследствие слабой стратификации; уравнения несжимаемости, полученного из уравнения неразрывности и уравнения диффузии соли. Приводится обезразмеренный вид уравнений:

$$\left(\mathrm{Fr}_g = \frac{U^2}{gd} = \mathrm{Fr}^2 \frac{d}{\Lambda}\right);$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\cdot\boldsymbol{v} + \frac{\vec{e}s}{\mathrm{Fr}_g};$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0;$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)s = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\nabla^2 s + \frac{d\,v_y}{\Lambda}; \qquad (1)$$

$$\mathrm{Pe} = \frac{Ud}{k_s},$$

где d — диаметр цилиндра; $\vec{e}$ — единичный вектор в направлении силы тяжести; v_y — компонента скорости в направлении оси y.

В качестве начальных условий для скорости задается невозмущенный плоскопараллельный поток: $u = U\cos\vartheta$, $v = -U\sin\vartheta$, $w = 0$; начальное условие для возмущения солености — $s = 0$.

В качестве граничных условий используются условия невозмущенного потока на достаточно удаленном от центра контуре G: $u = U\cos\vartheta$, $v = -U\sin\vartheta$, $w = 0$, $p = 0$, $s = 0$.

В качестве начальных условий применены условия прилипания для скорости $\mathbf{v}\big|_\Gamma = 0$ и отсутствия нормальной компоненты потока солености $\partial s/\partial n\big|_\Gamma = 0$ на поверхности цилиндра Г; (u, v, w) — компоненты вектора скорости вдоль осей преобразованной цилиндрической системы координат $(r, \vartheta, z) \to (z, \vartheta, k)$.

Расчетная область (рис. 1) заключена между двумя концентрическими «трубами» — границей цилиндра Г (внутренней) и условной границей G (внешней), за которой находится невозмущенная область. Поток жидкости со скоростью U направлен слева направо вдоль оси Ox. (Для того чтобы система координат была правой, ось y повернута вниз, соленость убывает снизу вверх.)

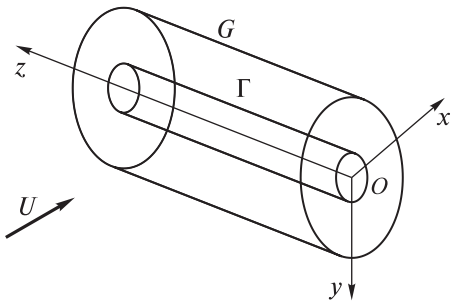


Рис. 1. Расчетная область течения

Методика расчета. Для удобства вычислений данную расчетную область преобразуем в прямоугольную (преобразования для двумерного варианта) (в трехмерном варианте ось z не преобразуется, она будет обозначена как ось k) со сторонами, расположенными в горизонтальном (z) и вертикальном (θ) направлениях, с помощью замены $r = R(z)$, где $R(z) = 1 + \alpha z + z^3$; α — коэффициент преобразования, $\alpha = 0,2\sqrt{2/\mathrm{Re}}$.

Новая ортогональная система координат (z, θ); $z \in [0, \infty]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, связана с декартовой системой преобразованием: $x = R(z)\cos\theta$; $y = R(z)\sin\theta$. Расчетная сетка в координатах z, θ является равномерной и более удобной для использования конечно-разностных методов, чем полярная сетка. В результате преобразования получаем прямоугольную сетку, которая позволяет эффективнее характеризовать особенности течения вблизи цилиндра.

Для решения системы уравнений (1) применен метод расщепления по физическим факторам с явной гибридной конечно-разностной схемой второго порядка аппроксимации по пространственным переменным. Она характеризуется монотонностью, минимальными схемной вязкостью и дисперсией, что дает возможность выполнять расчеты в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Фруда [2]. При использовании метода расщепления решение задачи разделяется на три этапа. Пусть в некоторый момент времени $\tau_n = n\Delta\tau$, здесь n — число шагов (известно поле скорости $\vec{v}^n$); $\Delta\tau$ — шаг по времени. Тогда схему определения неизвестных функций в момент времени $\tau_{n+1} = (n+1)\Delta\tau$ можно представить следующим образом.

