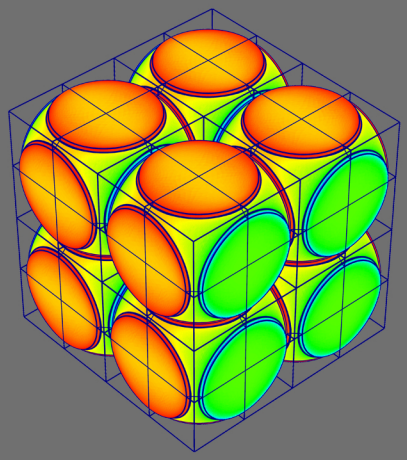
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Белкин А. Е., Даштиев И. З., Лонкин Б. В. Моделирование вязкоупругости полиуретана при умеренно высоких скоростях деформирования. Математическое моделирование и численные методы, 2014, №3 (3), с. 39-54

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/20/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
12.11.2026 17:34:52

УДК 539.3

Моделирование вязкоупругости полиуретана при умеренно высоких скоростях деформирования

© А.Е. Белкин[1], И.З. Даштиев[2], Б.В. Лонкин[1]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2] ЦНИИСМ, г. Хотьково Московской обл., 141372, Россия

Представлена математическая модель вязкоупругого поведения полиуретана СКУ-ПФЛ-100 для диапазона деформаций 0...30 % и умеренно высоких скоростей деформирования, не превышающих значения 10^{-1}. Для определения вязкой составляющей деформации применена реологическая модель Бергстрема – Бойс. Связь напряжения с упругой составляющей деформации описана с помощью потенциала Арруды – Бойс. Для определения параметров модели использовались экспериментальные диаграммы сжатия полиуретана, полученные на машине Instron Electropuls 1000 при различных скоростях деформирования. Приведены значения параметров модели, найденные путем минимизации функции отклонений расчетных величин от результатов эксперимента. Показано, что в рассмотренном диапазоне деформаций и их скоростей модель позволяет описать поведение полиуретана с достаточной для практических целей точностью. Модель предназначена для расчета полиуретановых деталей амортизаторов, поглощающих аппаратов, буферов и других конструкций, испытывающих динамические нагрузки.

Ключевые слова: *полиуретан, вязкоупругость, математическая модель Бергстрема – Бойс, упругий потенциал Арруды – Бойс, диаграмма сжатия, скорость деформации, гистерезис, определение параметров модели.*

Введение. При анализе работы полиуретановых деталей амортизаторов, поглощающих аппаратов, буферов и других конструкций, испытывающих динамические нагрузки, важное значение приобретает учет зависимости механических свойств полиуретана от режима нагружения, в частности скорости нагружения. Для расчета таких деталей должна привлекаться теория вязкоупругих деформаций эластомеров [1, 2]. Среди формулировок законов вязкоупругости для резиноподобных материалов весьма популярным у специалистов является предложение Бергстрема – Бойс [3]. Исследования [3–5] показывают, что модель Бергстрема – Бойс позволяет достаточно точно описать экспериментальные данные для резины, включая гистерезис при циклическом нагружении и зависимость диаграмм материала от скорости деформирования. Применимость этой модели к полиуретану для процессов с низкими скоростями деформирования изучалась в работе [6], где сделан вывод о ее хорошей предсказательной способности. В настоящей статье анализируется применение модели Бергстрема – Бойс для описания вязкоупругого поведения полиуретана СКУ-ПФЛ-100 при умеренно высоких скоростях деформирования.

Числовые значения параметров модели определяются по результатам испытаний образцов на сжатие с различными скоростями нагружения.

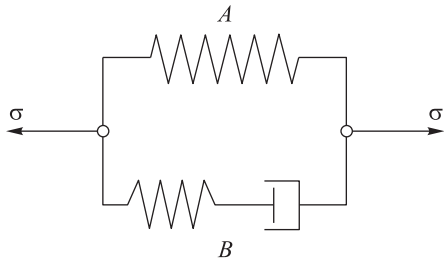


Рис. 1. Условная модель вязкоупругого материала

Математическая модель вязкоупругости полиуретана. Согласно [3], поведение вязкоупругого материала подобно поведению условной механической системы (рис. 1), состоящей из двух параллельно соединенных звеньев A, B разной природы. Упругое звено A определяет поведение при медленном статическом нагружении, когда демпфер вязкоупругого звена B не сопротивляется деформации и не воспринимает напряжения. В случае конечной скорости деформации работают оба звена системы, причем сопротивление демпфера зависит от скорости деформации. При очень быстром динамическом (мгновенном) нагружении демпфер «запирается», в нем не происходит деформации и напряжение распределяется между упругими элементами звеньев A и B. В этом случае реакция системы является упругой, однако жесткость повышается по сравнению с медленным упругим деформированием.

Выбор потенциала для упругих элементов звеньев, а также закона изменения вязких деформаций демпфера определяет поведение модели.

При параллельном соединении структур (звеньев) их деформации одинаковы:

$$\mathbf{F}^A = \mathbf{F}^B = \mathbf{F}, \tag{1}$$

здесь $\mathbf{F}$ — градиент вектора места (градиент деформации).

