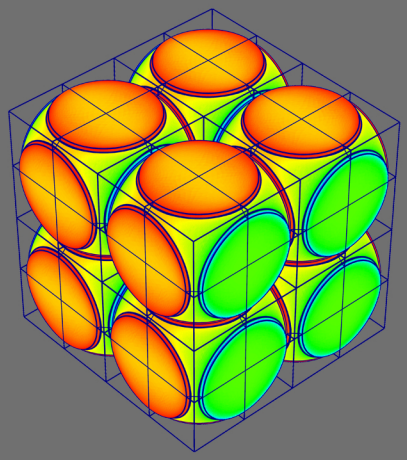
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Шугуан Ли. Моделирование проницаемости неньютоновских жидкостей в трехмерных композитных структурах на основе метода асимптотической гомогенизации. Математическое моделирование и численные методы. 2019. № 3.с.19–38.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/198/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.62
22.11.2026 23:06:58

УДК 532.51 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-3-1938

Моделирование проницаемости неньютоновских жидкостей в трехмерных композитных структурах на основе метода асимптотической гомогенизации

© Ю.И. Димитриенко, Шугуан Ли

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Исследована математическая модель многомасштабного процесса фильтрации неньютоновской жидкости в трехмерных периодических пористых средах методом асимптотической гомогенизации. Сформулированы так называемая локальная задача фильтрации в отдельной поре и локальное неньютоновско-вязкое определяющее соотношение. Разработан итерационный метод конечных элементов для решения локальной задачи в 1/8 ячейке периодичности, основанный на физической симметрии структуры. Рассчитаны распределение компонент скорости фильтрации, микрополей давления и неньютоновской вязкости в отдельной поре. На основе закона Дарси проанализирован нелинейный закон фильтрации, показано влияние реологических свойств жидкости на проницаемость.

Ключевые слова: *метод асимптотической гомогенизации*, *неньютоновская жидкость*, *периодические пористые среды*, *закон фильтрации*, *реологические свойства*

Введение. Течение неньютоновской жидкости в пористых средах играет важную роль во многих технических приложениях — получении полимерных композитов, технологии текстильных изделий и производстве бумаги. Таким образом, для оптимизации этих процессов требуется надлежащее описание течения через пористые среды [1–4].

Если жидкость можно считать ньютоновской, прямое применение известного закона Дарси [5] к пористым средам позволяет достаточно хорошо предсказать процесс течения. Основными параметрами пористой среды, определяющими процесс фильтрации, являются вязкость жидкости и компоненты тензора проницаемости. Для того чтобы избежать сложных лабораторных экспериментов, эти компоненты тензора проницаемости могут быть определены с использованием аналитических или численных методов. В литературе отображены теоретические работы по численным расчетам о течении Стокса и газа в периодических пористых средах [5–13]. Выполненные на определенной геометрии, они представляют собой интересные шаги к пониманию течения жидкостей и газов через более сложные пористые среды [14].

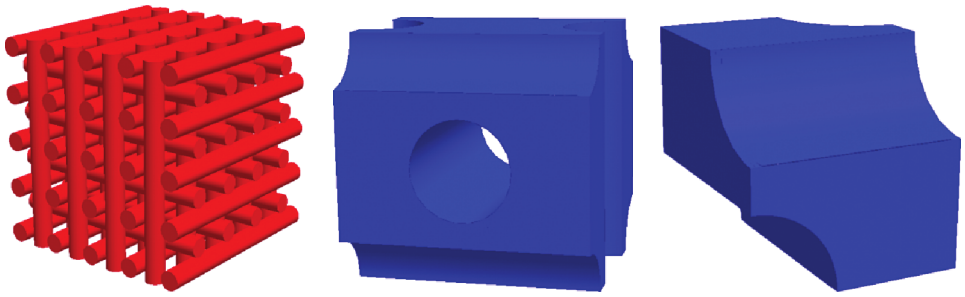
Поскольку неньютоновские жидкости обладают сложными реологическими свойствами, фильтрационные свойства неньютоновских жидкостей в пористых средах также стали довольно сложными. В проведенных теоретических исследованиях [4, 15–17] предложены

законы фильтрации для поперечного ползучего течения степенных жидкостей через волокнистую среду. Однако этих исследований недостаточно для формулировки закона, описывающего процесс фильтрации неньютоновской жидкости при произвольных сложных геометриях пористых сред.

В данной работе мы изучаем характеристики течения неньютоновской жидкости в трехмерной композитной структуре. Для моделирования течения в отдельных порах трехмерной пористой среды использовали метод асимптотической гомогенизации, закон фильтрации неньютоновской жидкости в пористых средах и влияние неньютоновской вязкости на проницаемость.

Цель данной работы — разработать физико-математическую модель локального движения транспорта неньютоновской несжимаемой жидкости в пористой композитной структуре, предложить численный алгоритм для локальных задач неньютоновских жидкостей в ячейке периодичности, проанализировать роль влияния реологических свойств на проницаемость.

Принятые допущения и геометрическая модель расчетной области. Принято, что жидкость представляет собой изотропную неньютоновско-вязкую несжимаемую среду. Процесс фильтрации считается изотермическим, плотность массовых сил полагается равной нулю.



а *б* *в*

Рис. 1. Геометрическая модель расчетной области:
а — периодическая пористая структура; *б* — ячейки периодичности;
в — 1/8 ячейки периодичности

Рассмотрим модель пористой среды (рис. 1). Микроскопические упругие свойства этой ортогональной пористой структуры были изучены в работах [18–20]. Предполагается, что пористая структура характеризуется периодичностью, отсутствуют тупиковые поры, ячейки периодичности геометрически и физически симметричны относительно координатных плоскостей местной декартовой системы координат. Всю область рассматриваемой трехмерной ортого-

нальной композитной структуры (см. рис. 1), которая занята порами, будем обозначать V, а ее границу (поверхность раздела с твердым телом) — Σ. Введем также следующие обозначения: V_ξ — ячейка периодичности; $V_{\xi p}$ — область, занятая порой; Σ_ξ — граница поры с твердым телом.

Математическая модель течения неньютоновских жидкостей. Рассмотрим движение несжимаемой неньютоновской жидкости в пористой среде, описываемое системой уравнений [21, 22]:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}\right) = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma,$$

где ρ — плотность; $\mathbf{v}$ — скорость; p — давление; σ — тензор вязких напряжений; $\otimes$ — тензорное произведение; ∇ — набла-оператор.