На *первом этапе* определяется вспомогательная сеточная функция $\tilde{v}$, учитывающая только конвективные и вязкие члены, а также силы плавучести, но не удовлетворяющая условию $\operatorname{div}\vec{v} = 0$:

$$\frac{\tilde{v} - v^n}{\Delta\tau} = -(v^n\nabla)\, v^n + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 v^n + \frac{\vec{g}s}{\mathrm{Fr}_g}.$$

На *втором этапе* из решения уравнения Пуассона находится поле давления с учетом условия $\nabla v^{n+1} = 0$:

$$\nabla^2 p = \frac{\nabla\tilde{v}^n}{\Delta\tau};$$

$$\frac{\tilde{v} - v^n}{\Delta\tau} = -(v^n\nabla)\, v^n + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 v^n + \frac{\vec{g}s}{\mathrm{Fr}_g}.$$

На *третьем этапе* вычисляется поле скоростей на (n + 1)-слое по времени:

$$v^{n+1} = \tilde{v} - \nabla p \Delta\tau.$$

Затем, учитывая найденное значение v^{n+1}, решается уравнение для возмущения солености:

$$s^{n+1} = s^n - \Delta\tau(v^{n+1}\nabla)s - \frac{\Delta\tau\Delta s}{\mathrm{Pe}} + \frac{\Delta\tau\, D\,(u\sin\vartheta + v\cos\vartheta)}{\Lambda}.$$

При решении этого уравнения в создании разностной схемы для $(v^{n+1}\nabla)s$ был использован тот же принцип, что и для $(v^n\nabla)v^n$ в уравнении Навье — Стокса. Иными словами, результирующая схема представляет собой гибридную конечно-разностную схему, основанную на комбинации модифицированных схем с центральными и ориентированными разностями; условие переключения с одной схемы на другую зависит от знаков скорости, а также от первой и второй производных переносимой функции в рассматриваемой точке течения. Уравнение Пуассона для определения давления решается итерационным методом ТВР [4]. В граничных условиях для расчета давления на поверхности цилиндра служит схема Истона [5]. Граничные условия включены в эту схему. Первоначально по этой схеме была рассчитана двумерная задача [6–9]. Для двумерной задачи расчетная сетка содержит 180 узлов по z-направлению и 180 узлов по θ-направлению (первая ячейка — 0,7 × 0,44 мм, что достаточно для разрешения элементов тонкой структуры). Удаление внешней границы от поверхности цилиндра составляет $z_{\max}$ = 4,5, т. е. примерно 45 диаметров цилиндра. Пробы подбора различной густоты сеток выполняли, изменяя при этом расстояние удаления внешней границы таким образом, чтобы шаг по пространственной координате оставался неизменным, т. е. чтобы значения вычисляемых параметров были всегда в одних и тех же точках. Пробы делали при следующих условиях варианта течения: T_b = 25,2 с, Re = 25, Fr = 0,16.

Сначала была испытана сетка (240 × 240) при удалении внешней границы $z_{\max}$ = 6. Результаты в виде полного подобия картинок мгновенных линий тока и линий равной солености совпадали с результатами первоначально выбранного варианта. Затем была испытана сетка (160×160) при удалении внешней границы $z_{\max}$ = 4. Результаты в целом совпадали с результатами первоначального варианта сетки и удаления внешней границы, но были несколько менее информативны, а изображение получалось менее четким. В итоге все расчеты проводились с первоначальным вариантом сетки и положения внешней границы, поскольку сетка (180×180) обладает лучшей разрешающей способностью.

Для расчетной реализации методики, изложенной выше, был создан комплекс программ на языке программирования FORTRAN 77, который затем был распараллелен в направлении оси z вдоль радиуса цилиндра. Распараллеливание осуществлялось с помощью технологии MPI [9]. Параллельный алгоритм был оптимизирован для увеличения скорости обмена данными между процессорами.