Напряжения в материале складываются из откликов структур (звеньев):

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^A + \boldsymbol{\sigma}^B. \tag{2}$$

Статическая составляющая напряжения $\boldsymbol{\sigma}^A$ определяется соотношениями гиперупругости на основе выражения для удельной энергии деформации материала

$$W^A = \tfrac{1}{2} k (J-1)^2 + \overline{W}^A(\overline{I}_{1C}, \overline{I}_{2C}), \tag{3}$$

где k — модуль объемного сжатия; $J = \det \mathbf{F}$ — мера объемной деформации; $\overline{W}^A(\overline{I}_{1C}, \overline{I}_{2C})$ — энергия изохорической деформации; $\overline{I}_{1C} = tr\,\overline{\mathbf{C}}$, $\overline{I}_{2C} = \tfrac{1}{2}\left(\overline{I}_{1C}^2 - \overline{\mathbf{C}} : \overline{\mathbf{C}}\right)$ — соответственно первый и второй инварианты тензора меры изохорической деформации $\overline{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$.

В соответствии с выражением (3) второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа $\mathbf{S}^A = 2\dfrac{\partial W^A}{\partial \mathbf{C}}$ имеет вид [7]

$$\mathbf{S}^A = kJ(J-1)\mathbf{C}^{-1} + 2\varphi_1^A\left(\mathbf{I} - \tfrac{1}{3}I_{1C}\mathbf{C}^{-1}\right) + 2\varphi_2^A\left(I_{1C}\mathbf{I} - \mathbf{C} - \tfrac{2}{3}I_{2C}\mathbf{C}^{-1}\right), \quad (4)$$

где $\varphi_1^A = J^{-2/3}\dfrac{\partial \overline{W}^A}{\partial \overline{I}_{1C}}$; $\varphi_2^A = J^{-4/3}\dfrac{\partial \overline{W}^A}{\partial \overline{I}_{2C}}$; $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$; $I_{1C} = tr\,\mathbf{C}$; $I_{2C} = \tfrac{1}{2}\left(I_{1C}^2 - \mathbf{C} : \mathbf{C}\right)$.

Переходя к истинным напряжениям Коши по формуле $\boldsymbol{\sigma}^A = J^{-1}\mathbf{F}\,\mathbf{S}^A\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$, можно получить

$$\boldsymbol{\sigma}^A = k(J-1)\mathbf{I} + 2J^{-1}(\varphi_1^A + I_{1C}\varphi_2^A)\,dev\,\mathbf{B} - 2J^{-1}\varphi_2^A\,dev(\mathbf{BB}), \quad (5)$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ — тензор меры деформации Фингера [7], символ dev обозначает девиатор тензора.

Конкретизируем вид функции удельной энергии деформации полиуретана. Как известно, для эластомеров предложено большое число вариантов определения этой функции, выбор сложен. Весьма успешным, способным описать экспериментальные данные при различных видах напряженного состояния, признается потенциал Арруды – Бойс [8] для цепочечной модели эластомера

$$\overline{W}^A = C^A\left(\frac{\lambda_{chain}}{\lambda_{lock}^A}\beta - \ln\frac{\mathrm{sh}\,\beta}{\beta}\right), \quad (6)$$

где C^A — коэффициент, пропорциональный начальному значению модуля сдвига эластомера; $\lambda_{chain} = \sqrt{\overline{I}_{1C}/3}$ — кратность усредненного удлинения макромолекулярной цепи эластомера; λ_{lock}^A — предельное удлинение молекулярной цепи; $\beta = L^{-1}(\lambda_{chain}/\lambda_{lock}^A)$ — функция, обратная к функции Ланжевена $L(\beta) = cth(\beta) - \beta^{-1}$.

Модель материала Арруды – Бойс включена в конечно-элементные комплексы ANSYS, ABAQUS, MARC, что способствует ее популярности.

Воспользуемся потенциалом (6) для определения напряжений. При этом учтем, что для обратной к функции Ланжевена существуют различные аппроксимации [9,10]; в настоящей работе применим простейшую из них:

$$L^{-1}(x) = x\left(\frac{3-x^2}{1-x^2}\right), \quad x = \lambda_{chain}/\lambda_{lock}^A.$$

При потенциале (6) соотношения упругости принимают вид

$$\boldsymbol{\sigma}^A = k(J-1)\mathbf{I} + \frac{G^A}{J\lambda_{chain}} \frac{L^{-1}(\lambda_{chain}/\lambda^A_{lock})}{L^{-1}(1/\lambda^A_{lock})} \operatorname{dev}\bar{\mathbf{B}}\,, \tag{7}$$

где $G^A = \dfrac{C^A}{3\lambda^A_{lock}} L^{-1}(1/\lambda^A_{lock})$ — постоянная материала, имеющая значение начального модуля сдвига; $\bar{\mathbf{B}} = J^{-2/3}\mathbf{B}$ — тензор меры Фингера для изохорической деформации.

Закон упругости Арруды – Бойс (7) содержит параметры G^A, λ^A_{lock}, k, определяемые экспериментально.