Дополним систему (1) определяющими соотношениями неньютоновской жидкости. Для этой цели могут быть рассмотрены разные модели, например модели $\boldsymbol{A_I}$ и $\boldsymbol{A_V}$ фойгтовских изотропных вязких сред [22]. Показано, что для изотропной неньютоновско-вязкой среды фойгтовского типа тензор вязких напряжений можно представить в виде квазилинейной функции от тензора скоростей деформации $\mathbf{D}$ [23]:

$$\sigma = 2\mu\mathbf{D} = \mu\left(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T\right), \tag{2}$$

где μ — коэффициент неньютоновской вязкости, зависящий от $I_2(\mathbf{D})$ — второго инварианта тензора скорости деформации [24]:

$$I_2(\mathbf{D}) = \sqrt{2\mathbf{D} \cdot\cdot \mathbf{D}}. \tag{3}$$

Рассмотрим модель Carreau [21, 22, 25], в которой зависимость коэффициента вязкости $\mu(I_2)$ имеет степенной вид

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \left(1 + \lambda^2 I_2^2\right)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{4}$$

Здесь μ_0 — вязкость с нулевой скоростью сдвига; μ_∞ — вязкость с бесконечной скоростью сдвига; λ — постоянная времени, число Carreau; n — степенной индекс. Поэтому отклонение n от единицы указывает на степень отклонения от ньютоновского поведения. При $n < 1$ мы имеем псевдопластичные жидкости (истончение сдвига), при $n > 1$ — дилатантные жидкости (утолщение сдвига). Псевдопластичные жидкости характеризуются кажущейся вязкостью, кото-

рая уменьшается с увеличением скорости сдвига, однако в жидкости дилатантов кажущаяся вязкость возрастает с увеличением скорости сдвига. Очевидно, что при $\mu_0 = \mu_\infty$, $\lambda = 0$ или $n = 1$ модель Carreau описывает ньютоновские жидкости.

На поверхностях раздела «твердое тело – жидкость» Σ характеризует граничное условие прилипания

$$\mathbf{v}\big|_{\Sigma} = 0. \tag{5}$$

В начальный момент времени при $t = t_0$ считается заданным давление

$$p\big|_{t=t_0} = p_0. \tag{6}$$

Введем безразмерную форму:

$$\breve{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_0};\ \breve{p} = \frac{p}{p_0};\ \breve{t} = \frac{t}{t_0};\ \breve{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{x_0};\ t_0 = \frac{x_0}{v_0};\ \breve{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \tag{7}$$

где v_0 — модуль вектора характерной скорости, м/с; p_0 — характерное давление, Па; x_0 — характерный размер всей области среды, м; μ_0 — характерное значение вязкости; t_0 — характерное время.

Систему уравнений для течения несжимаемой неньютоновской жидкости можно записать в безразмерной форме следующим образом (символ $\breve{}$ далее опускаем):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0;$$

$$\frac{1}{\mathrm{Eu}}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\otimes\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \frac{2}{\mathrm{Eu}\,\mathrm{Re}}\nabla\cdot\left(\mu\mathbf{D}\right); \tag{8}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla\otimes\mathbf{v} + \nabla\otimes\mathbf{v}^T\right);$$

$$\mu = s + \left(1-s\right)\left(1+\mathrm{Cu}^2 I_2^2\right)^{\frac{n-1}{2}};\ I_2 = \sqrt{2\mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{D}};\ s = \frac{\mu_\infty}{\mu_0},$$

где $\mathrm{Eu} = \dfrac{p_0}{\rho_0 v_0^2}$ — число Эйлера; $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho_0 v_0 x_0}{\mu_0}$ — число Рейнольдса; $\mathrm{Cu} = \dfrac{\lambda v_0}{x_0}$ — число Carreau.

Применение метода асимптотического осреднения (МАО) для постановки задачи на ячейке периодичности. Применение метода асимптотического осреднения для системы уравнений Навье–Стокса

описано в работах [1, 3, 12]. В рассматриваемом случае суть метода состоит в следующем. Пусть введены: l_0 — линейный размер ячейки периодичности V_ξ среды, малый параметр $\kappa = \dfrac{l_0}{x_0} << 1$, два типа безразмерных координат — глобальные $\breve{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathbf{x}}{x_0} = \left(x_1, x_2, x_3\right)$ и локальные $\boldsymbol{\xi} = \dfrac{\mathbf{x}}{l_0} = \dfrac{\breve{\mathbf{x}}}{\kappa} = \left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)$. Тогда все функции (f), описывающие течение жидкости в порах, можно считать квазипериодическими, т. е. зависящими от времени t локальных $(\boldsymbol{\xi})$ и глобальных $(\breve{\mathbf{x}})$ координат. Дифференцирование этих функций можно осуществлять с помощью правила

$$\nabla f \to \nabla_x f + \frac{1}{\kappa}\nabla_\xi f. \tag{9}$$

Условие квазипериодичности заключается в том, что функции f медленно изменяются по аргументу x_i на расстояниях x_0 и являются периодическими относительно аргумента ξ_j, т. е.

$$\begin{aligned} f\left(\xi_1 - \frac{1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) &= f\left(\xi_1 + \frac{1}{2}, \xi_2, \xi_3\right); \\ f\left(\xi_1, \xi_2 - \frac{1}{2}, \xi_3\right) &= f\left(\xi_1, \xi_2 + \frac{1}{2}, \xi_3\right); \\ f\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3 - \frac{1}{2}\right) &= f\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3 + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Кроме того, вводится операция осреднения функций по области $V_{\xi p}$:

$$\left\langle f \right\rangle = \frac{1}{\varphi_p}\int\limits_{V_{\xi p}} f dV, \tag{11}$$

где $\varphi_p = \int\limits_{V_{\xi p}} dV$ — пористость среды.

Тогда, выполняя осреднение p, $\mathbf{v}$, μ, получим

$$\left\langle \mathbf{v} \right\rangle = \overline{\mathbf{v}}, \ \left\langle p \right\rangle = \overline{p}, \ \left\langle \mu \right\rangle = \overline{\mu}, \tag{12}$$

где $\overline{\mathbf{v}}$, $\overline{p}$, $\overline{\mu}$ — средние значения функций.

Соотношения (12) следует понимать как дополнительные условия, предъявляемые к локальным параметрам течения в $V_{\xi p}$, либо как обозначения для вычисленных осредненных функций.

Введем соотношения между безразмерными параметрами κ, Eu, Re и Cu:

$$\mathrm{Eu}\,\kappa^e = \mathrm{Eu}^0 = O(1);\ \ \mathrm{Re}\,\kappa^r = \mathrm{Re}^0 = O(1);$$

$$\mathrm{Cu}^0\kappa^c = \mathrm{Cu};\ \ \mathrm{Cu}^0 = O(1), \tag{13}$$

где $e, r, c \in \mathrm{Z}$ — некоторые целые числа, которые соответствуют разным режимам течения неньютоновской жидкости.

