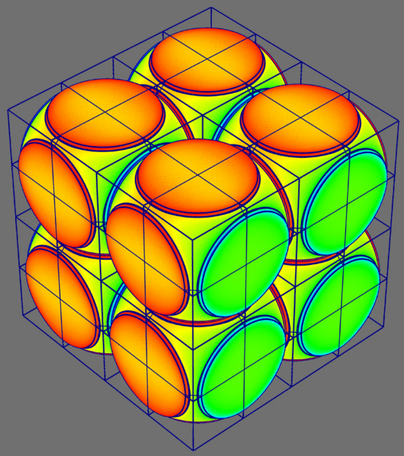
ISSN 2309-3684

Математическое моделирование и численные методы



УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-3-318

Моделирование эффектов связанности в задаче об импульсном нагружении термоупругих сред

© А.А. Валишин[1], Э.М. Карташов[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Россия
[2]МИРЭА Российский технологический университет.
Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова

Деформирование твердых тел под действием нестационарного, внешнего, механического, температурного или иного воздействия сопровождается обратным термодинамическим эффектом выделения добавочной теплоты вследствие внутреннего трения, т.е. изменением температурного поля. Это вызывает дополнительные деформации, что, в свою очередь, также приводит к выделению теплоты. Этот эффект взаимодействия механического и температурного полей получил название «эффект связности». Следствие этого эффекта — появление тепловых потоков, приводящих к увеличению энтропии термодинамической системы и термоупругому рассеянию энергии. Цель работы — изучить влияние взаимодействия деформационного и температурного полей для различных материалов. Для традиционных материалов, таких как металлы и стекло, термодинамический эффект взаимодействия деформационного и температурного полей незначителен и им принято пренебрегать при расчете, проектировании и эксплуатации конструкций. Для некоторых полимерных материалов семейства поливинилацеталей этот эффект оказывается существенным, его необходимо учитывать при создании на их основе композиционных материалов и при проектировании из них изделий и конструкций. Рассмотрена динамическая связанная задача термоупругости для упругого слоя из различных конструкционных, потребительских и строительных материалов при быстром приложении к теплоизолированным поверхностям нормальной сжимающей нагрузки. Показано, что для стекла и стали повышение температуры вследствие взаимодействия деформационного и температурного полей действительно крайне незначительно и составляет 0,180–0,183 К (или 0,061–0,062 %). Для полимеров, прежде всего, из класса поливинилацеталей он является существенным, и пренебрегать им уже нельзя.

Ключевые слова: *термоупругость, динамическая задача, связанность полей деформации и температуры, стекло, сталь, бетон, железобетон, стеклопластики, поливинилацетали*

Введение. Известно, что в соответствии с законами термодинамики деформирование твердого тела сопровождается изменением его температуры. В неоднородных по физическим свойствам материалах или при неоднородном внешнем воздействии поле деформаций и напряжений неоднородно, и возникающее в процессе деформирования температурное поле также неоднородно. Оно, в свою очередь, приводит к появлению дополнительных деформаций вследствие теплового расширения, а это вызывает новое повышение температуры и т. д. Возникают тепловые потоки, обусловливающие увеличение энтропии деформируемого тела и, следовательно, термоупругое рассеяние энергии [1].

Для того чтобы учесть это, в определяющие соотношения динамической термоупругости вводят слагаемые, отражающие термодинамический эффект взаимодействия полей деформации и температуры [1]. Это так называемый эффект связанности. В большинстве реальных случаев эффект связанности полей деформации и температуры обычно мало влияет на распределение напряжений, деформаций и температуры. Однако подобное положение не сохраняется для некоторых полимерных материалов, например поливинилацеталей. Поливинилацетали — твердые аморфные полимеры, применяемые при изготовлении безосколочных стекол триплекс, используемых в автомобиле- и самолетостроении. Материалы широко используют также в производстве электроизоляционных материалов. Поливинилацетали, как будет показано далее, обладают большим значением параметра связанности. Однако иногда даже и при небольшой связанности полей деформаций и температур ее нужно учитывать, поскольку зачастую обнаруживаются новые качественные особенности явления [2]. Например, при деформировании тела от механических или тепловых воздействий, протекающих с большой скоростью (механический или тепловой удар), необходимо учитывать взаимодействие полей деформации и температуры. Оно проявляется в образовании и движении тепловых потоков внутри тела, возникновении связанных упругих и тепловых волн, термоупругом рассеянии энергии и т. п.

Эффект взаимодействия механического и температурного полей играет важную роль при исследовании свойств композиционных материалов и проектировании конструкций из них, предназначенных для эксплуатации в сложных температурных условиях [3–21]. Элементы таких конструкций подвергаются неравномерному нестационарному тепловому воздействию, при котором изменяются физико-механические свойства материалов и возникают градиенты температуры, сопровождающиеся неодинаковым тепловым расширением частей элементов.