Определение динамической составляющей напряжения $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{B}}$ основывается на принципе мультипликативного разложения градиента полной деформации на упругую $\mathbf{F}_e$ и вязкую $\mathbf{F}_v$ части

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e\,\mathbf{F}_v \tag{8}$$

с последующей формулировкой закона течения для скоростей вязких деформаций.

Пользуясь представлением (8) и составляя выражение для пространственного градиента скорости [2, 7], можно получить следующее кинетическое уравнение:

$$\dot{\mathbf{F}}\,\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}_e\,\mathbf{F}_e^{-1} + \mathbf{F}_e\,\mathbf{D}_v\,\mathbf{F}_e^{-1}, \tag{9}$$

где $\mathbf{D}_v$ — тензор скоростей вязких деформаций.

Тензор $\mathbf{D}_v$ выражается по закону течения через девиатор напряжений

$$\mathbf{D}_v = \frac{3}{2}\frac{\dot{\varepsilon}_v}{\sigma_v} \operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}^B, \tag{10}$$

где $\dot{\varepsilon}_v$, σ_v — интенсивности скоростей деформаций и напряжений в вязкой среде.

Для установления зависимости $\dot{\varepsilon}_v = f(\sigma_v, \lambda_{v\,chain})$ в работе [3] использована физическая концепция движения макромолекул эластомера в так называемом полимерном расплаве [11]. Исходя из этой концепции и привлекая результаты обширных экспериментов на резинах различных марок, Бергстрем и Бойс предложили следующую аппроксимацию закона:

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{A\sigma_v^m}{(\lambda^B_{v\,chain} - 1 + \delta_0)^n}, \tag{11}$$

где A, m, n — параметры закона деформирования; δ_0 — малая постоянная деформация, добавляемая, чтобы описать скорость ползучести при нулевой деформации.

Заметим, что соотношение (11) — это уравнение теории упрочнения [12], записанное для полимерных цепочек. Используем это соотношение для расчета полиуретана.

Из кинетического уравнения (9) с учетом закона течения (10), (11) можно выразить скорость упругой деформации

$$\dot{\mathbf{F}}_e = \dot{\mathbf{F}}\ \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}_e - \frac{3}{2}\frac{A(\sigma_v^B)^{m-1}}{(\lambda^B_{v\,chain}-1+\delta_0)^n}\mathbf{F}_e\,\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\sigma}^B. \qquad (12)$$

Если предположить, что градиент деформации $\mathbf{F}$ и его скорость $\dot{\mathbf{F}}$ фиксируются в ходе эксперимента и являются известными функциями времени, то соотношение (12) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно градиента упругой деформации $\mathbf{F}_e$. При этом динамическая составляющая напряжения $\boldsymbol{\sigma}^B$ выражается через тензор $\mathbf{F}_e$.

Примем, что напряжение $\boldsymbol{\sigma}^B$ подчиняется тому же закону упругости Арруды-Бойс, что и напряжение $\boldsymbol{\sigma}^A$ равновесного состояния

$$\boldsymbol{\sigma}^B = k(J_e-1)\mathbf{I} + \frac{G^B}{J_e\,\lambda^B_{e\,chain}}\frac{L^{-1}(\lambda^B_{e\,chain}/\lambda^B_{lock})}{L^{-1}(1/\lambda^B_{lock})}\mathrm{dev}\,\overline{\mathbf{B}}_e. \qquad (13)$$

Интегрирование дифференциального уравнения (12) должно выполняться с начальным условием

$$\mathbf{F}_e\big|_{t=0} = \mathbf{I}. \qquad (14)$$

Одноосное напряженное состояние. Для определения числовых значений параметров модели, как правило, используются результаты испытаний материала при одноосном напряженном состоянии. Деформации материала при одноосном растяжении-сжатии характеризуется значениями кратностей удлинения-укорочения в продольном и поперечном направлениях, обозначаемых ниже λ_1 и λ_2 соответственно. Для этого состояния составим матрицы из компонент тензоров $\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{B}}$, $\mathrm{dev}\,\overline{\mathbf{B}}$:

$$[\mathrm{B}] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}, \quad [\overline{\mathrm{B}}] = \begin{bmatrix} (\lambda_1/\lambda_2)^{4/3} & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_1/\lambda_2)^{-2/3} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1/\lambda_2)^{-2/3} \end{bmatrix},$$

$$\left[\mathrm{dev}\bar{\mathrm{B}}\right]=\left[\left(\lambda_1/\lambda_2\right)^{4/3}-\left(\lambda_1/\lambda_2\right)^{-2/3}\right]\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Из соотношений упругости (7) с учетом определений (15) можно получить выражение для действующего напряжения растяжения-сжатия

$$\sigma_1^A=\frac{G^A}{J\lambda_{chain}}\frac{L^{-1}(\lambda_{chain}/\lambda_{lock}^A)}{L^{-1}(1/\lambda_{lock}^A)}\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{4/3}-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-2/3}\right]. \qquad (16)$$