В соответствии с общей концепцией МАО решение задачи (8) находим в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра κ:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)}\left(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}\right) + \kappa\mathbf{v}^{(1)}\left(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}\right) + \kappa^2\mathbf{v}^{(2)}\left(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}\right) + \cdots;\\
&p = p^{(0)}\left(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}\right) + \kappa p^{(1)}\left(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}\right) + \kappa^2 p^{(2)}\left(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}\right) + \cdots;\\
&\mu = \mu^{(0)}\left(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}\right) + \kappa\mu^{(1)}\left(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}\right) + \kappa^2\mu^{(2)}\left(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}\right) + \cdots.
\end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим случай $e = 2$, $r = 0$ и $c = 0$, т. е. $\mathrm{Eu} >> O(1)$, $\mathrm{Re} = O(1)$ и $\mathrm{Cu} = O(1)$. Подставляя разложения (14) в уравнения (8), с учетом правила дифференцирования квазипериодических функций (9) и соотношений (10)–(12) получаем локальную задачу нулевого уровня:

$$\nabla_\xi \mathbf{v}^{(0)} = 0;\ \ \nabla_\xi p^{(0)} = 0;\ \ \mathbf{v}^{(0)}\Big|_{\Sigma_{\xi sg}} = 0;\ \ \left\langle p^{(0)}\left(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t\right)\right\rangle = \overline{p}. \tag{15}$$

Из уравнения (15) следует, что $p^{(0)}\left(\breve{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t\right) = p^{(0)}\left(\breve{\mathbf{x}},t\right)$ не зависит от локальных координат $\boldsymbol{\xi}$. Рассматривая следующий уровень, получаем локальную задачу «на ячейке периодичности» относительно скорости нулевого уровня $\mathbf{v}^{(0)}$ и давления первого уровня $p^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
&\nabla_\xi \mathbf{v}^{(0)} = 0;\\
&-\nabla_\xi p^{(1)} + \frac{2}{\mathrm{Eu}^0\,\mathrm{Re}^0}\nabla_\xi\left(\mu^{(0)}\mathbf{D}^{(0)}\right) = \nabla_x p^{(0)};\\
&\mathbf{D}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\nabla_\xi \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \nabla_\xi \otimes \mathbf{v}^{(0)T}\right);
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\mu^{(0)} = s + (1-s)\left(1 + \mathrm{Cu}^{02} Y^{(0)}\right)^{\frac{n-1}{2}};\ Y^{(0)} = 2\mathbf{D}^{(0)} \cdot\cdot \mathbf{D}^{(0)};$$

$$\mathbf{v}^{(0)}\Big|_{\Sigma_\xi} = 0;$$

$$\left\langle p^{(1)} \right\rangle = 0,\ \left[\left[\mathbf{v}^{(0)} \right]\right] = 0,\ \left[\left[p^{(1)} \right]\right] = 0.$$

Неизвестными в этой системе являются функции $\mathbf{v}^{(0)}$ и $p^{(1)}$, градиент давления $\nabla_x p^{(0)}$ рассматривается как один из входных параметров. Символом $\left[\left[\cdot\right]\right]$ обозначены условия периодичности, причем $-\frac{1}{2} \le \xi_i \le \frac{1}{2}$ — область ячейки периодичности $V_{\xi p}$.

Постановка локальных задач фильтрации с учетом трехмерной структуры пор. Рассмотрим далее трехмерную пористую структуру, у которой течение среды осуществляется вдоль одной ξ_α из трех осей $O\xi_i$. Поскольку локальная задача является нелинейной, нельзя воспользоваться методом разделения переменных, как в работах [9, 19]. Однако, основываясь на применяемых методах [9, 12, 19], решение задач можно упростить, если воспользоваться следующей теоремой о продолжении решения.

Считается, что ячейка периодичности V_ξ трехмерной структуры имеет зеркальную симметрию относительно координатной плоскости $O\xi_1\xi_2$, $O\xi_1\xi_3$, $O\xi_2\xi_3$. Тогда решение $\mathbf{v}^{(0)}$, $p^{(1)}$ и $\mu^{(0)}$ локальных задач (16) можно получить с помощью симметричного или асимметричного продолжения функций $\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} = \left(\tilde{v}_1^{(\alpha)}, \tilde{v}_2^{(\alpha)}, \tilde{v}_3^{(\alpha)}\right)$, $\tilde{p}^{(\alpha)}$ и $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$, определенных в 1/8 ячейки периодичности $V_{\xi p}$ (в первом квадранте $\left\{\xi_i : 0 \le \xi_i \le \frac{1}{2}\right\}$) (рис. 2) и являющихся решениями следующих $L^{(\alpha)}$ локальных задач формы компонента:

$$\tilde{v}_{i/i}^{(\alpha)} = 0;$$

$$-\tilde{p}_{/i}^{(\alpha)} + \frac{2}{\mathrm{Eu}^0\,\mathrm{Re}^0}\left(\tilde{\mu}^{(\alpha)} \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)}\right)_{/j} = p_{,i}^{(0)} \delta_{i\alpha}; \qquad (17)$$

$$\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\left(\tilde{v}_{i/j}^{(\alpha)} + \tilde{v}_{j/i}^{(\alpha)}\right);$$

$$\tilde{\mu}^{(\alpha)} = s + (1-s)\left(1 + Cu^{02}\tilde{Y}^{(\alpha)}\right)^{\frac{n-1}{2}};\ \ \tilde{Y}^{(\alpha)} = 2\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)}\tilde{D}_{ji}^{(\alpha)},$$

где $f_{,i} = \dfrac{\partial f}{\partial \breve{x}_i}$; $f_{/i} = \dfrac{\partial f}{\partial \xi_i}$; δ_{ij} — символ Кронекера.

