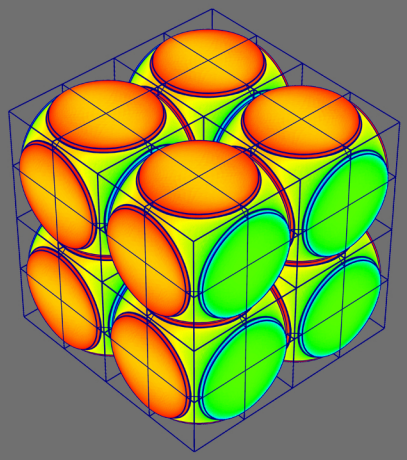
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Добрица Б.Т., Добрица Д.Б., Ященко Б.Ю. Моделирование контактного взаимодействия ребер тетраэдрических ячеек при решении задач высокоскоростного взаимодействия пространственных тел. Математическое моделирование и численные методы. 2019. № 3.с.39–56.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/199/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.22
18.11.2026 12:59:45

УДК 539.3, 629.78 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-3-3956

Моделирование контактного взаимодействия ребер тетраэдрических ячеек при решении задач высокоскоростного взаимодействия пространственных тел

© Б.Т. Добрица[1], Д.Б. Добрица[2], Б.Ю. Ященко[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2]АО «НПО Лавочкина», Московская обл., г. Химки, 141400, Россия

Рассмотрено совершенствование методик численного моделирования высокоскоростного взаимодействия твердых тел, проводимого для проектирования защиты космических аппаратов от воздействия микрометеоритов и частиц космического мусора. Предложен алгоритм реализации граничных условий на контактной поверхности, предназначенный для численного моделирования с использованием лагранжевых сеток и базирующийся на контроле взаимного проникновения тетраэдрических ячеек контактирующих тел при пересечении их ребер. В основе алгоритма лежат расчет сил реакции для узлов ребер тетраэдрических ячеек контактирующих тел и коррекция векторов скорости этих узлов с выполнением условия непроникания.

Ключевые слова: *численное моделирование, космический аппарат, разностная сетка, контактная поверхность, высокоскоростное соударение, контроль проникания, тетраэдрическая ячейка, сила реакции*

Введение. Частицы, представляющие собой угрозу для космических аппаратов (КА) при высокоскоростных воздействиях, относятся к метеорным телам и фрагментам космического мусора. Естественный метеорный фон окружающей среды при осуществлении космических программ анализировали начиная с 1960-х годов. Освоение космического пространства вследствие многочисленных запусков в дополнение к метеорной опасности привело к образованию пояса космического мусора вокруг Земли.

Создание надежной системы защиты космических аппаратов от метеорных частиц и фрагментов космического мусора предполагает исследование характера взаимодействия высокоскоростных частиц с защищаемыми объектами. Численное моделирование высокоскоростного взаимодействия твердых тел с элементами конструкции и экранной защиты КА позволяет воспроизвести характерные особенности физических процессов, протекающих при соударении, в том числе тех, которые происходят при контакте поверхности ударяемого элемента конструкции КА с ударником, а также рассмотреть и выбрать оптимальные схемы экранов [1]. Численное моделирование является необходимым дополнением к экспериментальным

исследованиям, определяющим стойкость конструкции КА при высокоскоростных воздействиях.

Совместное использование численного моделирования и эксперимента для исследования высокоскоростного воздействия частиц — аналогов космического мусора на элементы КА и защиты рассмотрено в работах [2–5]. Способы защиты космических аппаратов от высокоскоростных частиц с применением численного моделирования и экспериментальной верификацией его результатов приведены в работе [6].

Основы теории контактного взаимодействия деформируемых тел и механики контакта изложены в издании [7].

В работе [8] приведен обзор контактных алгоритмов, описана классификация подходов и алгоритмов, позволяющая оценить текущее состояние этого вопроса и направления, в которых ведутся дальнейшие поиски.

Метод расчета поверхности контакта соударяющихся тел с симметричными поверхностями рассмотрен в работах [9, 10]. Из других работ известна реализация метода скользящих поверхностей на трехмерной лагранжевой сетке [11].

Основы механики деформируемого твердого тела систематизированы в издании [12].

Основная цель данной работы — создать алгоритм взаимодействия ребер тетраэдрических ячеек контактирующих тел, который будет позволять контролировать взаимное проникновение тетраэдрических ячеек, относящихся к разным взаимодействующим телам, при пересечении их ребер. Такой алгоритм может стать дополнением к алгоритмам, отслеживающим непроникание граничных узлов контактирующих тел через соответствующие грани контактной поверхности.

Основные соотношения. При численном моделировании с использованием разностных схем счетная область покрывается ячейками сетки, не налегающими друг на друга и не имеющими зазоров. Как правило, в случае двух пространственных переменных применяют сетки с треугольными ячейками, а в трехмерном случае — сетки с тетраэдрическими ячейками.

Математическая формулировка динамической задачи взаимодействия ударника и преграды приведена в работе [13]. Поведение материалов описывается моделью идеальной упругопластической среды. Основные соотношения, использованные в данной работе, приведены в статье [14]. Граничные условия на поверхности контакта, применяющиеся в динамических задачах взаимодействия тел, как правило, задаются на основе условий идеального скольжения и непроникания контактирующих тел [15]:

$$\sigma_{n1} = \sigma_{n2}, \;\; u_{n1} = u_{n2}, \;\; \sigma_{\tau 1} = \sigma_{\tau 2} = 0,$$

где σ_n, σ_τ — нормальная и касательная компоненты вектора напряжений; u_n — нормальная компонента вектора скорости в точке контакта; индексы 1 и 2 относятся к контактирующим телам.

Суть конечно-разностного метода была рассмотрена в работе [15], в которой были указаны границы применимости наиболее простых математических моделей к решению задач соударения в рамках механики деформируемых твердых тел для широкого диапазона деформирования:

- при $0 < M_0 \le 0,75$ удовлетворительно описывает процессы математическая модель упругопластического течения типа Прандтля — Рейсса;
- при $0,75 < M_0 < 1,5$ хорошо описывает основные процессы течения газодинамическая модель, но с более сложным уравнением среды. Здесь $M_0 = U_0 / C_0$, где U_0 — скорость соударения; C_0 — скорость звука в среде.

Данные положения относятся только к таким нагрузкам, когда отсутствуют фазовые переходы в среде или они уже прошли. Если необходимо учитывать фазовые переходы, уравнение состояния следует заменить на более сложное, а это уже выходит за рамки данной работы, в которой рассмотрены только аспекты улучшения алгоритма контактного взаимодействия соударяющихся тел.

Основы алгоритма расчета контактных поверхностей на лагранжевых сетках при условии непроникания контактирующих тел как для двумерного, так и для трехмерного случаев взаимодействия, с учетом трения и без него изложены в [15].