Шаг по времени автоматически выбирается с учетом применяемой системы координат из условия

$$\Delta\tau = 0{,}1\min\left\{\frac{dz}{u_{\max}}, \frac{d\vartheta}{v_{\max}}, \frac{dk}{w_{\max}}\right\},$$

где dz, $d\vartheta$, dk — координатные ячейки в соответствующем направлении; $u_{\max}$, $v_{\max}$, $w_{\max}$ — максимальные скорости в этих направлениях.

С учетом сопоставимости с экспериментом продолжительность расчетной реализации составляет 10 T_b.

Расчетная длина цилиндра $L = 7r$, т. е. равна 7 его радиусам; шаг сетки по образующей составляет 0,2 радиуса; всего по образующей находятся 36 точек [11]. Применялась модернизированная цилиндрическая система координат, описанная выше: число точек по окружности — 180, а в направлении радиуса — в зависимости от длины расчетной области $z_{\max}$ — от 180 до 280 (что дает возможность сохранить примерно одинаковую длину ячейки в направлении радиуса для обеспечения прежней разрешающей способности сетки). Для выявления 3D-эффекта приведены рисунки мгновенных линий тока в первом (k = 1) и среднем (k = 18) сечениях цилиндра (рис. 2–5). Здесь k — ось в направлении образующей цилиндра. Расчеты всех течений проводили до времени $10T_b$, к которому течение уже устанавливается.

Течения с периодом плавучести T_b = 6,28 с. Исследования проводились в условиях с разными параметрами.

В первом варианте: течение с Re = 300, Fr = 0,48, $z_{\max}$ = 4,5, число точек по радиусу M = 180, по образующей цилиндра — везде 36. Мгновенные линии тока изображены на рис. 2, на котором видна полная идентичность линий в обоих сечениях, что говорит об отсутствии 3D-эффекта при данных параметрах течения.

Во втором варианте течение с параметрами: Re = 450, Fr = 0,72, $z_{\max}$ и M — те же, что и в предыдущем варианте. В мгновенных линиях тока размер вихревой области позади цилиндра немного увеличен по сравнению с первым вариантом. Как и в предыдущем случае, рисунки при k = 1 и k = 18 практически одинаковы, что указывает на отсутствие 3D-эффекта и в этом течении.

В третьем варианте рассматривалось течение с параметрами Re = 600, Fr = 96. Начиная с этих значений появляется «рябь» вверх по течению от передней критической точки цилиндра, ось течения искривляется и в рисунках мгновенных линий тока (рис. 3).

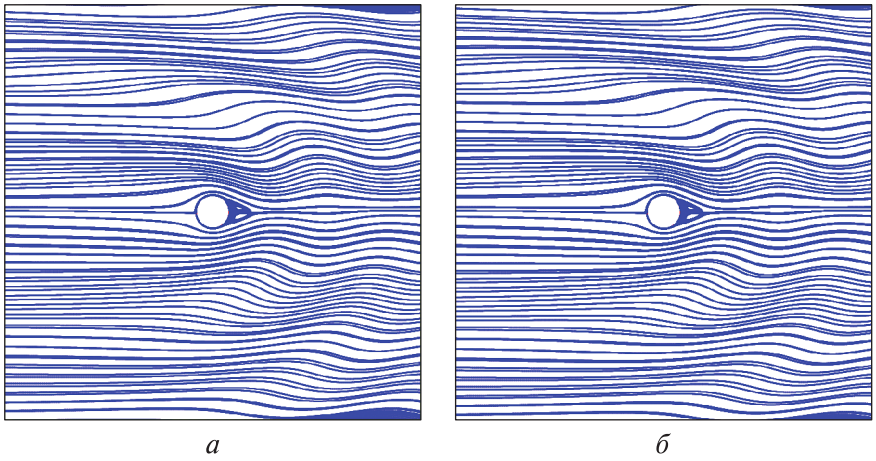


Рис. 2. Мгновенные линии тока для течения жидкости с периодом плавучести T_b = 6,28 с и параметрами Re = 300 и Fr = 0,48:
а — для сечения k = 1; *б* — для сечения k = 18