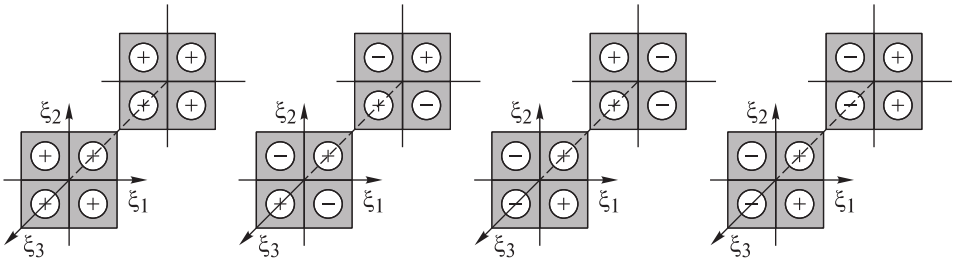


Рис. 2. Изменение знаков функций при симметричном или асимметричном продолжении для локальной задачи $L^{(1)}$

Используя принцип симметричного и антисимметричного продолжения решения системы (17), можно записать граничные условия на граничных плоскостях 1/8 ячейки периодичности $V_{\xi p}$, удовлетворяющие условиям периодичности системы (16):

$$\xi_j = 0$$

$$\text{и } \xi_j = \frac{1}{2}: \begin{cases} \tilde{v}_i^{(\alpha)}\left(\delta_{\alpha j} + \delta_{ji} - 2\delta_{\alpha j}\delta_{ji}\right) + \dfrac{\partial \tilde{v}_i^{(\alpha)}}{\partial \xi_j}\left[1 - \left(\delta_{\alpha j} + \delta_{ji} - 2\delta_{\alpha j}\delta_{ji}\right)\right] = 0; \\ \tilde{p}^{(\alpha)}\delta_{\alpha j} + \dfrac{\partial \tilde{p}^{(\alpha)}}{\partial \xi_j}\left(1 - \delta_{\alpha j}\right) = 0; \end{cases}$$

$$\alpha, i, j = \overline{1,3}. \qquad (18)$$

Численное решение локальных задач. Решим локальную задачу $L^{(\alpha)}$ (17) на основе метода конечных элементов [26], для чего используем 6-узловой тетраэдр с тремя степенями свободы по скоростям в каждом узле и с одной степенью свободы по давлению в вершинах. Поскольку локальная задача $L^{(\alpha)}$ (17) — нелинейная, для ее решения применим итерационный метод как разновидность метода упругих решений [18–20]. Согласно этому методу определяющие соотношения в системе (17) для вязкости неньютоновских жидкостей линеаризуются:

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)\{m\}} = 2\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m-1\}}\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}} =$$

$$= 2\left[s + (1-s)\left(1 + Cu^{02}\tilde{Y}^{(\alpha)\{m-1\}}\right)^{\frac{n-1}{2}} \right]\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}, \qquad (19)$$

где $\tilde{Y}^{(\alpha)\{m-1\}} = 2\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m-1\}}\tilde{D}_{ji}^{(\alpha)\{m-1\}}$; $\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}} = \frac{1}{2}\left(\tilde{v}_{i/j}^{(\alpha)\{m\}} + \tilde{v}_{j/i}^{(\alpha)\{m\}T}\right)$; $\tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}$ и $\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}$ — значения тензора неньютоновско-вязких напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)\{0\}}$ и тензора скорости деформации $\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{0\}}$ на m-м шаге итерационного цикла; $\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m\}}$ — вязкость неньютоновской жидкости на m-м шаге итерации.

Обозначим $\tilde{v}_i^{(\alpha)\{m\}}$ и $\tilde{p}^{(\alpha)\{m\}}$ — соответственно скорость $\tilde{v}_i^{(\alpha)\{0\}}$ и давление $\tilde{p}^{(\alpha)\{0\}}$ на m-м шаге итерационного цикла. Тогда на m-м шаге итерации вместо задачи (16) получим следующую линеаризованную задачу:

$$\tilde{v}_{i/i}^{(\alpha)\{m\}} = 0;$$

$$-\tilde{p}_{/i}^{(\alpha)\{m\}} + \frac{2}{\mathrm{Eu}^0\,\mathrm{Re}^0}\left(\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m-1\}}\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}\right)_{/j} = p_{,i}^{(0)}\delta_{i\alpha}. \qquad (20)$$

Проверяем сходимость на m-м шаге итерации, если $\left\| \left(X^{\{m+1\}} - X^{\{m\}}\right) \Big/ X^{\{m\}} \right\|_\infty \le \varepsilon$, где $\varepsilon \le 10^{-5}$ является очень малым числом; $X = \tilde{v}_i^{(\alpha)}, \tilde{p}^{(\alpha)}, \tilde{\mu}^{(\alpha)}$, затем итерационный процесс завершается.

Нелинейный закон фильтрации неньютоновской жидкости. Из системы (16) видно, что решение ($\mathbf{v}^{(0)}$ и $p^{(1)}$) локальной задачи зависит не только от входных данных $\nabla_x p^{(0)}$, но и от вязкости неньютоновской жидкости. Поэтому

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}^{(0)}\left(\xi, \nabla_x p^{(0)}\right). \qquad (21)$$

После решения серии задач $L^{(\alpha)}$ (17) методом конечных элементов для всех α проинтегрируем скорости $\mathbf{v}^{(0)}$ по областям, занятым неньютоновской жидкостью. В результате получаем осредненную скорость в локальной задаче фильтрации (16). Тогда эффективный закон фильтрации, связанный с этой скоростью $\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle$ и градиентом давления $\nabla_x p^{(0)}$, можно записать в следующем виде:

$$\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle = F\left(\nabla_x p^{(0)} \right). \tag{22}$$

Поскольку ранее был указан алгоритм вычисления осредненных скоростей $\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle$ по заданным значениям градиента давления $\nabla_x p^{(0)}$, то, следовательно, фактически был указан алгоритм нахождения значения функции (22). Функция (22) может быть указана, если имеется информация о типе геометрической симметрии ячейки периодичности композита и типе анизотропии волокон и матрицы. Ввиду того, что основное допущение симметрии принято, решение всех задач $L^{(\alpha)}$ (17) будет иметь указанный тип симметрии. Это относится и к функции (22). Но перечисленные выше и тождественные преобразования образуют группу ортотропии. Согласно [22], функция (22) будет тензорной функцией, индифферентной относительно группы ортотропии. Но тогда для такой функции можно использовать представление ее в тензорном базисе группы ортотропии, которое имеет вид

$$\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle = \sum_{\alpha=1}^{3} \varphi^{(\alpha)}\left(I_1^p, I_2^p, I_3^p \right) \mathbf{e}_\alpha \quad \text{или} \quad \left\langle v_i^{(0)} \right\rangle = \sum_{\alpha=1}^{3} \varphi^{(\alpha)}\left(I_1^p, I_2^p, I_3^p \right) \delta_{i\alpha}, \tag{23}$$