При использовании формулы (16) следует считать, что кратность удлинения в поперечном направлении λ_2 является величиной, зависимой от кратности удлинения в продольном направлении λ_1, и определяется через λ_1, исходя из условия $\sigma_2^A=\sigma_3^A=0$. Такой подход к определению λ_2 предполагает известным значение модуля объемного сжатия материала. К сожалению, этот параметр для эластомеров, в частности полиуретанов, редко известен с достаточной точностью. Однако при одноосном напряженном состоянии малая объемная сжимаемость материала практически не влияет на податливость образца. Поэтому при описании экспериментальных диаграмм растяжения-сжатия будем рассматривать полиуретан как несжимаемый материал, полагая, что объемная деформация отсутствует, т.е. $J=\lambda_1\lambda_2^2=1$. Подставляя $\lambda_2=\lambda_1^{-1/2}$ в соотношение упругости (16), получим

$$\sigma_1^A=\frac{G^A}{\lambda_{chain}}\frac{L^{-1}(\lambda_{chain}/\lambda_{lock}^A)}{L^{-1}(1/\lambda_{lock}^A)}\left(\lambda_1^2-\lambda_1^{-1}\right), \qquad (17)$$

где $\lambda_{chain}=\sqrt{\frac{1}{3}\left(\lambda_1^2+2\lambda_1^{-1}\right)}$.

Закон упругости (17) является двухпараметрическим.

Для определения динамической составляющей напряжения σ_1^B используем тот же закон упругости (17), в котором полная кратность удлинения материала λ_1 заменена на кратность упругого удлинения λ_{1e}^B ветви B (см. рис. 1) и параметры имеют новые значения G^B, λ_{lock}^B.

В случае одноосного напряженного состояния уравнение (12) приводится к виду

$$\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} - \frac{\dot{\lambda}^B_{1e}}{\lambda^B_{1e}} = \frac{A\left|\sigma^B_1\right|^m}{\left|\lambda^B_{v\,chain} - 1 + \delta_0\right|^n}\ \mathrm{sign}\,(\sigma^B_1). \qquad (18)$$

Путем численного интегрирования уравнения (18), дополненного соотношениями упругости $\sigma^A_1(\lambda_1)$, $\sigma^B_1(\lambda^B_{1e})$, можно воспроизводить диаграммы растяжения-сжатия материала.

Если испытания образцов проводятся с заданным законом нагружения, то условное напряжение в материале (отношение нагрузки на образец к начальной площади его поперечного сечения) является известной функцией времени. В несжимаемом материале при одноосном напряженном состоянии истинное напряжение σ_1 и условное напряжение σ^*_1 связаны соотношением

$$\sigma_1 = \lambda_1 \sigma^*_1. \qquad (19)$$

Подставляя в (19) $\sigma_1 = \sigma^A_1(\lambda_1) + \sigma^B_1(\lambda^B_{1e})$ и дифференцируя полученное уравнение по времени, находим

$$\left(\frac{\partial \sigma^A_1}{\partial \lambda_1}\right)\dot{\lambda}_1 + \left(\frac{\partial \sigma^B_1}{\partial \lambda^B_{1e}}\right)\dot{\lambda}^B_{1e} = \dot{\lambda}_1\,\sigma^*_1 + \lambda_1\,\dot{\sigma}^*_1. \qquad (20)$$

При установленных связях $\sigma^A_1(\lambda_1)$, $\sigma^B_1(\lambda^B_{1e})$ система дифференциальных уравнений (18), (20) может быть численно проинтегрирована по времени. Таким образом, для заданного закона нагружения $\sigma^*_1(t)$ определяются кратности удлинений λ_1, λ^B_{1e} как функции времени.

Результаты испытаний образцов полиуретана СКУ-ПФЛ-100 на сжатие. Для анализа работы полиуретановых элементов амортизаторов важное значение имеют исследования зависимости механических свойств полиуретана от скорости нагружения. Авторами проведена серия испытаний образцов полиуретана СКУ-ПФЛ-100 при низких скоростях деформирования на машине Zwick 100 (статические испытания) и при умеренно высоких скоростях деформирования на машине Instron Electropuls 1000 (динамические испытания). В испытаниях использовались короткие цилиндрические образцы с отношением высоты к диаметру 1,6.

В статических испытаниях для получения стабильных характеристик осуществлялось циклическое нагружение. Форма цикла нагружения была треугольная, т.е. нагрузка и разгрузка происходили с постоянными, причем равными скоростями. Фаза отдыха между циклами нагрузка-разгрузка отсутствовала. Средняя скорость деформирования составляла 0,0022 $с^{-1}$. Установление диаграммы сжатия наблюдалось фактически после двух-трех циклов.

На рис. 2 приведены диаграммы пяти циклов сжатия в координатах «условное напряжение – относительное укорочение».