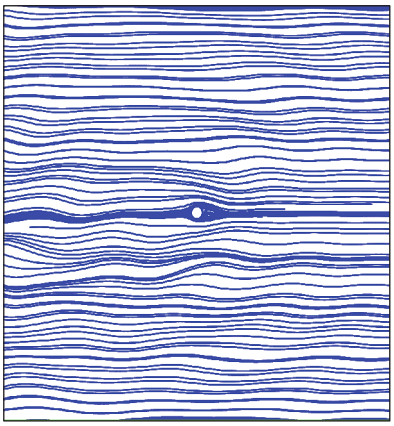
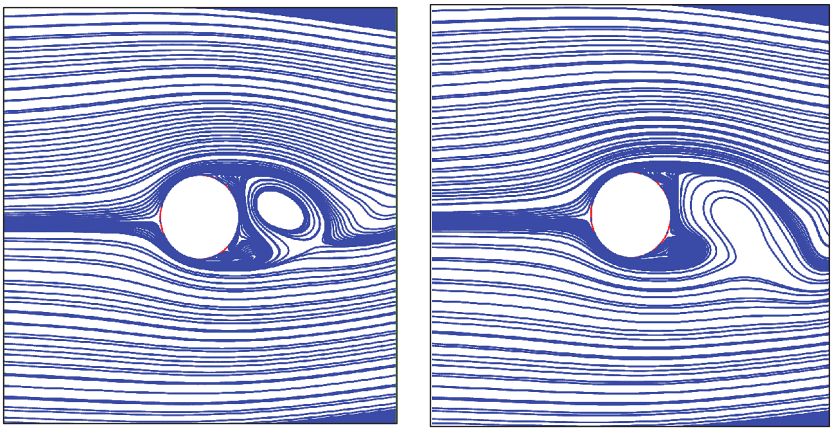


Рис. 3. Мгновенные линии тока для течения жидкости с параметрами Re = 600 и Fr = 0,96

Предположено, что причиной этого явления может быть то, что область, занятая внутренними волнами, простирается дальше, чем в предыдущих случаях, вверх по потоку, и «режется» близко поставленной расчетной воображаемой границей $z_{\max}$ = 4,5. С учетом этого была установлена граница $z_{\max}$ = 6,5, соответственно увеличено число точек сетки по радиусу M = 220. В этом случае «рябь» не наблюдалась. Следовательно, выбранная граница $z_{\max}$ и будет примерно границей области, занятой внутренними волнами вверх по течению от передней критической точки цилиндра. Для подтверждения отсутствия «ряби» были выполнены мелкомасштабные виды мгновенных линий тока этого течения при k = 1 и k = 18. Такие виды нужны для отображения значительной части поля течения, чтобы показать, что оно не «режется»

близко поставленной границей. В крупномасштабных видах мгновенных линий тока различие между изображениями сечений $k = 1$ и $k = 18$ заметно, т. е. 3D-эффект наблюдается. Следовательно, 3D-эффект начинает слабо проявляться в течении с Re = 600.

В четвертом варианте параметры течения: Re = 800, Fr = 1,28, $z_{max} = 6{,}5$, $M = 220$; эффект трехмерности выражен еще более отчетливо (рис. 4).



а *б*

Рис. 4. Мгновенные линии тока для течения жидкости с периодом плавучести $T_b = 6{,}28$ с, параметрами Re = 800 и Fr = 1,28:
а — для сечения $k = 1$; *б* — для сечения $k = 18$

В пятом варианте параметры течения: Re = 1000, Fr = 1,6. Поскольку в мелкомасштабном изображении мгновенных линий тока этого течения появляется «рябь», решено было принять $z_{max} = 7{,}5$, т.е. отдалить внешнюю границу расчетной области. Соответственно, число точек по радиусу увеличивается до $M = 240$. Выбор z_{max} и M для жидкости с периодом плавучести $T_b = 6{,}28$ с приведен в табл. 1.