где I_i^p — скалярные функции от инвариантов градиента давления $\nabla_x p^{(0)}$,

$$I_i^p = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i}. \tag{24}$$

Функции $\varphi^{(\alpha)}$ фактически представляют собой искомую эффективную проницаемость в пористых средах. Зная значения $\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle$ и $\nabla_x p$, функции $\varphi^{(\alpha)}$ можно вычислить. Для ортогональных полей запишем формулы (23) в явном виде:

$$\varphi^{(\alpha)}\left(I_1^p, I_2^p, I_3^p \right) = \tilde{\varphi}^{(\alpha)}\left(\left| I_1^{p(\alpha)} \right|, \left| I_2^{p(\alpha)} \right|, \left| I_3^{p(\alpha)} \right| \right) I_\alpha^p = \tilde{\varphi}^{(\alpha)} p_{,\alpha}^{(0)}. \tag{25}$$

Поэтому

$$\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle = \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \tilde{\varphi}^{\alpha} \mathbf{e}_\alpha^2 \right) \nabla_x p^{(0)}, \tag{26}$$

где $\mathbf{e}_\alpha^2 = \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha$ — диадный базис; $\mathbf{K} = \sum_{\alpha=1}^{3} \tilde{\varphi}^{(\alpha)} \mathbf{e}_\alpha^2$ — тензор проницаемости.

Из анализа локальных задач видно, что направление осредненной скорости противоположно направлению градиента давления, поэтому

$$\left\langle \mathbf{v}^{(0)} \right\rangle = -\mathbf{K}\nabla_x p^{(0)}, \tag{27}$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}\left(\left|\nabla_x p^{(0)}\right|\right) = K_j^i$ — тензорная функция, зависящая от модуля $\left|\nabla_x p^{(0)}\right| = \sqrt{\nabla_x p^{(0)} \nabla_x p^{(0)}}$ — градиента давления.

Поскольку функция $\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}$ для локальных координат имеет симметрию или асимметрию, например, при $\alpha = 1$ функция $\tilde{v}_2^{(1)}$ для координатной плоскости ($O\xi_1\xi_3$ и $O\xi_2\xi_3$) является асимметричной, поэтому $K_2^1 = 0$, функция $\tilde{v}_3^{(\alpha)}$ для этой координатной плоскости ($O\xi_1\xi_2$ и $O\xi_2\xi_3$) также асимметрична, поэтому $K_3^1 = 0$. Следовательно, матрица $\mathbf{K} = \mathrm{diag}\left(K_1^1, K_2^2, K_3^3\right)$ будет диагональной. Стоит отметить, что микроструктура является изотропной, имеем $K_1^1 = K_2^2 = K_3^3 = K$.

Аналогично эффективную вязкость, связанную со осредненной вязкостью $\langle \mu \rangle$ и градиентом давления $\nabla_x p^{(0)}$, можно записать в форме функции

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle &= \sum_{\alpha=1}^{3} \eta^{(\alpha)} \left(I_1^{p(\alpha)}, I_2^{p(\alpha)}, I_3^{p(\alpha)} \right) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{3} \tilde{\eta}^{(\alpha)} \left(\left| I_1^{p(\alpha)} \right|, \left| I_2^{p(\alpha)} \right|, \left| I_3^{p(\alpha)} \right| \right) p_{,i}^{(0)} \delta_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} \left\langle \tilde{\mu}^{(\alpha)} \right\rangle. \end{aligned} \tag{28}$$

Для того чтобы изучить реологические свойства жидкостей, введем понятия средней вязкости и пористости:

$$\langle \mu \rangle = \frac{1}{\varphi_p} \int_\Omega \mu dV = \frac{8}{\varphi_p} \int_\Omega \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \tilde{\mu}^{(\alpha)} \right) dV; \tag{29}$$

$$\varphi_p = \int_{V_\xi} dV = 8 \int_{V_{\xi p}} dV = 8 \sum_{e=1}^{E} \int_{V_e} dV,$$

где E — число конечных элементов.

Осредненная вязкость описывает макроскопическое свойство реалогии. Значение вязкости, отличающейся от единицы, характеризует

прочность неньютоновской жидкости. Очевидно, что осредненная вязкость ньютоновской жидкости равна единице.

Проверка адекватности математической модели на моделирование ньютоновских жидкостей. В качестве примера для численного моделирования мы используем бензол (C_6H_6). Он входит в состав бензина, является исходным сырьем для производства лекарственных средств, различных пластмасс, синтетической резины, красителей.

Таблица 1

Основные параметры расчета

Параметр	Значение	Параметр	Значение
μ_0, Па·с	$6{,}52\cdot10^{-4}$	v_0, м/с	0,1
Cu^0	1	x_0, м	1
p_0, Па	10^5	l_0, м	10^{-4}
κ	10^{-4}	$1\Big/\left(\mathrm{Eu}^0\,\mathrm{Re}^0\right)$	$6{,}52\cdot10^{-2}$

Задача течения ньютоновской жидкости $(n=1)$ для определения свойств композитных структур решается при $\left|\nabla_x p^{(0)}\right|=1,$ пористости — 0,6230, коэффициенте проницаемости $K=0,0689.$

Таблица 2

Результаты локальных задач $\boldsymbol{L^{(1)}}$ ньютоновской жидкости

Параметр	Значение	
	минимальное	максимальное
$\tilde{p}^{(1)}$, Па	–0,3529	0,3442
$\tilde{v}_1^{(1)}$, м/с	0	0,1436
$\tilde{v}_2^{(1)}$, м/с	–0,0774	0
$\tilde{v}_3^{(1)}$, м/с	0	0,0776
$\tilde{\mu}^{(1)}$, Па·с	1	1

Для установления точности численного алгоритма сначала проверяют изотропность материала. Согласно закону Дарси, закон фильтрации ньютоновской жидкости удовлетворяет линейной зависимости от градиента давления $\nabla_x p^{(0)}$ (рис. 3).

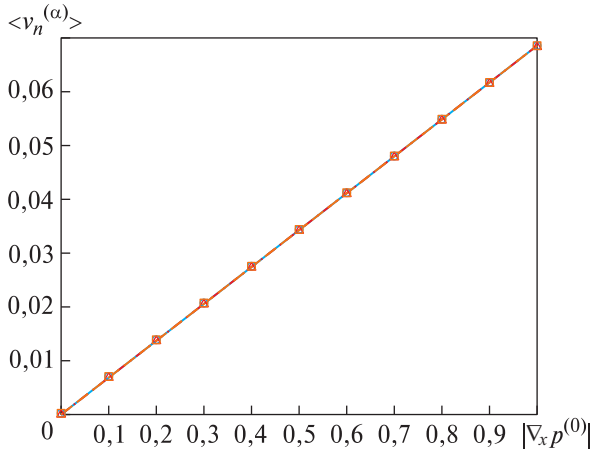


Рис. 3. Зависимость средней скорости $\left\langle \tilde{v}_{\alpha}^{(\alpha)} \right\rangle$ от модуля градиента макродавления $\left|\nabla_x p^{(0)}\right|$ для ньютоновской жидкости в локальных задачах $L^{(\alpha)}$: — $L^{(1)}$; – – $L^{(2)}$; — $L^{(3)}$

Данные рис. 3 согласуются с законом Дарси для изотропных пористых сред.