Решение для каждого отдельного узла задачи о взаимодействии с соседними узлами другого тела позволяет получить алгоритм контактного взаимодействия поверхностей с симметричным учетом взаимодействующих границ [9, 10]. При этом соблюдается основное требование устойчивости счета для явных разностных схем — влияние взаимодействия граничного узла одного тела с граничным ребром (гранью) другого тела распространяется только на соседние граничные узлы, поскольку скорость распространения возмущений в среде всегда конечная.

В настоящей статье при рассмотрении контактного взаимодействия ребер тетраэдрических ячеек пренебрегаем трением.

Описание предлагаемого алгоритма контактного взаимодействия ребер тетраэдрических ячеек. В трехмерном случае можно использовать алгоритм реализации граничных условий (в дальнейшем называемый основным алгоритмом), который можно свести к проверке контактного взаимодействия пары «граничный узел — грань на поверхности». Для устранения перекрытия ячеек определя-

ют векторы сил реакции **R**, выполняют корректировку векторов скоростей граничных узлов **U** и окончательных положений граничных узлов. Основные допущения, которые используют для построения симметричного алгоритма расчета контактной поверхности, следующие [15]:

- граничные узлы разностной сетки — сосредоточенные массы;
- ребра ячеек — прямолинейные отрезки (как в двумерном, так и в трехмерном случае);
- распределение скорости вдоль ребер ячеек линейное;
- действие сил реакции в граничных узлах разностной сетки;
- использование принципа локальности, т. е. воздействие силы реакции граничного узла только на ближайшее граничное ребро (грань в трехмерном случае) ячейки или узел другого тела.

На практике в большинстве задач этот метод работает корректно, обеспечивая выполнение условия непроникания контактных поверхностей.

Предлагаемый алгоритм дополняет основной алгоритм реализации граничных условий при расчете контактных взаимодействий в пространстве и основывается на проверке взаимодействия ребер тетраэдрических ячеек контактирующих тел. Проверка взаимодействия пары «ребро — ребро» осуществляется дополнительно к основному алгоритму, контролирующему взаимодействие пары «граничный узел — свободная грань». Предложенный механизм расчета сил реакции при взаимодействии ребер подобен применяющемуся в задачах с треугольными ячейками на плоскости механизму взаимодействия «узел одного контактирующего тела — ребро другого контактирующего тела».

Схема взаимодействия ребер ячеек, необходимая для пояснения принципа действия предлагаемого алгоритма, показана на рис. 1.

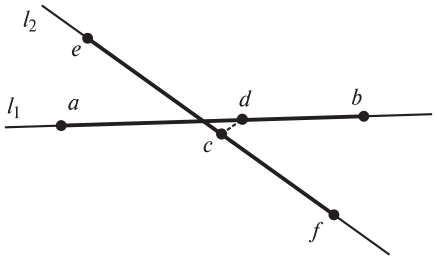


Рис. 1. Элементарный акт взаимодействия граничных ребер счетных ячеек двух тел в пространстве

В результате взаимодействия двух тел ребра [a, b] и [e, f], относящиеся к счетным ячейкам разных тел, принадлежат двум скрещивающимся прямым l_1 и l_2. Причем пересечение отрезков [a, b] и [e, f] происходит на текущем временном шаге. Отрезок [c, d] является общим перпендикуляром к указанным прямым. В точках c, d рассчитывают силы реакции.

Конечно-разностное уравнение движения граничного узла k для вектора скорости имеет вид [15]:

$$\mathbf{U}_k^{n+1} = \mathbf{U}_k^n + \tau\left(\mathbf{F}_k^n + \mathbf{R}_k^n\right)\Big/\left(2\varphi_k\right), \tag{1}$$

где $\mathbf{U}_k^{n+1}$ — истинное значение вектора скорости узла k на временном шаге $(n + 1)$; $\mathbf{U}_k^n$ — значение вектора скорости узла k, рассчитанное на временном шаге n; τ –текущий шаг по времени; $\mathbf{F}_k^n$ — вектор сил, действующих на узел k ячейки на временном шаге n за счет внутренних напряжений; $\mathbf{R}_k^n$ — вектор внешних сил; $2\varphi_k$ — масса узла k.

На первом этапе расчета вводятся предварительные значения скоростей и координат $\mathbf{U}_k^*$, $\mathbf{x}_k^*$ для граничного узла:

$$\mathbf{U}_k^* = \mathbf{U}_k^n + \tau\,\mathbf{F}_k^n\big/\left(2\varphi_k\right); \tag{2}$$

$$\mathbf{x}_k^* = \mathbf{x}_k^n + \mathbf{U}_k^*\tau, \tag{3}$$

которые являются значениями векторов скорости и координат граничных узлов в случае свободной от напряжений поверхности; здесь $\mathbf{x}_k^n$ — вектор координат узла k на временном шаге n.

Условие пересечения отрезков $[a, b]$ и $[e, f]$ определяют путем вычисления объема вспомогательного тетраэдра, построенного на этих отрезках в качестве противоположных ребер, на интервале движения $\left[t^n, t^{n+1}\right)$.

Пусть $\mathbf{n}$ — вектор нормали к граничным ребрам, $\mathbf{n} = \overrightarrow{dc}$. Вектор силы реакции для точки i можно представить в виде разложения на нормальную и касательную составляющие $\mathbf{R}_i = N_i\mathbf{n} + T_i\mathbf{t}$, где $N_i = \left(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{n}\right)$, $T_i = \left(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{t}\right)$. Исходя из условия равновесия сил и закона сохранения момента сил для нормальных компонент векторов сил реакции (касательной компонентой, образуемой при трении ребер ячеек, мы пренебрегаем), получим следующую связь между нормальными составляющими сил реакции в узлах a, b, c, d, e, f:

$$N_d = -N_c,\ N_a = -\left(1-\alpha\right)N_c,\ N_b = -\alpha N_c, \tag{4}$$

где $0 < \alpha < 1$, $\alpha = l_{ad}/l_{ab}$, отношение α соответствует вкладу узла b в силу реакции ребра ab (рассчитываемую в точке d);

$$N_e = -\left(1-\beta\right)N_d,\ N_f = -\beta N_d, \tag{5}$$

где $0 < \beta < 1$, $\beta = l_{ec}/l_{ef}$, отношение β соответствует вкладу узла f в силу реакции ребра ef, рассчитываемую в точке c.

Далее, из условия непроникания, на момент времени t^{n+1} фиксируется равенство нормальных составляющих векторов скоростей в точке контакта d на отрезке $[a, b]$:

$$U_{nd}^{n+1} = U_{na}^{n+1}(1-\alpha) + U_{nb}^{n+1}\alpha, \tag{6}$$

где n — нормальная составляющая вектора скорости. В точке контакта c на отрезке $[e, f]$

$$U_{nc}^{n+1} = U_{ne}^{n+1}(1-\beta) + U_{nf}^{n+1}\beta, \tag{7}$$

учитывая, что

$$U_{nd}^{n+1} = U_{nc}^{n+1}. \tag{8}$$

Равенство скоростей в контактирующих точках на момент времени t^{n+1} обеспечивает выполнение условия непроникания, которое задается для контактирующих ребер. Проведем преобразования, позволяющие получить выражение для нормальной составляющей N силы реакции в узле c, а также, соответственно, нормальные составляющие сил реакции в узлах a, b, e, f.