Таблица 1

Выбор z_{max} и M в зависимости от числа Рейнольдса Re для течения жидкости с периодом плавучести $T_b = 6{,}28$ с

Номер варианта	Число Рейнольдса Re	z_{max}	Радиус цилиндра r, мм	M
1	300	4,5	91,25	180
2	450	4,5	91,25	180
3	600	6,5	274,6	220
4	800	6,5	274,6	220
5	1000	> 7,5	> 421,9	240

Течения жидкости с периодом плавучести $T_b = 15$ с. Поскольку в мелкомасштабных изображениях мгновенных линий тока во всех течениях жидкости с $T_b = 15$ с на левой границе появлялась «рябь»

при z_{max} = 6,5 (т. е. поле течения «режется» этой границей), были назначены граница расчетной области z_{max} = 7,5 и число точек M = 240. Результаты исследований следующие:

- параметры течения: Re = 300, Fr = 1,146; эффект трехмерности отсутствует;
- параметры течения: Re = 450, Fr = 1,719; эффект трехмерности начал проявляться;
- параметры течения: Re = 600, Fr = 2,292; эффект трехмерности усиливается;
- параметры течения: Re = 800, Fr = 3,056, z_{max} = 9,5, M = 280. Поскольку в мелкомасштабных видах предыдущего течения намечается некоторая «рябь», решено было отдалить условную границу расчетной области и, соответственно, увеличить количество точек схемы вдоль радиуса. Трехмерный эффект отчетливо проявляется;
- параметры течения: Re = 1000, Fr = 3,82; трехмерность течения еще более отчетливо выражена. Для жидкости с периодом плавучести T_b = 15 с эффект трехмерности наступает раньше, чем для жидкости с периодом плавучести T_b = 6,28 с; размер возмущенного поля течения гораздо больше вследствие большей легкости.

Выбор z_{max} и M в зависимости от числа Рейнольдса Re для жидкости с периодом плавучести T_b = 15 с приведен в табл. 2.

Таблица 2

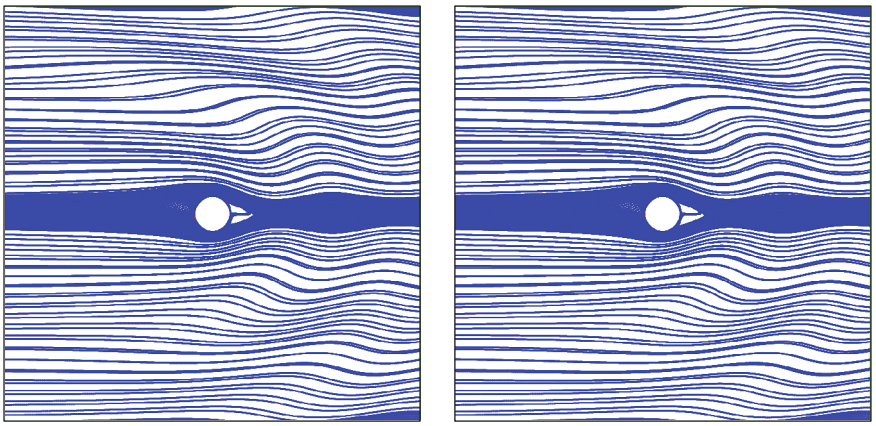
Выбор z_{max} и M в зависимости от числа Рейнольдса Re для течения жидкости с периодом плавучести T_b = 15 с

Номер варианта	Число Рейнольдса Re	Граница расчетной области z_{max}	Радиус цилиндра r, мм	Число точек M
1	300	7,5	421,9	240
2	450	7,5	421,9	240
3	600	7,5	421,9	240
4	800	9,5	857,4	280
5	1000	> 9,5	> 857,4	280

Из приведенных в табл. 2 данных можно сделать вывод, что положение внешней границы расчетной области может характеризовать протяженность возмущенного поля течения, которая возрастает с увеличением Re (скорости течения), поскольку при подобранном таким способом значении z_{max} поле течения не искажается, мгновенные линии тока и ось течения перед передней критической точкой цилиндра не искривляются. Таким образом, можно сказать, что размер возмущенного поля течения не превышает z_{max}. Это значение и будет верхней оценкой размера области, занятой внутренними волнами, поскольку поле течения вверх по потоку искажается именно вследствие распространения их в этом направлении.