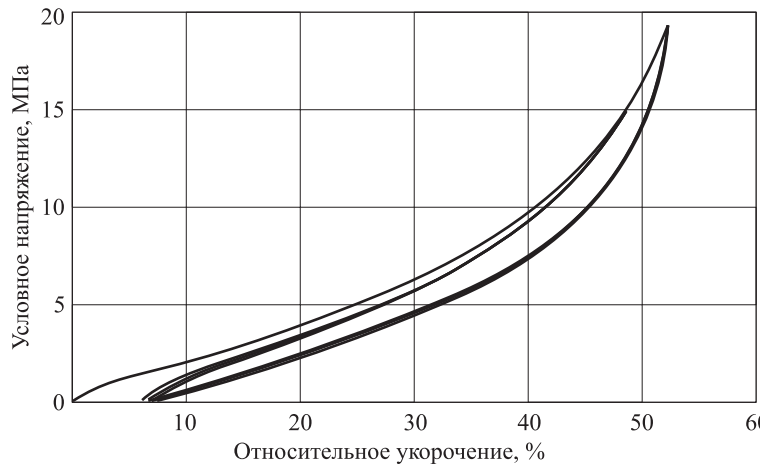


Рис. 2. Диаграммы сжатия полиуретана СКУ-ПФЛ-100 на первых пяти циклах

Для каждого цикла определены значения удельной накопленной, возвращенной и рассеянной энергии, а также коэффициент механических потерь (относительный гистерезис) (табл. 1). Как можно видеть, уже начиная со второго цикла, энергетические характеристики циклов различаются весьма незначительно, что свидетельствует об установлении процесса деформирования.

Таблица 1

Энергетические характеристики циклов нагружения

Цикл нагружения	Накопленная энергия, Дж/см^3	Возвращенная энергия, Дж/см^3	Рассеянная энергия, Дж/см^3	Относительный гистерезис
1	3,353	2,490	0,863	0,26
2	3,097	2,469	0,628	0,20
3	3,061	2,459	0,602	0,20
4	3,041	2,452	0,589	0,19
5	3,028	2,447	0,581	0,19

По диаграммам сжатия (см. рис. 2) определены значения начального модуля упругости полиуретана при медленном деформировании. При третьем-пятом циклах нагружения начальный модуль упругости составляет 20...30 МПа для диапазона относительных укорочений 0...10 %.

В динамических испытаниях образцы подвергались периодической импульсной нагрузке. Во всех испытаниях номинальное значе-

ние максимальной сжимающей силы составляло 1 кН (максимальная сила для машины Instron ElectroPuls 1000). В использованных образцах диаметром 9,7 мм такая сила вызывает напряжение 13,5 МПа. Скорость нагружения изменялась от 1 кН/с (от 13,5 МПа/с) до 50 кН/с (до 677 МПа/с). В табл. 2 приведены основные параметры динамических испытаний.

Таблица 2

Параметры динамических испытаний на машине Instron ElectroPuls 1000

Испытание	Номинальная скорость нагружения, кН/с (МПа/с)	Средняя скорость деформирования, $с^{-1}$	Номинальная максимальная нагрузка, кН	Время выдержки под нагрузкой, с	Время выдержки после разгрузки в цикле, с	Количество циклов
1	1 (13,5)	0,29	1	0,1	10	10
2	10 (135)	2,26		0,01	1	6
3	35 (474)	6,01				
4	50 (677)	8,61				

В качестве примера одного из реализованных испытаний на рис. 3 представлены графики изменения сжимающей силы и относительного укорочения образца в течение одного цикла нагружения со скоростью 10 кН/с, записанные в процессе испытания.

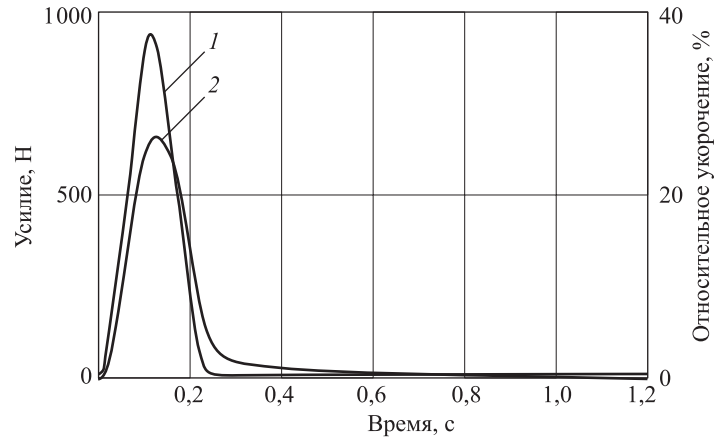


Рис. 3. Графики изменения во времени силы сжатия (*1*) и относительного укорочения (*2*) в течение одного цикла нагружения образца

На рис. 4 приведены диаграммы динамического сжатия с различными скоростями. Диаграммы соответствуют установившемуся состоянию, когда каждый последующий цикл нагружения практически повторяет предыдущий.