Результаты моделирования локальной задачи $L^{(1)}$ псевдопластичной жидкости. Выполним численное решение локальной задачи (17) при $\left|\nabla_x p^{(0)}\right| = 1$ и $n = 0,25$. Результаты расчетов фильтрации неньютоновской жидкости приведены в табл. 3. По сравнению с результатами для ньютоновской жидкости (см. табл. 2) в процессе фильтрации псевдопластичной жидкости $(n = 0,25)$ импульс давления немного увеличился, скорость течения возросла, вязкость значительно снизилась, пористость осталась неизменной.

Таблица 3

Результаты локальных задач неньютоновской жидкости при $n = 0,25$

Параметр	Значение	
	минимальное	максимальное
$\tilde{p}^{(1)}$, Па	–0,3570	0,3450
$\tilde{v}_1^{(1)}$, м/с	0	0,2451
$\tilde{v}_2^{(1)}$, м/с	–0,1197	0
$\tilde{v}_3^{(1)}$, м/с	0	0,1196
$\tilde{\mu}^{(1)}$, Па·с	0,3136	0,9999

Распределение компонентов скорости $\tilde{\mathbf{v}}^{(1)}$, давления $\tilde{p}^{(1)}$ и вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ неньютоновской жидкости показаны на рис. 4. На этом и других аналогичных рисунках введены обозначения для локальных координат $\xi_1 = x,\ \xi_2 = y,\ \xi_3 = z$.

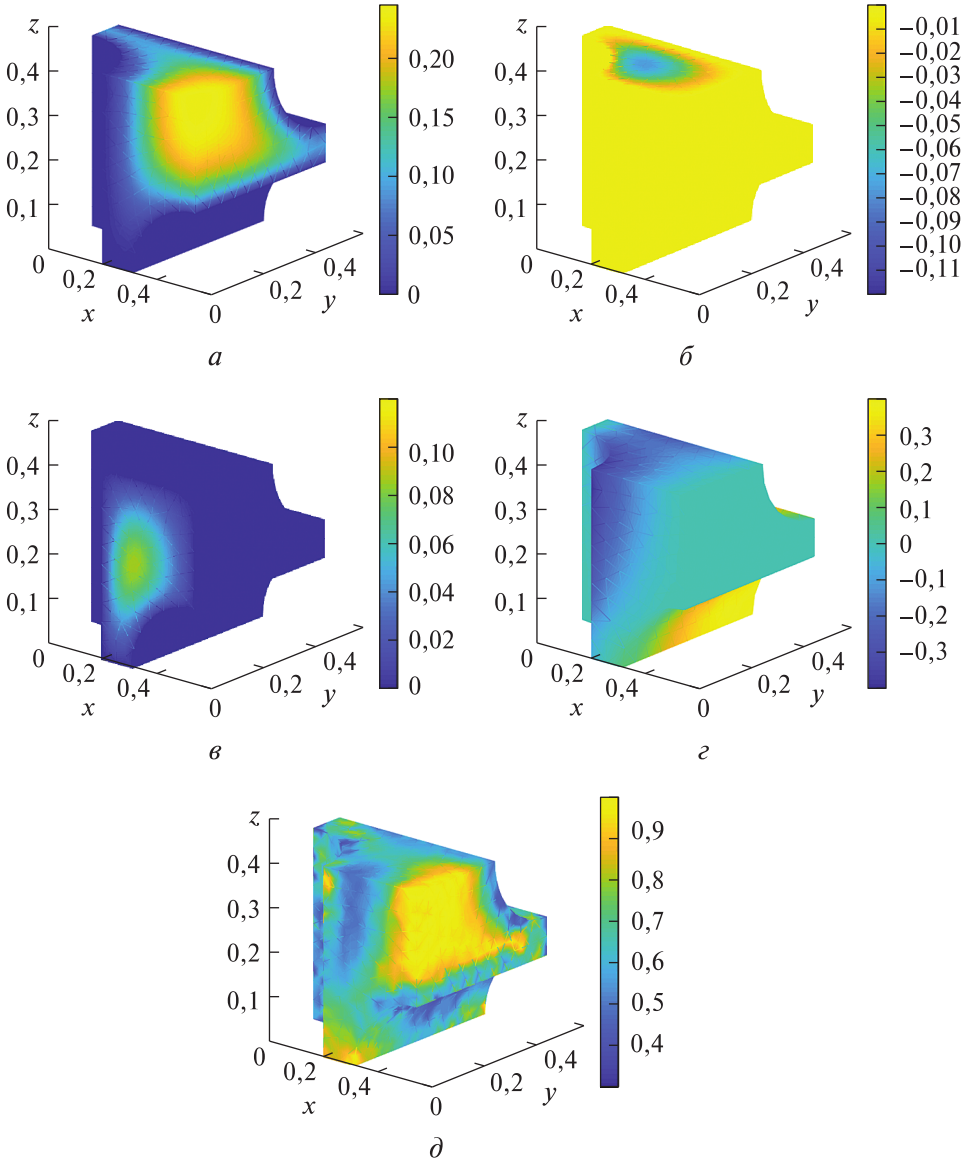


Рис. 4. Результаты решения локальной задачи $L^{(1)}$:

а — компоненты скорости $\tilde{v}_1^{(1)}$; *б* — компоненты скорости $\tilde{v}_2^{(1)}$; *в* — компоненты скорости $\tilde{v}_3^{(1)}$; *г* — компоненты давления $\tilde{p}^{(1)}$; *д* — компоненты вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$

Влияние реологических свойств на проницаемость. Исследуем связь между средней скоростью $\left\langle \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} \right\rangle$, градиентом давления $\nabla_x p^{(0)}$ и степенным индексом n, рассмотрим $n \in [0,25, 1,75]$ и $\left|\nabla_x p^{(0)}\right| \in [0,1]$. Зависимости между средней скоростью $\left\langle \tilde{\mathbf{v}}^{(1)} \right\rangle$ и градиентом давления $\left|\nabla_x p^{(0)}\right|$ при разных степенных индексах n показаны на рис. 5.