Подтверждение достоверности результатов. Ввиду отсутствия опубликованных результатов других авторов по 3D-обтеканию цилиндра неоднородной жидкостью приводится сравнение с достоверными результатами (очень хорошо совпадающими с экспериментом) для 2D-обтекания цилиндра такого же диаметра жидкостями с параметром течения Re = 300 и периодом плавучести T_b = 6,28 с, с параметрами Re = 300, Fr = 0,48 (при таком режиме течение еще двумерное), причем результаты решения 3D-задачи относятся к сечению $k = 1$.

На рис. 5 изображены виды двумерного и трехмерного течений жидкости с периодом плавучести T_b = 6,28 с, параметрами Re = 300 и Fr = 0,48.



а *б*

Рис. 5. Сравнение мгновенных линий тока для течения жидкости с периодом плавучести T_b = 6,28 с, параметрами Re = 300 и Fr = 0,48:
а — для 2D-видов линий; *б* — для 3D-видов линий сечением $k = 1$

Кроме того, приводятся сравнительные графики на оси течения за задней критической точкой цилиндра для двумерного и трехмерного течений для периодов плавучести T_b = 6,28 с и T_b = 15 с (рис. 6).

Из рис. 6 видно, что для жидкости с периодом плавучести T_b = = 6,28 с для течения с параметрами Re = 300 и Fr = 0,48 в мгновенных линиях тока и линиях равной солености наблюдается полное совпадение в 2D- и 3D-вариантах.

Для жидкости с периодом плавучести T_b = 15 с при течении с параметрами Re = 300 и Fr = 1,146 так же, как и для жидкости с периодом плавучести T_b = 6,28 с — в мгновенных линиях тока и линиях равной солености — практически полное совпадение в 2D- и 3D-вариантах.

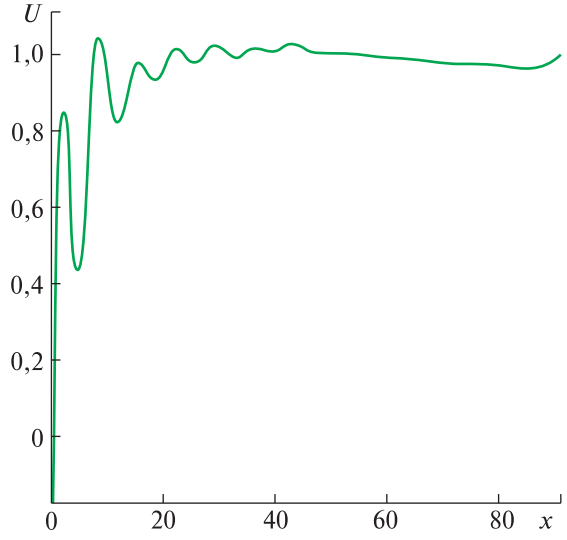


Рис. 6. Сравнительная скорость течения жидкости на оси течения в двумерном и трехмерном случаях с периодом плавучести $T_b = 6{,}28$ с, параметрами Re = 300 и Fr = 0,48

Таким образом, можно считать на основании вышеприведенных сравнений, что результаты расчета 3D-течений достоверны и что зависимость между величиной возмущенного поля течения и скоростью набегающего потока (выраженной числом Re, поскольку диаметр цилиндра во всех расчетах брали постоянным и равным 2,5 см) установлена. Результаты расчетов трехмерной задачи опубликованы в работах [12, 13].

Выводы. При рассмотрении трехмерных течений было установлено следующее.

1. Для жидкости с периодом плавучести $T_b = 15$ с эффект трехмерности наступает раньше, чем для жидкости с периодом плавучести $T_b = 6{,}28$ с. Область, занятая присоединенными волнами вверх по течению от передней критической точки цилиндра, имеет гораздо больший размер вследствие большей легкости этой жидкости (в нее легче внести большее возмущение).