Подставляя (1) в (8), с учетом (6), (7) получим

$$\left[U_{ne}^{n} + \tau\frac{F_{ne}^{n} + R_{ne}^{n}}{2\varphi_e}\right](1-\beta) + \left[U_{nf}^{n} + \tau\frac{F_{nf}^{n} + R_{nf}^{n}}{2\varphi_f}\right]\beta =$$

$$= \left[U_{na}^{n} + \tau\frac{F_{na}^{n} + R_{na}^{n}}{2\varphi_a}\right](1-\alpha) + \left[U_{nb}^{n} + \tau\frac{F_{nb}^{n} + R_{nb}^{n}}{2\varphi_b}\right]\alpha \tag{9}$$

и далее, подставляя (4) и (5) в выражение (9), получим

$$\left(U_{ne}^{n} + \tau\frac{F_{ne}^{n}}{2\varphi_e}\right)(1-\beta) + \tau\frac{Ne}{2\varphi e}(1-\beta) + \left(U_{nf}^{n} + \tau\frac{F_{nf}^{n}}{2\varphi_f}\right)\beta + \tau\frac{N_f}{2\varphi_f}\beta =$$

$$= \left(U_{na}^{n} + \tau\frac{F_{na}^{n}}{2\varphi_a}\right)(1-\alpha) + \tau\frac{N_a}{2\varphi_a}(1-\alpha) + \left(U_{nb}^{n} + \tau\frac{F_{nb}^{n}}{2\varphi_b}\right)\alpha + \tau\frac{N_b}{2\varphi_b}\alpha. \tag{10}$$

Учитывая выражение (2) для предварительных скоростей, выражение (10) запишем как

$$U_{ne}^{*}(1-\beta) + \tau\frac{N_e}{2\varphi_e}(1-\beta) + U_{nf}^{*}\beta + \tau\frac{N_f}{2\varphi_f}\beta =$$

$$= U_{na}^{*}(1-\alpha) + \tau\frac{N_a}{2\varphi_a}(1-\alpha) + U_{nb}^{*}\alpha + \tau\frac{N_b}{2\varphi_b}\alpha,$$

откуда в результате преобразований получим

$$\tau\frac{N_e}{2\varphi_e}(1-\beta)+\tau\frac{N_f}{2\varphi_f}\beta=U^*_{na}(1-\alpha)+U^*_{nb}\alpha+$$
$$+\tau\left[\frac{N_a}{2\varphi_a}(1-\alpha)+\frac{N_b}{2\varphi_b}\alpha\right]-U^*_{ne}(1-\beta)-U^*_{nf}\beta$$

и

$$\frac{N_e}{2\varphi_e}(1-\beta)+\frac{N_f}{2\varphi_f}\beta=\frac{U^*_{na}(1-\alpha)+U^*_{nb}\alpha-U^*_{ne}(1-\beta)-U^*_{nf}\beta}{\tau}+$$
$$+\left[\frac{N_a}{2\varphi_a}(1-\alpha)+\frac{N_b}{2\varphi_b}\alpha\right].$$

Затем выделим составляющую N_c, учитывая (4) и (5),

$$\frac{N_c}{2\varphi_e}(1-\beta)^2+\frac{N_c}{2\varphi_f}\beta^2+\frac{N_c}{2\varphi_a}(1-\alpha)^2+\frac{N_c}{2\varphi_b}\alpha^2=$$
$$=\frac{U^*_{na}(1-\alpha)+U^*_{nb}\alpha-U^*_{ne}(1-\beta)-U^*_{nf}\beta}{\tau}$$

или

$$N_c\left[\frac{(1-\beta)^2}{2\varphi_e}+\frac{\beta^2}{2\varphi_f}+\frac{(1-\alpha)^2}{2\varphi_a}+\frac{\alpha^2}{2\varphi_b}\right]=$$
$$=\frac{U^*_{na}(1-\alpha)+U^*_{nb}\alpha-U^*_{ne}(1-\beta)-U^*_{nf}\beta}{\tau}.$$

Таким образом,

$$N_c=\frac{U^*_{na}(1-\alpha)+U^*_{nb}\alpha-U^*_{ne}(1-\beta)-U^*_{nf}\beta}{\tau\left[\frac{(1-\beta)^2}{2\varphi_e}+\frac{\beta^2}{2\varphi_f}+\frac{(1-\alpha)^2}{2\varphi_a}+\frac{\alpha^2}{2\varphi_b}\right]}. \qquad (11)$$

В результате выведена формула для определения нормальной силы реакции при контакте граничных ребер разных тел в процессе соударения с выполнением условия непроникания. Далее определяем нормальные компоненты сил реакций для точек *a*, *b*, *e* и *f* и корректируем нормальную компоненту вектора скорости:

$$U_{ne}^{n+1} = U_{ne}^{*} + \tau(1-\beta) N_c / (2\varphi_e);\ U_{nf}^{n+1} = U_{nf}^{*} + \tau\beta N_c / (2\varphi_f);$$
$$U_{na}^{n+1} = U_{na}^{*} - \tau(1-\alpha) N_c / (2\varphi_a);\ U_{nb}^{n+1} = U_{nb}^{*} - \tau\alpha N_c / (2\varphi_a). \quad (12)$$

Отметим, что при использовании алгоритма контроля ребер следует заранее отсортировать пары ребер тетраэдров, находящихся на граничных поверхностях контактирующих тел, для проверки возможности их пересечения (вычислительные затраты на выполнение алгоритма достаточно значительные, если проверка будет сплошной).

Проверка условия пересечения ребер. При проверке пересечения отрезков [*a*, *b*] и [*e*, *f*] на текущем интервале движения проверяем выполнение условия компланарности векторов $\mathbf{x}_{\mathbf{ba}}^{*}$, $\mathbf{x}_{\mathbf{ea}}^{*}$, $\mathbf{x}_{\mathbf{fa}}^{*}$, $\mathbf{x}_{\mathbf{ba}}^{*} = \mathbf{x}_{\mathbf{b}}^{*} - \mathbf{x}_{\mathbf{a}}^{*}$ и т. д. на временном интервале $\left[t^n, t^{n+1}\right)$ с учетом того, что для каждой точки *a*, *b*, *e* и *f* задано прямолинейное и равномерное движение; время *t* является переменной величиной. Затем при выполнении условия компланарности трех векторов $\left[\mathbf{x}_{\mathbf{ba}}^{*}, \mathbf{x}_{\mathbf{ea}}^{*}\right]\mathbf{x}_{\mathbf{fa}}^{*} = 0$ по их смешанному произведению проверяем положение точки пересечения прямых l_1 и l_2, проведенных через точки *a*, *b* и *e*, *f* соответственно. Если точка принадлежит обоим отрезкам [*a*, *b*] и [*e*, *f*], то фиксируется факт пересечения ребер при предварительно заданных скоростях и координатах.