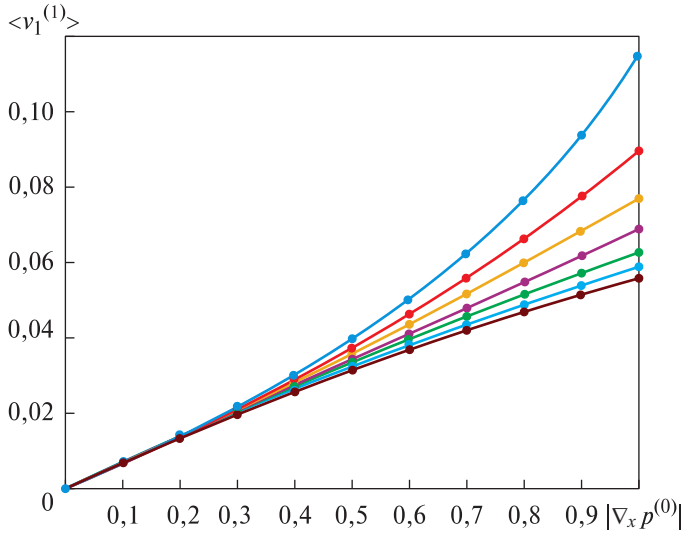


Рис. 5. Зависимость средней скорости $\left\langle \tilde{v}_1^{(1)} \right\rangle$ от градиента давления $\left|\nabla_x p^{(0)}\right|$ и степенного индекса n для локальной задачи $L^{(1)}$:

— $n = 0,25$; — $n = 0,50$; — $n = 0,75$; — $n = 1,00$; — $n = 1,25$; — $n = 1,50$; — $n = 1,75$

Данные, приведенные на рис. 5, показывают, что осредненная скорость $\left\langle \tilde{\mathbf{v}}^{(1)} \right\rangle$ уменьшается с увеличением степенного индекса n. При увеличении модуля градиента давления $\left|\nabla_x p^{(0)}\right|$ средняя скорость возрастает, эффект степенного индекса также увеличивается. Нелинейное соотношение, приведенное на рис. 5, соответствует закону фильтрации (26) неньютоновской жидкости.

На рис. 6 показана взаимосвязь между средней вязкостью $\left\langle \tilde{\mu}^{(1)} \right\rangle$ и модулем $\left|\nabla_x p^{(0)}\right|$ градиента давления при разных степенных индексах n. Данные, приведенные на рис. 6, показывают, что средняя вязкость $\left\langle \tilde{\mu}^{(1)} \right\rangle$ возрастает с увеличением степенного индекса. При увеличении модуля $\left|\nabla_x p^{(0)}\right|$ градиента давления влияние степенного индекса на среднюю вязкость также увеличивается.

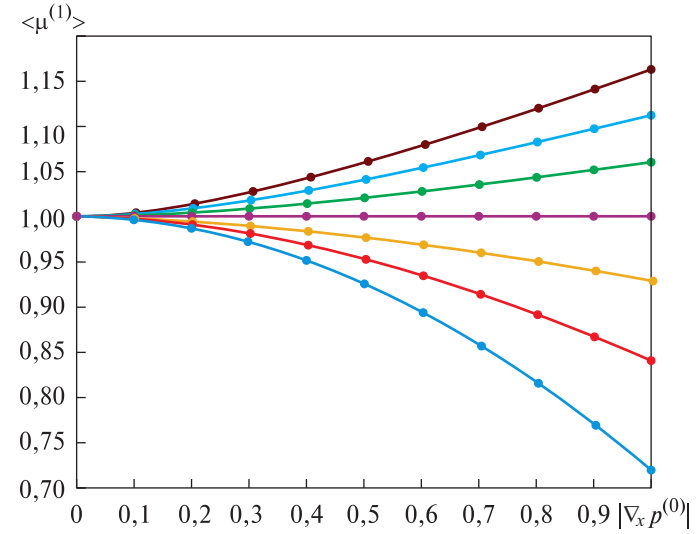


Рис. 6. Зависимость средней вязкости $\left\langle \mu^{(1)} \right\rangle$ от градиента давления $\left|\nabla_x p^{(0)}\right|$ и степенного индекса n для локальной задачи $L^{(1)}$:

— $n = 0{,}25$; — $n = 0{,}50$; — $n = 0{,}75$; — $n = 1{,}00$; — $n = 1{,}25$; — $n = 1{,}50$; — $n = 1{,}75$

Заключение. Предложенная методика позволяет вычислять распределение микрополей давления, вязкости неньютоновской жидкости и компонент скорости фильтрации в пределах отдельной поры, а также рассчитывать основные параметры пористой среды (пористости и коэффициентов проницаемости) без проведения каких-либо дополнительных эмпирических исследований. Локальная задача, полученная на основе метода асимптотического осреднения, решается методом конечных элементов. Результаты моделирования выявляют роль реологии жидкости. Показано, что средняя скорость фильтрации

уменьшается с увеличением индекса степенного закона, при увеличении модуля градиента макродавления средняя скорость фильтрации возрастает и эффект степенного индекса также увеличивается. Кроме того, средняя вязкость жидкости возрастает с увеличением степенного индекса, при увеличении модуля градиента макродавления влияние степенного индекса на среднюю вязкость и фильтрацию также увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. *Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры*. Москва, Едиториал УРСС, 2003, 376 с.

[2] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984, 352 с.

[3] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of composites under high temperatures*. Springer, 2015, 434 p.

[4] Idris Z., Orgéas L., Geindreau C., et al. Microstructural effects on the flow law of power-law fluids through fibrous media. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2004, vol. 12, pp. 995–1015.

[5] Димитриенко Ю.И., Захарова Ю.В., Богданов И.О. Математическое и численное моделирование процесса фильтрации связующего в тканевом композите при RTM-методе изготовления. *Университетский научный журнал*, 2016, № 19, с. 33–43.

[6] Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Моделирование процесса многоуровневой фильтрации жидкого связующего в тканевом композите при RTM-методе изготовления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, № 12, с. 14–54.

[7] Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации жидкого связующего в композитных конструкциях при RTM-методе изготовления. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 2, с. 3–27.

[8] Димитриенко Ю.И., Иванов М.Ю. Моделирование нелинейных динамических процессов переноса в пористых средах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, № 1, 2008, с. 39–56.

[9] Димитриенко Ю.И., Левина А.И., Боженик П. Конечно-элементное моделирование локальных процессов переноса в пористых средах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 3, с. 90–104.