2. Величина области, занятой присоединенными волнами вверх по течению от передней критической точки цилиндра, зависит от числа Рейнольдса набегающего потока, она увеличивается с ростом этого числа и примерно на три порядка превышает диаметр цилиндра.

3. Это явление может быть использовано для раннего обнаружения объектов, движущихся с большой скоростью в морской воде.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тернер Дж. *Эффекты плавучести в жидкостях*. Москва, Мир, 1977, 431 с.

[2] Гущин В.А. Метод расщепления для задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1981, т. 21, № 4, с. 1003–1017.

[3] MitkinV.,Chashechkin Yu. Souring interfaces, vortices and vortex system inside the internal waves wake past the horizontally moving cylinder in a continuously stratified fluid. *Journal of Visualization*, 2006, no. 9, pp. 301–308.

[4] Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва, Наука, 1978, 592 с.

[5] Easton C.R. Homogeneous boundary conditions for pressure in MAC method. *J. Comput. Phys*., 1972, vol. 9, no. 2, pp. 375–379.

[6] Гущин В.А., Миткин В.В., Рождественская Т.И., Чашечкин Ю.Д.. Численное и экспериментальное исследование тонкой структуры течения стратифицированной жидкости вблизи кругового цилиндра. *Прикладная механика и техническая физика*, 2007, т. 48, № 1, с. 43–54.

[7] Gushchin V.A., Mitkin V.V., Rozhdestvenskaya T.I., Chashechkin Yu.D. Numerical and Experimental Study of the Fine Structure of a Stratified Fluid Flow around Circular Cylinder. *Journal of applied Mechanics and Technical Physics*, 2007, vol. 48, no.1, pp. 34–43.

[8] Гущин В.А., Рождественская Т.И. Численное исследование явлений, возникающих в течениях стратифицированной жидкости с небольшими периодами плавучести около кругового цилиндра. *Прикладная механика и техническая физика*, 2011, т. 52, № 6, с. 69–76.

[9] Gushchin V.A., Rozhdestvenskaya T.I. Numerical Study of the Effects occurring near a circular cylinder in Stratified Fluid Flows with short buoyancy period. *Journal of applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, vol. 52, no. 6, pp. 905–911.

[10] Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI. Издательство Московского университета, 200, 71 с.

[11] Zhang H.-Q, Fey U., Noack B.R, Koenig, M. , Eckelman, H. On the Transition of the Cylinder Wake. *Physics of Fluids,* 1995, vol. 7, no. 4, pp. 779–794.

[12] Рождественская Т.И.. Численное исследование свойств неоднородных жидкостей при обтекании ими кругового цилиндра. *Сб. науч. тр. XI Всероссийский съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики.* Казань, 2015, с. 3232–3233.

[13] Рождественская Т.И. Численные исследования свойств неоднородных жидкостей при обтекании ими кругового цилиндра. *Тез. докл. Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященной памяти академика Л.И. Седова в связи со 110-летием со дня его рождения. Москва*, 2017.

Статья поступила в редакцию 22.03.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Рождественская Т.П. Численное исследование трехмерных течений неоднородной жидкости около кругового цилиндра. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 1, с. 86–99.

Рождественская Татьяна Ивановна — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Института автоматизации проектирования (ИАП РАН). e-mail: arcadia11@yandex.ru