Применение данного критерия обусловлено тем, что зафиксировать проникание простым определением проникновения точки *d* (см. рис. 1) внутрь любого из содержащих в своем составе ребро [*e*, *f*] тетраэдров не всегда возможно, поскольку есть вероятность, что эта точка может в момент времени t^{n+1} оказаться снаружи тетраэдра, пройдя его насквозь.

Нахождение условия $\left[\mathbf{x}_{\mathbf{ba}}^{*}, \mathbf{x}_{\mathbf{ea}}^{*}\right]\mathbf{x}_{\mathbf{fa}}^{*} = 0$ при движении точек на интервале $\left[t^n, t^{n+1}\right)$ сводится к решению уравнения вида

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (13)$$

где точки *a*, *b*, *e* и *f* обозначены индексами $k = 1, \ldots, 4$; (x_k, y_k, z_k) — координаты вектора $\mathbf{x}_k^{*}$ (3).

При раскрытии определителя получаем кубическое уравнение общего вида с переменной времени τ: $a\tau^3 + b\tau^2 + c\tau + d = 0$. Корни уравнения — значения τ, при которых прямые l_1 и l_2 находятся в одной плоскости.

Запишем коэффициенты a, b, c, d, получающиеся при раскрытии определителя:

$$
\begin{aligned}
a = {} & \\
= {} & \left(u^*_{x2}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{y3}-u^*_{y1}\right)\left(u^*_{z4}-u^*_{z1}\right)+\left(u^*_{x3}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{y4}-u^*_{y1}\right)\left(u^*_{z2}-u^*_{z1}\right)+ \\
& +\left(u^*_{x4}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{y2}-u^*_{y1}\right)\left(u^*_{z3}-u^*_{z1}\right)-\left(u^*_{x4}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{y3}-u^*_{y1}\right)\left(u^*_{z2}-u^*_{z1}\right)- \\
& -\left(u^*_{x3}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{y2}-u^*_{y1}\right)\left(u^*_{z4}-u^*_{z1}\right)-\left(u^*_{x2}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{y4}-u^*_{y1}\right)\left(u^*_{z3}-u^*_{z1}\right); \\
b = {} & \\
= {} & \left(z^n_4-z^n_1\right)\left(u^*_{x2}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{y3}-u^*_{y1}\right)+\left(y^n_3-y^n_1\right)\left(u^*_{x2}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{z4}-u^*_{z1}\right)+ \\
& +\left(x^n_2-x^n_1\right)\left(u^*_{y3}-u^*_{y1}\right)\left(u^*_{z4}-u^*_{z1}\right)+\left(z^n_2-z^n_1\right)\left(u^*_{x3}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{y4}-u^*_{y1}\right)+ \\
& +\left(y^n_4-y^n_1\right)\left(u^*_{x3}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{z2}-u^*_{z1}\right)+\left(x^n_3-x^n_1\right)\left(u^*_{y4}-u^*_{y1}\right)\left(u^*_{z2}-u^*_{z1}\right)+ \\
& +\left(x^n_4-x^n_1\right)\left(u^*_{y2}-u^*_{y1}\right)\left(u^*_{z3}-u^*_{z1}\right)+\left(y^n_2-y^n_1\right)\left(u^*_{x4}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{z3}-u^*_{z1}\right)+ \\
& +\left(z^n_3-z^n_1\right)\left(u^*_{x4}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{y2}-u^*_{y1}\right)-\left(x^n_4-x^n_1\right)\left(u^*_{y3}-u^*_{y1}\right)\left(u^*_{z2}-u^*_{z1}\right)- \\
& -\left(y^n_3-y^n_1\right)\left(u^*_{x4}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{z2}-u^*_{z1}\right)-\left(z^n_2-z^n_1\right)\left(u^*_{x4}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{y3}-u^*_{y1}\right)- \\
& -\left(x^n_3-x^n_1\right)\left(u^*_{y2}-u^*_{y1}\right)\left(u^*_{z4}-u^*_{z1}\right)-\left(y^n_2-y^n_1\right)\left(u^*_{x3}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{z4}-u^*_{z1}\right)- \\
& -\left(z^n_4-z^n_1\right)\left(u^*_{x3}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{y2}-u^*_{y1}\right)-\left(x^n_2-x^n_1\right)\left(u^*_{y4}-u^*_{y1}\right)\left(u^*_{z3}-u^*_{z1}\right)- \\
& -\left(y^n_4-y^n_1\right)\left(u^*_{x2}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{z3}-u^*_{z1}\right)-\left(z^n_3-z^n_1\right)\left(u^*_{x2}-u^*_{x1}\right)\left(u^*_{y4}-u^*_{y1}\right), \\
c = {} & \\
= {} & \left(x^n_2-x^n_1\right)\left(y^n_3-y^n_1\right)\left(u^*_{z4}-u^*_{z1}\right)+\left(x^n_2-x^n_1\right)\left(z^n_4-z^n_1\right)\left(u^*_{y3}-u^*_{y1}\right)+ \\
& +\left(y^n_3-y^n_1\right)\left(z^n_4-z^n_1\right)\left(u^*_{x2}-u^*_{x1}\right)+\left(x^n_3-x^n_1\right)\left(y^n_4-y^n_1\right)\left(u^*_{z2}-u^*_{z1}\right)+ \\
& +\left(x^n_3-x^n_1\right)\left(z^n_2-z^n_1\right)\left(u^*_{y4}-u^*_{y1}\right)+\left(y^n_4-y^n_1\right)\left(z^n_2-z^n_1\right)\left(u^*_{x3}-u^*_{x1}\right)+ \\
& +\left(x^n_4-x^n_1\right)\left(y^n_2-y^n_1\right)\left(u^*_{z3}-u^*_{z1}\right)+\left(x^n_4-x^n_1\right)\left(z^n_3-z^n_1\right)\left(u^*_{y2}-u^*_{y1}\right)+ \\
& +\left(y^n_2-y^n_1\right)\left(z^n_3-z^n_1\right)\left(u^*_{x4}-u^*_{x1}\right)-\left(x^n_4-x^n_1\right)\left(y^n_3-y^n_1\right)\left(u^*_{z2}-u^*_{z1}\right)- \\
& -\left(x^n_4-x^n_1\right)\left(z^n_2-z^n_1\right)\left(u^*_{y3}-u^*_{y1}\right)-\left(y^n_3-y^n_1\right)\left(z^n_2-z^n_1\right)\left(u^*_{x4}-u^*_{x1}\right)- \\
& -\left(x^n_3-x^n_1\right)\left(y^n_2-y^n_1\right)\left(u^*_{z4}-u^*_{z1}\right)-\left(x^n_3-x^n_1\right)\left(z^n_4-z^n_1\right)\left(u^*_{y2}-u^*_{y1}\right)- \\
& -\left(y^n_2-y^n_1\right)\left(z^n_4-z^n_1\right)\left(u^*_{x3}-u^*_{x1}\right)-\left(x^n_2-x^n_1\right)\left(y^n_4-y^n_1\right)\left(u^*_{z3}-u^*_{z1}\right)- \\
& -\left(x^n_2-x^n_1\right)\left(z^n_3-z^n_1\right)\left(u^*_{y4}-u^*_{y1}\right)-\left(y^n_4-y^n_1\right)\left(z^n_3-z^n_1\right)\left(u^*_{x2}-u^*_{x1}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d = & \\
&= \left(x_2^n - x_1^n\right)\left(y_3^n - y_1^n\right)\left(z_4^n - z_1^n\right) + \left(x_3^n - x_1^n\right)\left(y_4^n - y_1^n\right)\left(z_2^n - z_1^n\right) + \\
&+ \left(x_4^n - x_1^n\right)\left(y_2^n - y_1^n\right)\left(z_3^n - z_1^n\right) - \left(x_4^n - x_1^n\right)\left(y_3^n - y_1^n\right)\left(z_2^n - z_1^n\right) - \\
&- \left(x_3^n - x_1^n\right)\left(y_2^n - y_1^n\right)\left(z_4^n - z_1^n\right) - \left(x_2^n - x_1^n\right)\left(y_4^n - y_1^n\right)\left(z_3^n - z_1^n\right).
\end{aligned}
$$