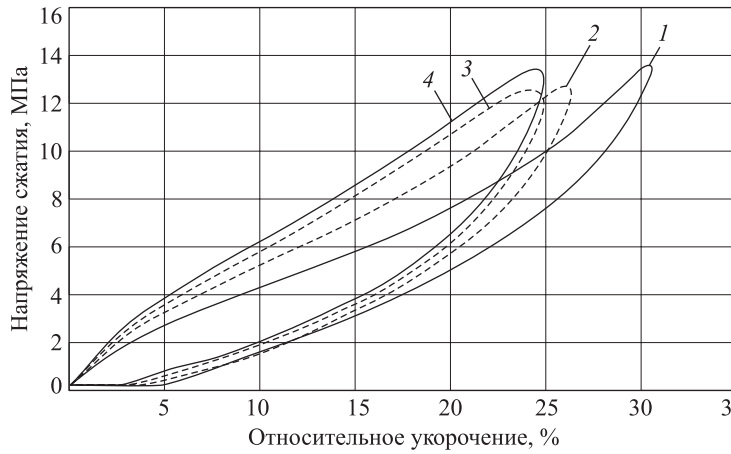


Рис. 4. Диаграммы сжатия полиуретана СКУ-ПФЛ-100 при различных скоростях нагружения и разгрузки, МПа/с: *1* — 13,5; *2* — 135; *3* — 474; *4* — 677

Из диаграмм следует, что с увеличением скорости нагружения возрастает как начальный модуль упругости, так и среднее значение модуля во всем интервале деформаций. В табл. 3 приведены характеристики гистерезисных потерь.

Таблица 3

Характеристики гистерезисных петель, полученных при динамических испытаниях

Испытание	Средняя скорость деформирования, $с^{-1}$	Достигнутое условное напряжение, МПа	Относительное укорочение, %	Накопленная энергия, Дж/$см^3$	Поглощенная энергия, Дж/$см^3$	Относительный гистерезис
1	0,29	13,4	30,5	1,913	0,698	0,37
2	2,26	12,6	26,4	1,689	0,808	0,48
3	6,01	12,4	25,0	1,647	0,876	0,53
4	8,61	13,4	25,0	1,788	0,924	0,52

Можно видеть, что с ростом скорости нагружения в рассмотренном диапазоне наблюдается некоторый рост относительного гистерезиса. Минимальное значение гистерезиса наблюдается при статическом нагружении (см. табл. 1). Полученные результаты испытаний использованы для определения значений параметров модели Бергстрема – Бойс.

Результаты моделирования. Значения параметров G^A, λ^A_{lock} модели Арруды – Бойс (17) подбирались по кривой статического нагружения, показанной на рис. 2. Относительные укорочения ограничивались значением 35 %. Для поиска указанных параметров ис-

пользовался алгоритм минимизации функции отклонений расчетных величин $\sigma_1^*(\lambda_1)$ от результатов эксперимента методом Нелдера – Мида. Независимо от этого для повышения достоверности осуществлялся поиск значений с помощью встроенных средств программы ANSYS. В результате независимых решений установлены весьма широкие диапазоны значений параметров $G^A = 4,3\ldots5,5$ МПа, $\lambda_{lock}^A = 1,5\ldots2,9$. Конкретные значения G^A, λ_{lock}^A зависят от способа формирования минимизируемой функции отклонений: числа и расположения точек сравнения расчетных и экспериментальных данных, выбора разных весовых коэффициентов для областей малых и больших деформаций.

На рис. 5 показаны расчетные и экспериментальная статические диаграммы сжатия полиуретана. Расчеты выполнены при четырех комбинациях параметров G^A, λ_{lock}^A. В целом полученные результаты свидетельствуют о применимости модели Арруды – Бойс для анализа упругих деформаций полиуретана. Однако диаграммы на рис. 5 позволяют увидеть и некоторый дефект модели. На начальном участке нагружения, где согласно результатам испытаний наблюдается снижение жесткости полиуретана, расчетные кривые уклоняются от экспериментальных.

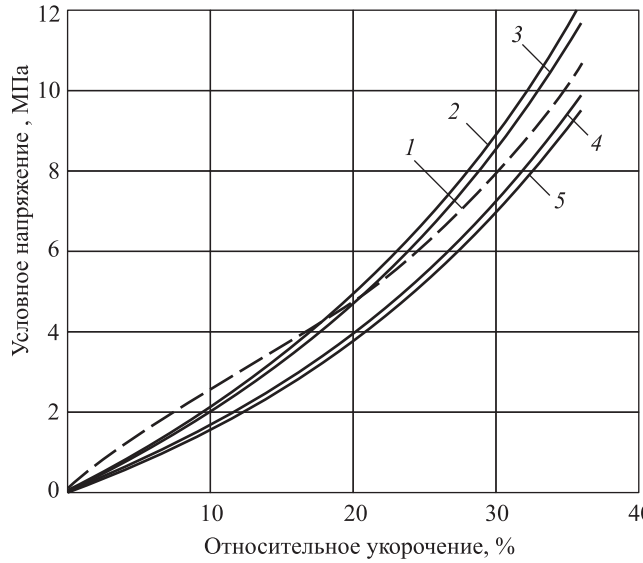


Рис. 5. Результат описания экспериментальной диаграммы сжатия полиуретана (кривая *1*) при помощи модели Арруды – Бойс:

2 – $G^A = 5,3$ МПа, $\lambda_{lock}^A = 2,5$; *3* — $G^A = 5,3$ МПа, $\lambda_{lock}^A = 2,9$;

4 — $G^A = 4,3$ МПа, $\lambda_{lock}^A = 2,5$; *5* — $G^A = 4,3$ МПа,

$\lambda_{lock}^A = 2,9$

Задача калибровки вязкоупругой модели Бергстрема – Бойс, состоящая в нахождении шести параметров: G^B, λ^B_{lock}, A, m, n, δ_0, существенно сложнее, чем подбор коэффициентов для соотношения упругости (17). Эта задача требует отдельного рассмотрения, в настоящей статье ограничимся представлением некоторых полученных результатов.