[10] Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации в пористых средах. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, № 3,с. 17–38.

[11] Dimitrienko Yu.I. Dynamic transport phenomena in porous polymer materials under impulse thermal effects. *Transport in porous media*, 1999, vol. 35, pp. 299–326.

[12] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Simulation of local transfer in periodic porous media. *European Journal of Mechanics/B-Fluids*, 2013, № 1, pp.174–179.

[13] Wang J.G., Leung C.F., Chow Y.K. Numerical solutions for flow in porous media. *International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 2003, vol. 27, pp. 565–583.

[14] Koponen A., Kandhai D., Hellen E., Alava M., Hoekstra A., Kataja M., Niskanen N., Sloot P., Timonen J. Permeability of three-dimensional random fiber webs. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, pp. 716–719.

[15] Auriault J.L., Royer P., Geindreau C. Filtration law for power-law fluids in anisotropic porous media. *International Journal of Engineering Science*, 2002, vol. 40, pp. 1151–1163.

[16] Orgéas L., Idrisl Z., Geindreau C., et al. Modelling the flow of power-lawfluids through anisotropic porous media at low-pore Reynolds number. *Chemical Engineering Science*, 2006, vol. 61, pp. 4490–4502.

[17] Orgéas L., Geindreau C., Auriault J.L., et al. Upscaling the flow of generalised Newtonian fluids through anisotropic porous media. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2007, vol. 145, pp. 15–29.

[18] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Об упругих свойствах композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 2009, № 4, с. 96–110.

[19] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, № 1, 2007, с. 26–46.

[20] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2, с. 3–23.

[21] Димитриенко Ю.И., Ли Шугуан. Конечно-элементное моделирование неизотермического стационарного течения неньютоновской жидкости в сложных областях. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 2, с. 70–95.

[22] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физматлит, 2009, 624 с.

[23] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 2*: *Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.

[24] Dimitrienko Yu.I. *Tensor analysis and nonlinear tensor functions*. Springer, 2002, 662 p.

[25] Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O. *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics*. John Wiley & Sons, 1987, 649 p.

[26] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The *Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals.* Elsevier, 2005, 733 p.

Статья поступила в редакцию 24.08.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Шугуан Ли. Моделирование проницаемости неньютоновских жидкостей в трехмерных композитных структурах на основе метода асимптотической гомогенизации. *Математическое моделирование и численные методы*. 2019. № 3. с. 19–38.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Шугуан Ли — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: shuguangli2008@gmail.com

Modeling non-Newtonian liquid permeability in three-dimensional composite structures on the base of asymptotic homogenization method

© Y.I. Dimitrienko, Sh. Li

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

The paper describes investigating a mathematical model of the process of a non-Newtonian liquid multiscale filtration in three-dimensional periodic porous media by asymptotic homogenization. The so-called local problem of filtration in a single pore is formulated as well as the local non-Newtonian-viscous defining relationship. An iterative finite element method is developed for solving a local problem in 1/8 periodicity cell, based on the physical symmetry of the structure. The distribution of the components of the filtration rate, pressure micro-fields and non-Newtonian viscosity in a single pore is calculated. On the basis of Darcy's law the nonlinear filtration law is analyzed, the effect of liquid rheological properties on permeability is shown.

Keywords: *asymptotic homogenization method, non-newtonian liquid, periodic porous media, filtration law, rheological properties*

REFERENCES

[1] Bardzokas D.I., Zobnin A.I. *Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov v kompozitsionnykh materialakh periodicheskoy struktury* [Mathematical modeling of physical processes in composite materials of periodic structure]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2003, 376 p.

[2] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of the composite material mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.

[3] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of composites under high temperatures*. Springer, 2015, 434 p.

[4] Idris Z, Orgéas L, Geindreau C, Bloch, J.F., Auriault, J.L *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2004, vol. 12, pp. 995–1015.

[5] Dimitrienko Yu.I., Zakharova Yu.V., Bogdanov I.O. *Humanities and Science University Journal*, 2016, no. 19, pp. 33–43.

[6] Dimitrienko Yu.I., Shpakova Yu.V., Bogdanov I.O., Sborshchikov S.V. *Inzhenernyy zhurnal: Nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, no. 12, pp. 14–54.

[7] Dimitrienko Yu.I., Bogdanov I.O. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 2, pp. 3–27.

[8] Dimitrienko Yu.I., Ivanov M.Yu. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2008, no. 1, pp. 39–56.

[9] Dimitrienko Yu.I., Levina A.I., Bozhenik P. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2008, no. 3, pp. 90–104.

[10] Dimitrienko Yu.I., Bogdanov I.O. *Inzhenernyy zhurnal: Nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, no. 3, pp. 17–38.

[11] Dimitrienko Yu.I. *Transport in porous media*, 1999, vol. 35, pp. 299–326.

[12] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. *European Journal of Mechanics/B-Fluids*, 2013, no. 1, pp.174–179.

[13] Wang J.G., Leung C.F., Chow Y.K. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2003, vol. 27, no. 7, pp. 565–583.

[14] Koponen A., Kandhai D., Hellen E., Alava M., Hoekstra A., Kataja M., Niskanen N., Sloot P., Timonen J., *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, no. 4, pp. 716–719.

[15] Auriault J.L, Royer P., Geindreau C. *International Journal of Engineering Science*, 2002, vol. 40, pp. 1151–1163.

[16] Orgéas L., Idrisl Z., Geindreau C., Bloch, J.F., Auriault, J.L. *Chemical Engineering Science*, 2006, vol. 61, pp. 4490–4502.

[17] Orgéas L., Geindreau C., Auriault J.L., Bloch, J.F., Auriault, J.L. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2007, vol. 145, pp. 15–29.

[18] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3–20.

[19] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 26–46.

[20] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2, pp. 3–23.

[21] Dimitrienko, Yu.I. Li S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018. № 2. pp. 70–95.

[22] Dimitrienko Yu.I. *Nelineinaya mekhanika sploshnoi sredy* [Nonlinear Continuum Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 624 p.

[23] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics. Vol. 2. Universal laws of continuous media mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.

[24] Dimitrienko Yu.I. *Tensor analysis and nonlinear tensor functions*. Springer, 2002, 662 p.

[25] Bird R.B, Armstrong R.C., Hassager O. *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics*. John Wiley & Sons Publ., 1987, 649 p.

[26] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z., *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Publ., 2005, 733 p.

Dimitrienko Y.I., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Director of Research and Education Center of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com.

Li Sh., post-graduate Student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: shuguangli2008@gmail.com.