Здесь $\left(x_k^n, y_k^n, z_k^n\right)$ — координаты вектора $\mathbf{x}_k^n$; $\left(u_{xk}^*, u_{yk}^*, u_{zk}^*\right)$ — координаты вектора $\mathbf{U}_k^*$ из выражения (3), $k = 1,\ldots, 4$.

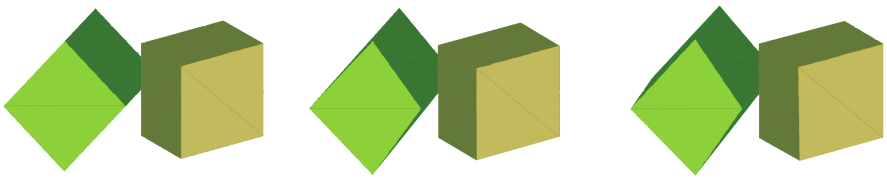
Для решения кубического уравнения можно воспользоваться численными методами, поскольку известна локализация актуальных корней уравнения τ_i: $\tau_i \in \left[0, t^{n+1} - t^n\right)$. Полученные на данном интервале корни проверяем на принадлежность обоим отрезкам $[a, b]$ и $[e, f]$, что соответствует ситуации, когда ребра пересекаются в пространстве.

Результаты численного моделирования. Следует отметить, что именно последовательное применение уравнений (1) к каждой паре пересекающихся ребер, сводящееся к корректировке реальной скорости после обсчета каждого случая контакта, и осуществляемая по окончании процедуры вычисления скоростей корректировка реального положения координат, задействованных при контакте граничных узлов $\mathbf{x}_k^{n+1} = \mathbf{x}_k^n + \mathbf{U}_k^{n+1}\tau$, обеспечивают необходимую «плавную» стыковку граничных поверхностей с условием непроникания. При этом можно избежать значительных девиаций взаимных положений контактирующих граничных узлов, которые возникли бы при параллельном обсчете (с накоплением корректировочных векторов скорости для каждого граничного узла).

Простейший случай моделирования процесса соударения с применением алгоритма контроля взаимного проникновения контактирующих ячеек при пересечении их ребер показан на рис. 2. Моделирование было проведено на программном комплексе собственной разработки: смоделировано соударение двух алюминиевых кубиков со стороной 2 см на скорости 0,4 км/с (движется правый кубик) с разбиением каждого тела на 12 тетраэдрических ячеек. Материал кубиков — сплав алюминия, широко используемый в космической отрасли, в том числе для создания противометеорных защитных экранов или их слоев; алюминиевые ударники используют также в высокоскоростных экспериментальных тестах в качестве аналога частиц космического мусора. Материальные константы, применяемые в данной работе, приведены в статье [14].

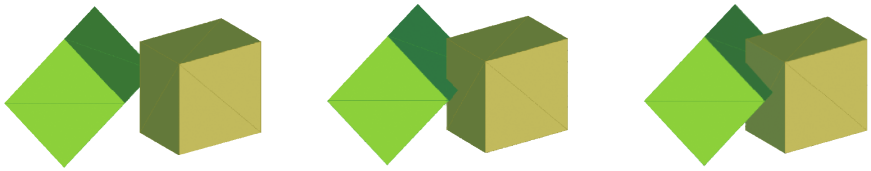
В начале соударения (см. рис. 2) кубики стыкуются друг с другом взаимно перпендикулярными ребрами. Включение алгоритма контроля проникновения по ребрам обеспечивает выполнение условия непрони-

кания. Показана картина соударения на момент времени t, составляющий 0, 10 и 20 мкс. Аналогичное соударение моделировалось без применения алгоритма контроля по ребрам ячеек с использованием только основного алгоритма (рис. 3). Очевидно, что в подобных случаях основной алгоритм не работает (условие непроникания не выполняется).



а *б* *в*

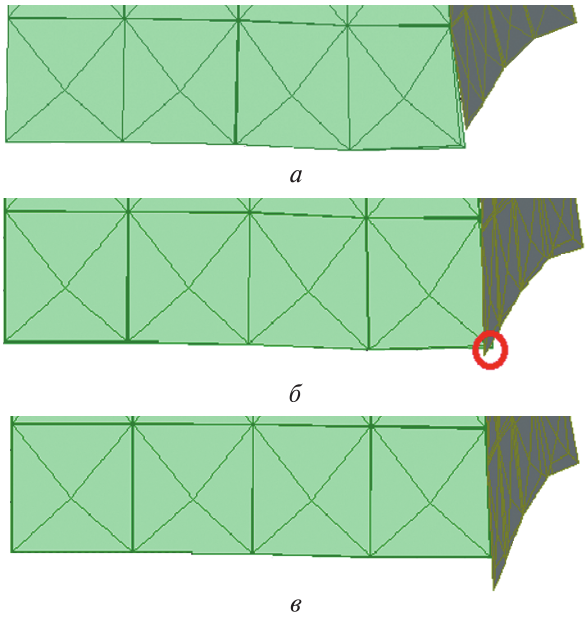
Рис. 2. Взаимодействие алюминиевых кубиков при скорости $v_0 = 0{,}4$ км/с (механизм контроля контактных взаимодействий по ребрам ячеек включен): *а* — $t = 0$ мкс; *б* — $t = 10$ мкс; *в* — $t = 20$ мкс



а *б* *в*

Рис. 3. Взаимодействие алюминиевых кубиков при скорости $v_0 = 0{,}4$ км/с (механизм контроля контактных взаимодействий по ребрам ячеек выключен): *а* — $t = 0$ мкс; *б* — $t = 10$ мкс; *в* — $t = 20$ мкс