Для каждого динамического режима испытаний, указанного в табл. 2, 3, параметры модели подбирались отдельно. Выбранные значения приведены в табл. 4.

Таблица 4

Параметры модели Бергстрема – Бойс и рассчитанные значения относительного гистерезиса

Испытание	G^B, МПа	λ^B_{lock}	A, МПа$^{-m}$с$^{-1}$	m	n	δ_0	Расчетное значение относительного гистерезиса
1	4,8	7,0	0,007	2	0,3	10^{-6}	0,27
2	8,8	7,0	0,04	2	0,3	10^{-6}	0,40
3	11,0	7,0	0,09	2	0,3	10^{-6}	0,45
4	11,8	7,0	0,1	2	0,3	10^{-6}	0,46

Для оценки точности моделирования при подобранных параметрах восстановлены диаграммы установившегося циклического сжатия полиуретана путем интегрирования уравнений (18), (20). На рис. 6 сопоставлены расчетные и экспериментальные гистерезисные петли при сжатии с различными скоростями нагружения и разгрузки.

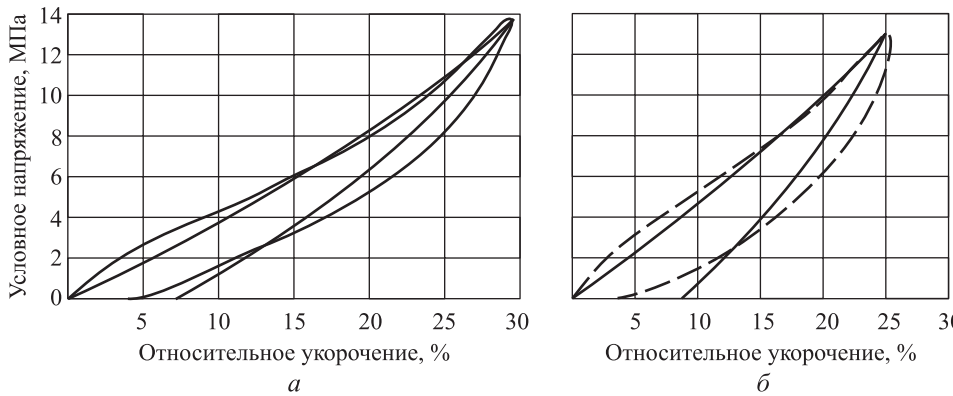


Рис. 6 (начало). Сравнение расчетных и экспериментальных диаграмм сжатия полиуретана при различных скоростях нагружения:
а − 13,5 МПа/с; *б* − 135 МПа/с



Рис. 6 (окончание). Сравнение расчетных и экспериментальных диаграмм сжатия полиуретана при различных скоростях нагружения:
в − 677 МПа/с

Как можно видеть, формы гистерезисных петель весьма заметно различаются, наибольшие отличия между расчетом и экспериментом наблюдаются в кривых разгрузки. Вместе с тем величина рассеяния энергии, предсказываемая с помощью модели, хорошо соответствует эксперименту. Показателем этого служит близость экспериментальных и расчетных значений гистерезиса, приведенных в последних столбцах таблиц 3 и 4.

Заключение. Реологическая модель, предложенная Бергстремом и Бойс, позволяет описать поведение полиуретана при сжатии в рассмотренном диапазоне деформаций и их скоростей с достаточной для практических целей точностью. Для отдельного динамического режима удается определить параметры модели, обеспечивающие приближенное согласование с экспериментом. При изменении режима нагружения параметры приходится переопределять. Процедура определения единого набора значений параметров модели, пригодных для описания экспериментальных данных при разных скоростях нагружения, требует дополнительного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Димитриенко Ю.И., Даштиев И.З. Модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2001, № 1, с. 21−41.

[2] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физматлит, 2009, 610 с.

[3] Bergström J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of Mechanic Physics Solids*, 1998, vol. 46, pp. 931–954.

[4] Bergström J. S., Boyce M. C. Mechanical behavior of particle filled elastomers. *Rubber Chem. Technol*., 1999, vol. 72, pp. 633−656.
[5] Quintavalla S.J., Johnson S.H. Extension of the Bergström-Boyce model to high strain rates. *Rubber Chem. Technol*., 2004, vol. 77, pp. 972−981.
[6] Qi H.J., Boyce M.C. Stress-strain behavior of thermoplastic polyurethane. *Mechanics of Materials*, 2005, vol. 37, issue 8, pp. 817–839.
[7] Голованов А.И., Султанов Л.У. *Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых тел*. Казань, Казанский государственный университет, 2009, 465 с.
[8] Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of Mechanic Physics Solids,* 1993, vol. 41, no. 2, pp. 389−412.
[9] Cohen A. A Pade approximant to the inverse Langevin function. *Rheologica Acta*, 1991, vol. 30, pp. 270−273.
[10] Norgan C.O., Saccomandi G. A Molecular-statistical basis for the gent constitutive model of rubber elasticity. *Journal of Elasticity*, 2002, vol. 68, pp. 167−176.
[11] Дой М., Эдвардс С. *Динамическая теория полимеров*. Москва, Мир, 1998, 440 с.
[12] Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. Москва, Наука, 1969, 420 с.