Numerical simulation of 3d stratified fluid flows around circular cylinder

© T.I. Rozhdestvenskaya

Institute for computer aided design RAS, Moscow, 123056, Russia

The relevance of study of the liquid stratified density, in particular sea water, is very important for science and technology. The results of such research can be used in the study of the sea water flow around underwater vessels and parts of ships submerged in water, in the study of sea currents behind the islands and, consequently, the safety of navigation. In this paper NaCl salt water solution is considered as a stratified liquid. This is the most common liquid in nature (water in the seas and oceans). The flow of a stratified fluid has characteristics other than flow of a homogeneous fluid. When studying the two-dimensional structure of the flow around the obstacle, such phenomena as outstripping disturbance – fluid blocking in front of obstacle and connected internal waves were discovered. Examining the thin structure of the flow with more details, it is possible to identify other features. This paper investigates numerically a three-dimensional flow of stratified liquid around a circular cylinder in a wide range of Reynolds and Froude numbers. It is found that the region occupied by the internal waves extends to a considerable distance up from the front critical point of the cylinder. The finite difference method of Belotserkovsky-Gushchin-Konshin having the second order of accuracy in spatial coordinates is used as a numerical method of research. The method was repeatedly tested and showed good results. It is implemented in stages: at first the approximate velocity values are computed then the pressure is computed based on these values, after that velocities are revised and finally the salinity is calculated. The software package implementing this method is adapted for machines with parallel architecture using MPI technology. Computations were carried out on the supercomputer MVS-1000.

Keywords: *stratified fluid, circular cylinder, internal wave field*

RFERENCES

[1] Turner J.S. *Buoyancy Effct In Fluids.* Cambridge. Cambridge University Press Publ., 1973, 368 p.[In Russ: *Effekty plavuchesti v zhidkostyakh*., Moscow, Mir Publ., 1977, 431 p.]

[2] Gushchin V.A. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoi fiziki RAN — Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1981, vol. 21, no. 4, pp. 1003–1017.

[3] Mitkin.V., Chashechkin. Yu. *Journal of Visualization*, 2006 no. 9, pp. 301–308.

[4] Samarsky A.A., Nikolaev E.S. *Metody resheniya setochnych uravneniy* [Methods for solving finite-difference equation]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 592 p.

[5] Easton C.R. *Journal of Computational Physics*, 1972, vol. 9, mo. 2, pp. 375–379.

[6] Gushchin V.A., Mitkin V.V., Rozhdestvenskaya T.I., Chashechkin Yu.D. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2007, vol. 48, no. 1, pp. 43–54.

[7] Gushchin V.A., Mitkin V.V., Rozhdestvenskaya T.I., Chashechkin Yu.D. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2007, vol. 48, no. 1, pp. 34–43.

[8] Gushchin V.A., and Rozhdestvenskaya T.I. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, vol. 52, no. 6, pp. 69–76.

[9] Gushchin V.A., and Rozhdestvenskaya T.I. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, vol. 52, no. 6, pp. 905–911.

[10] Antonov A.S. *Parallelnoe programmirovanie s ispolsovaniem technologii MPI* [Parallel programming using MPI technology]. Moscow, MSU Publ., 2004, 71 p.

[11] Zhang H.-Q, Fey U., Noack B.R, Koenig, M., Eckelman, H. *Physics of Fluids*, 1995, vol. 7, no. 4, pp. 779–794.

[12] Rozhdestvenskaya T.I. Chislennoe issledovanie svoistv neodnorodnykh zhidkostey pri obtekanii imi krugovogo tsilindra [Numerical study of the properties of inhomogeneous liquids flowing around a circular cylinder]. *Sbornik nauchnykh trudov XI Vserossiyskogo syezda po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki* [Proceedings of the XI all-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics], Kazan 2015, pp. 3232–3233.

[13] Rozdestvenskaya T.I. Chislennnye isledovaniya svoystv neodnorodnykh zhidkostey pri obtekanii imi krugovogo tsilindra [Numerical study of the properties of inhomogeneous liquids flowing around a circular cylinder]. *Tezisy dokladov Mezdunarodnoy konferentsii «Sovremennuye problemy mekhaniki sploshnoy sredy», posvjashchennoy pamyati akademika L.I. Sedova v svjazi so 110-letiem so dnya ego rozhdeniya* [International conference "Current problems of continuum mechanics" dedicated to the memory of academician L.I. Sedov in connection with the 110th anniversary of his birth. Abstracts]. Moscow, 2017.

Rozhdestvenskaya T.I., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Researcher, Institute for Computer Aided Design of Russian Academy of Science. e-mail: arcadia11@yandex.ru