Фрагмент (нижняя часть) процесса соударения двух алюминиевых цилиндров на скорости 1 км/с (движется правый цилиндр) показан на рис. 4 с отключенным и включенным механизмом контроля взаимного проникновения. Результат 3D-моделирования отображен на плоскости, представляющей собой осевое сечение цилиндров в их первоначальном положении. Механизм разрушения отключен, моделируется упругопластическое течение с условиями идеального скольжения и непроникания на контактных границах. Размеры цилиндров следующие: $d_1 = h_1 = 2$ см, $d_2 = h_2 = 1$ см. Картина соударения показана на моменты времени t, составляющие 7,5 и 12 мкс. В процессе взаимодействия тел при отключенном механизме контроля (рис. 4, *б*) образуется перехлест их граничных ячеек. Это происходит при растекании цилиндра-ударника по поверхности соударения до состояния, при котором площадь его растекающейся торцевой поверхности начинает превышать площадь контакта. Место перехлеста на рис. 4, *б* обведено. При включенном механизме контроля взаимного проникновения (рис. 4, *в*) по ребрам ячеек перехлеста ячеек не образуется.



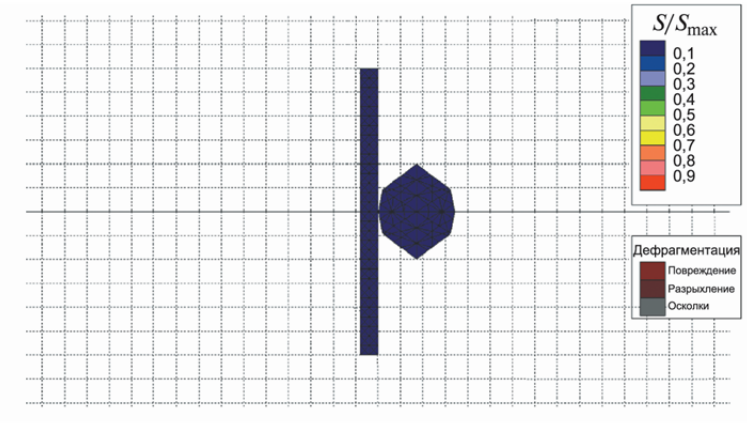
а

б

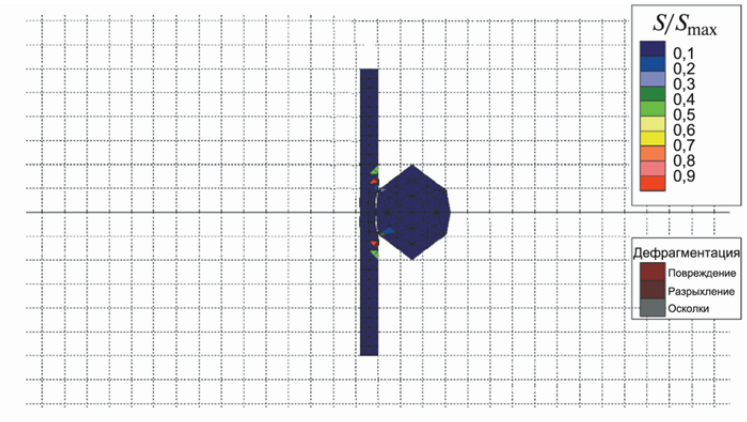
в

Рис. 4. Взаимодействие алюминиевых цилиндров при скорости $v_0 = 1$ км/с:
а — $t = 7{,}5$ мкс; *б*, *в* — $t = 12$ мкс

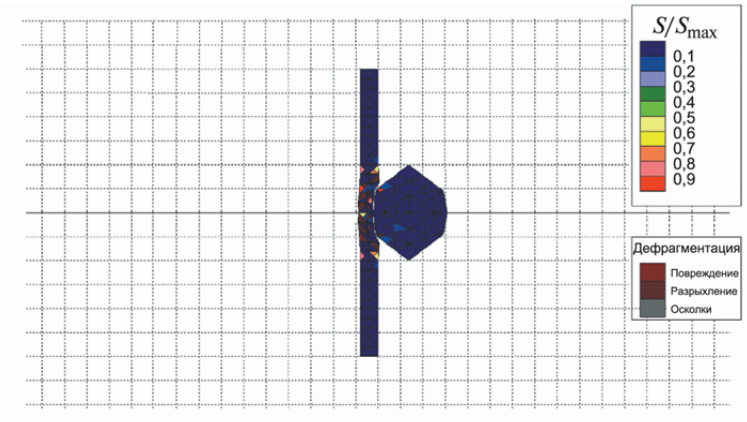
Действие алгоритма в условиях высокоскоростного взаимодействия двухмиллиметровой алюминиевой пластины и стального шарика радиусом 1 см продемонстрировано на рис. 5. Скорость соударения составляет 2 км/с, использован критерий повреждения в виде превышения максимального растягивающего напряжения $|\sigma_1| < \sigma_*$ (условие откольного разрушения), для алюминия $\sigma_* = 1{,}6$ ГПа, для стали $\sigma_* = 7$ ГПа. В областях, в которых превышено предельное значение прочности среды, ячейка помечается как поврежденная (материал в ней оказывает сопротивление только объемному сжатию). При достижении в расчетном элементе с поврежденным материалом предельного значения параметра разрыхления $\chi > \chi_*$ ($\chi = 1 - V_0/V$, где V_0, V — начальный и текущий объем ячейки, $\chi_* = 0{,}03$ для стали и алюминия в данном примере) среда считается полностью разрушенной, с нулевым давлением. Если такая ячейка находится на границе расчетной области, то вводятся дискретные частицы вместо разрушенного материала [15]. Данный элемент расчетной сетки замещается одной дискретной частицей или несколькими (в общем подходе) частицами конечных массы и объема. Радиус частиц вычисляют из условия вписывания одной или нескольких частиц в ячейку. Масса, импульс и энергия фрагментированного элемента распределяются между дискретными частицами.