Статья поступила в редакцию 05.11.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Белкин А.Е., Даштиев И.З., Лонкин Б.В. Моделирование вязкоупругости полиуретана при умеренно высоких скоростях деформирования. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 39–54.

Белкин Александр Ефимович окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 научных работ в области численных методов расчета конструкций, механики резинокордных композитов и пневматических шин. e-mail: a_belkin@newmail.ru

Даштиев Идрис Зилфикарович окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, зам. главного конструктора ОАО «ЦНИИСМ». Автор более 125 научных работ и патентов в области механики и технологии полимерных композиционных материалов и конструкций на их основе.

Лонкин Борис Викторович — аспирант кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области численных методов расчета конструкций и механики эластомерных материалов. e-mail: lonkinbv@gmail.com

Modeling polyurethane viscoelasticity at moderately high strain rates

© A.E. Belkin[1], I.Z. Dashtiev[2], B.V. Lonkin[1]

[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2] TSNIISM, Khotkovo-town, Moscow Region, 141350, Russia

The article presents a mathematical model of the viscoelastic behavior of polyurethane SKU-PFL-100 for strain range of 0...30 % and moderately high strain rates up to 10^{-1}. To determine the viscous component of the deformation Bergstrom – Boyce rheological

model has been applied. Relationship between stress and the elastic component of deformation is described by an Arruda – Boyce potential. We determined the model parameters using experimental compression diagrams of polyurethane obtained from Instron Electropuls 1000 machine at different strain rates. The model parameter values obtained by minimizing a function of the calculated value deviations from the experimental results are given. It is shown that in the considered range of deformations and strain rates model allows describing the polyurethane behavior with sufficient accuracy for practical purposes. The model is designed for calculating polyurethane shock-absorber parts, cushions, buffers and other structures subjected to dynamic loading.

Keywords: *polyurethane, viscoelasticity, Bergstrom–Boyce mathematical model, Arruda–Boyce elastic potential, compression diagrams, strain rate, determination of model parameters.*

REFERENCES

[1] Dimitrienko Yu.I., Dashtiev I.Z. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2001, no. 1, pp. 21−41.

[2] Dimitrienko Yu.I. *Nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy* [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 610 p.

[3] Bergström J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of Mechanic Physics Solids*, 1998, vol. 46, pp. 931–954.

[4] Bergström J. S., Boyce M. C. Mechanical behavior of particle filled elastomers. *Rubber Chem. Technol*., 1999, vol. 72, pp. 633−656.

[5] Quintavalla S.J., Johnson S.H. Extension of the Bergström-Boyce model to high strain rates. *Rubber Chem. Technol*., 2004, vol. 77, pp. 972−981.

[6] Qi H.J., Boyce M.C. Stress-strain behavior of thermoplastic polyurethane. *Mechanics of Materials*, 2005, vol. 37, issue 8, pp. 817–839.

[7] Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Matematicheskie modeli vychislitelnoy nelineynoy mekhaniki deformiruemykh tel* [Mathematical models of computational nonlinear mechanics of deformable bodies]. Kazan, Kazan State University Publ., 2009, 465 p.

[8] Arruda E.M., Boyce M.C. A Three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of Mechanic Physics Solids*, 1993, vol. 41, no. 2, pp. 389−412.

[9] Cohen A. A Pade approximant to the inverse Langevin function. *Rheologica Acta*, 1991, vol. 30, pp. 270−273.

[10] Norgan C.O., Saccomandi G. A molecular-statistical basis for the gent constitutive model of rubber elasticity. *Journal of Elasticity*, 2002, vol. 68, pp. 167−176.

[11] Doi M., Edwards S.F. *The Theory of Polymer Dynamics*. Oxford University Press, Oxford, 1986. [Russian edition: Doi M., Edvards S.F. *Dinamicheskaya teoriya polimerov*. Moscow, Mir Publ., 1998, 440 p.].

[12] Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Fundamentals of the theory of plasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 420 p.

Belkin A.E. graduated from Bauman Moscow Higher Technical School. Dr. Sci. (Eng.), professor of the Applied Mechanics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 70 publications on numerical methods of design calculation, mechanics of rubber-cord composites and pneumatic tires. e-mail: a_belkin@newmail.ru

Dashtiev I.Z. graduated from Bauman Moscow Higher Technical School. Dr. Sci. (Eng.), deputy chief designer of the «Central research institute for special machinery» Author of more than 125 publications and patents in the field of mechanics and technology of polymer composite materials and constructions on their base.

Lonkin B.V., a postgraduate of the Applied Mechanics Department at Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of numerical methods for the calculation of structures and mechanics of elastomeric materials. e-mail: lonkinbv@gmail.com