а

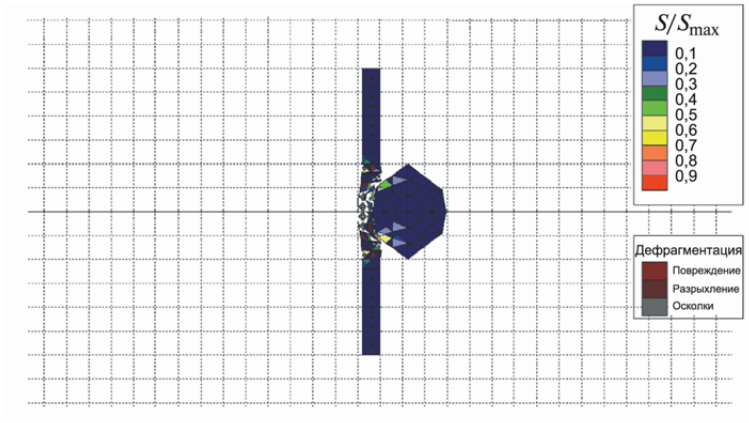


б

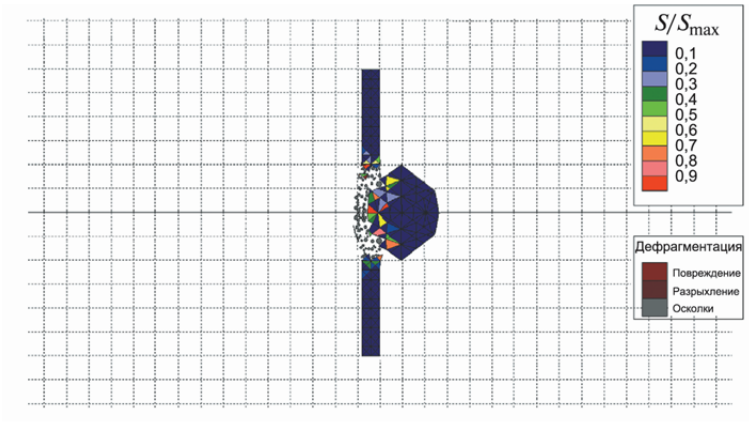


в

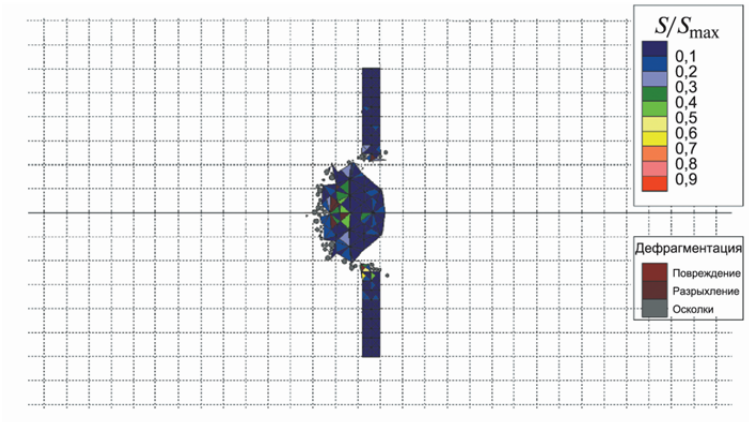
Рис. 5 (начало). Взаимодействие стального шарика с алюминиевой пластиной при скорости $v_0 = 2$ км/с:
а — $t = 0{,}0$ мкс; *б* — $t = 0{,}25$ мкс; *в* — $t = 0{,}4$ мкс



г



д



е

Рис. 5 (окончание). Взаимодействие стального шарика с алюминиевой пластиной при скорости $v_0 = 2$ км/с:
г — $t = 0{,}6$ мкс; *д* — $t = 0{,}95$ мкс; *е* — $t = 4{,}0$ мкс;
S/S_{max} — относительное растягивающее напряжение

В данном случае подключение алгоритма контроля по ребрам наряду с основным алгоритмом контактного взаимодействия позволяет избежать пробоев друг другом смежных ячеек контактирующих тел (рис. 5, *б–г*). Результат данного опыта по численному моделированию — сквозной пробой пластины с разрушением небольшой части ударника в районе контакта и некоторым сплющиванием оставшейся его части, а также образованием фрагментированных частиц материала (рис. 5, *е*).

В результате работы наглядно продемонстрирована эффективность алгоритма контроля взаимного проникновения по ребрам ячеек для достаточно сложных случаев контактного взаимодействия тел.

Заключение. Разработан алгоритм контроля реализации граничных условий на контактной поверхности при пространственном взаимодействии с помощью контроля взаимного проникновения тетраэдрических ячеек при пересечении их ребер. Продемонстрирована эффективность полученного алгоритма, практическое значение которого состоит в его применении в дополнение к основному механизму контроля, обеспечивающему непроникание узлов одного тела через предварительную границу («узел — грань») другого тела. Такая ситуация может возникнуть, например, в самом начале процесса соударения, если контактные поверхности взаимодействующих тел не являются параллельными плоскостями, или в процессе соударения через некоторое время, в частности при соударении двух цилиндров торцевыми поверхностями с использованием идеального скольжения. В этом случае в результате растекания краев граничных поверхностей механизм контроля границы «узел — грань» в определенный момент может оказаться недостаточным. Тогда включение механизма контроля границы «ребро – ребро» обеспечивает корректное выполнение условия непроникания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Герасимов А.В., Пашков С.В., Христенко Ю.Ф. Защита космических аппаратов от техногенных и естественных осколков. Эксперимент и численное моделирование. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 2011, № 4, с. 70–78.

[2] Bashurov V.V., Bebenin G.V., Belov G.V., Bukharev Y.N., Zhukov V.I., Ioilev A.G., Lapichev N.V., Mikhailov A.L., Smirnov A.L., Fateev G.S., Schlyapnikov G.P. Experimental modelling and numerical simulation of high- and hypervelocity space debris impact to spacecraft shield protection. *International Journal of Impact Engineering,* 1997, vol. 20, pp. 69–78.

[3] Myagkov N.N., Shumikhin T.A., Bezrukov L.N. Experimental and Numerical Study of Peculiarities at High-Velocity Interaction between a Projectile and Discrete Bumpers. *International Journal of Impact Engineering,* 2010, vol. 37, pp. 980–994.

[4] Plassard F., Mespoulet J., Hereil P. Hypervelocity impact of aluminium sphere against aluminium plate: experiment and LS-DYNA correlation. *8th European LS-DYNA Users Conference*, 2011.

[5] Shumikhin T.A., Myagkov N.N., Bezrukov L.N., Properties of ejecta generated at high-velocity perforation of thin bumpers made from different constructional materials. *International Journal of Impact Engineering*, 2012, vol. 50, pp. 90−98.

[6] Герасимов А.В., Добрица Д.Б., Пашков С.В., Христенко Ю.Ф. Теоретико-экспериментальное исследование способа защиты космических аппаратов от высокоскоростных частиц. *Космические исследования*, 2016, т. 54, № 2, с. 126–134.

[7] Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия*. Москва, Мир, 1989, 510 с.

[8] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов. *Известия РАН, Механика твердого тела*, 2005, № 1, с. 44–85.

[9] Гулидов А.И., Шабалин И.И. *Численная реализация граничных условий в динамических контактных задачах*. Новосибирск, Институт теоретической и прикладной механики АН СССР, Сибирское отделение, 1987, № 12, 37 с.

[10] Гулидов А.И., Шабалин И.И. Расчет контактных границ с учетом трения при динамическом взаимодействии деформируемых тел. *Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Мат. IX Всесоюзной конференции*. Новосибирск, 1988, с. 70–75.

[11] Wilkins M.L. *Computer simulation of dynamic fenomena*. Berlin-Heidelberg-New-York, Springer, 1999, 246 p.

[12] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т., т. 4: Основы механики твердых сред.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[13] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.Д. Моделирование динамических процессов деформирования гибких тканевых композиционных материалов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 5.
DOI: 10.18698/2308-6033-2014-5-1236

[14] Добрица Б.Т., Добрица Д.Б., Пашков С.В. Моделирование процесса взаимодействия высокоскоростного ударника с трехслойной разнесенной комбинированной преградой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 2, с. 70–89.

[15] Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А., Шабалин И.И., Бабаков В.А., Куропатенко В.Ф., Киселев А.Б., Тришин Ю.А., Садырин А.И., Киселев С.П., Головлев И.Ф. *Высокоскоростное взаимодействие тел*. Новосибирск, Изд-во СО РАН, 1999, 600 с.

Статья поступила в редакцию 27.09.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Добрица Б.Т., Добрица Д.Б., Ященко Б.Ю. Моделирование контактного взаимодействия ребер тетраэдрических ячеек при решении задач высокоскоростного взаимодействия пространственных тел. *Математическое моделирование и численные методы.* 2019. № 3. с. 39–56.

Добрица Борис Тимофеевич — канд. техн. наук. Автор более 30 научных публикаций в области математики. e-mail: fs11@bmstu.ru

Добрица Дмитрий Борисович — канд. техн. наук, ведущий математик АО «НПО им. С.А. Лавочкина». Автор более 30 научных публикаций в области проблематики защиты космических аппаратов от метеорно-техногенных воздействий.
e-mail: dobrica@laspace.ru

Ященко Богдан Юрьевич — канд. техн. наук, ведущий специалист АО «НПО им. С.А. Лавочкина». Автор более 30 научных публикаций в области теплового излучения и систем регистрации метеорно-техногенных воздействий.
e-mail: kom501@laspace.ru

Modeling of contact interaction of tetrahedral cell edges in solving problems of spatial body high-speed interaction

© B.T. Dobritsa[1], D.B. Dobritsa[2], B.Y. Yashchenko[2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2]JSC Lavochkin Scientific and Production Association, Khimki, 141400, Russia

The paper considers improving techniques of numerical simulation of high-speed interaction of solids, performed for designing spacecraft protection from the impact of micrometeorites and debris particles. An algorithm for the implementation of boundary conditions on the contact surface, designed for numerical simulation using Lagrangian grids and based on the control of mutual penetration of tetrahedral cells of contacting bodies at the intersection of their edges, is proposed. The algorithm is based on the calculation of reaction forces for nodes of tetrahedral cell edges of contacting bodies and correction of velocity vectors of these nodes under condition of non-penetration

Keywords: *numerical simulation, spacecraft, finite difference mesh, contact surface, high-speed impact, control of penetration, tetrahedral cell, reaction force*

REFERENCES

[1] Gerasimov A.V., Pashkov S.V., Khristenko Yu.F. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematikas i Meckhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2011, no. 4 (16), pp. 70–78.

[2] Bashurov V.V., Bebenin G.V., Belov G.V., Bukharev Y.N., Zhukov V.I., Ioilev A.G., Lapichev N.V., Mikhailov A.L., Smirnov A.L., Fateev G.S., Schlyapnikov G.P. *International Journal of Impact Engineering*, 1997, vol. 20 (1–5), pp. 69–78.

[3] Myagkov N.N., Shumikhin T.A., Bezrukov L. N. *International Journal of Impact Engineering*, 2010, vol. 37, pp. 980–994.

[4] Plassard F., Mespoulet J., Hereil P. Hypervelocity impact of aluminium sphere against aluminium plate: experiment and LS-DYNA correlation, *Proceedings of the 8th European LS-DYNA users conference*, France, Strasbourg, pp. 23–24.

[5] Shumikhin T. A., Myagkov N. N., Bezrukov L. N. *International Journal of Impact Engineering*, 2012, vol. 50, pp. 90−98.

[6] Gerasimov A. V., Pashkov S. V., Khristenko Y. F., Dobritsa D. B. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2016, vol. 54, no. 2, pp. 126–134.

[7] Johnson, K.L. *Contact Mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press Publ., 1985, 460 p. [In Russ: Johnson K.L. *Mechanics of contact interaction*. Moscow, Mir Publ., 1989, 510 p.].

[8] Burago N.G., Kukudzhanov V.N. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela –Mechanics of Solids*, 2005, no. 1, pp. 44–85.

[9] Gulidov A.I., Shabalin I.I. *Chislennaya realizatsiya granichnykh usloviy v dinamicheskikh kontaktnykh zadachakh*. Novosibirsk, Preprint Instituta Teoreticheskoy i Prikladnoy mekhaniki SO AN SSSR Publ., 1987, no. 12, 37 p. (Preprint of the Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS)

[10] Gulidov A. I., Shabalin I. I. Raschet kontaktnykh granits s uchetom treniya pri dinamicheskom vzaimodeystvii deformiruemykh tel [Calculation of contact boundaries taking into account friction at dynamic interaction of deformable bodies]. *Chislennye metody resheniya zadach teorii uprugosti i plastichnosti: Materialy IX Vsesoyuznoy konferentsii* [Proceedings of the IX all-Union conference "Numerical methods for solving problems of elasticity and plasticity theory"]. Novosibirsk, 1988, pp. 70–75.

[11] Wilkins M.L. *Computer simulation of dynamic phenomena*. Berlin-Heidelberg-New-York, Springer, 1999, 246 p.

[12] Dimitrienko Yu. I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[13] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. *Inzhenernyy zhurnal: Nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, no. 5.
DOI: 10.18698/2308-6033-2014-5-1236 Available at:
http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1236.html (accessed April 17, 2019).

[14] Dobritsa B.T., Dobritsa D.B., Pashkov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 2, pp.70-89.

[15] Fomin V.M., Gulidov A.I., Sapozhnikov G. A., Shabalin I.I., Babakov V.A, Kuropatenko V.F., Kiselev A.B., Trishin Yu A., Sadyrin A.I., Kiselev S.P., Golovnev I.F. *Vysokoskorostnoe vzaimodeystvie tel.* [High-speed interaction of bodies]. Novosibirsk, SO RAN Publ., 1999, 600 p.

Dobritsa B.T., Cand. Sc. (Eng.). Author of over 30 research publications in the field of mathematics. e-mail: fs11@bmstu.ru

Dobritsa D.B., Cand. Sc. (Eng.), Leading mathematician, JSC Lavochkin Scientific and Production Association. Author of over 30 research publications in the field of spacecraft protection against orbital debris and micrometeoroid impacts. e-mail: dobrica@laspace.ru

Yashchenko B.Y., Cand. Sc. (Eng.), Leading specialist, JSC Lavochkin Scientific and Production Association. Author of over 30 research publications in the field of the thermal radiation and meteoroid and orbital debris impact on spacecraft registration systems.
e-mail: kom501@laspace.ru