Исследования эффекта связанности полей деформации и температуры начаты сравнительно недавно — с 1970-х годов. Несмотря на линейность связанных динамических задач термоупругости (при малых термических возмущениях $(T-T_0)/T_0 \ll 1$), нахождение аналитических решений этих задач представляет собой сложную математическую проблему и даже в простейших случаях речь может идти лишь о приближенных аналитических решениях для больших или малых временных промежутков. Исследовать более сложные случаи, а также рассчитывать реальные конструкции необходимо с применением численных методов.

Связанные уравнения динамической термоупругости. Вначале кратко изложим основные теоретические факты [1, 2, 22].

Для учета термодинамического эффекта взаимодействия механического и температурного полей в определяющие соотношения динамической термоупругости вводят слагаемые, отражающие термодинамический эффект взаимодействия полей деформации и температуры [1, 2].

Рассмотрим некоторую область $\Omega = \left(M(x, y, z) \in D, t > 0 \right)$ среды. Будем считать, что при некоторой заданной температуре T_0 и отсутствии внешних сил тело находится в недеформированном состоянии тела. Если тело находится при температуре T, отличной от T_0, то даже при отсутствии внешних сил оно будет деформироваться вследствие теплового расширения. Если сопровождающее деформацию изменение температуры $T - T_0$ не слишком велико, то локальную плотность свободной энергии можно записать в виде [22]:

$$F(\varepsilon_{ij}(M,t), T(M,t)) = F_0(\varepsilon_{ij}(M,t), T(M,t)) +$$
$$+ \mu\left(\varepsilon_{ij}(M,t) - \frac{1}{3}\delta_{ij} e(M,t) \right) + \frac{1}{6}\left(3\lambda + 2\mu\right) e^2(M,t) -$$
$$- \frac{1}{3}\left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha_T \left(T(M,t) - T_0 \right) e(M,t), \tag{1}$$

где $\varepsilon_{ij}(M,t)$ — тензор деформаций; δ_{ij} — единичный тензор (символ Кронекера); $e\,(M,t) = e_{11}(M,t) + e_{22}(M,t) + e_{33}(M,t)$ — след тензора деформаций (определяет деформацию всестороннего сжатия (растяжения); λ, μ — коэффициенты Ламе; α_T — коэффициент объемного теплового расширения тела.

Дифференцируя свободную энергию F по деформациям $\varepsilon_{ij}(M,t)$, получим определяющее соотношение линейной теории изотропной термоупругости (обобщенный закон Гука) [1, 2, 22]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda e \delta_{ik} - \frac{1}{3}\left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha_T\,(T - T_0)\,\delta_{ij}. \tag{2}$$

Последнее слагаемое здесь как раз и отражает появление дополнительных напряжений вследствие изменения температуры. Напряжения σ_{ij}, деформации ε_{ij}, e и температура T считаются зависящими от точки M, т. е. от пространственных координат x, y, z и от времени t. Добавим сюда уравнения движения [1, 2, 22]:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \tag{3}$$

где u_i — компоненты вектора перемещений точек среды $\vec{u} = = (u_x, u_y, u_z)$. В правой части, как принято в тензорном исчислении и механике сплошной среды, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. Пространственные координаты понимаются как $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Подставим физическое определяющее уравнение (2) в уравнение движения (3). Тогда уравнение движения в перемещениях будет выглядеть так:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\Delta\vec{u} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} - \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\alpha_T\,\mathrm{grad}\,T. \qquad (4)$$

Добавим уравнение теплопроводности, которое для рассматриваемого случая имеет вид [23]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\,\Delta T - 3k\,T_0 \frac{\partial e}{\partial t}, \qquad (5)$$

где α — коэффициент температуропроводности материала; k — безразмерный параметр, зависящий от упругих и теплофизических свойств материала,

$$k = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\alpha_T}{\rho c} = \frac{E}{3(1-2\nu)}\frac{\alpha_T}{\rho c}. \qquad (6)$$

Здесь E — модуль Юнга материала; ν — коэффициент Пуассона;

$$\alpha = \frac{\lambda}{c\rho}, \qquad (7)$$

где λ — коэффициент теплопроводности; c — удельная теплоемкость; ρ — плотность материала.

Уравнение (5) — неоднородное уравнение. Выражение в правой части формулы (5) играет роль внешнего источника теплоты. Видно, что интенсивность этого источника, т. е. производство теплоты, определяется скоростью изменения деформации.

Применим к уравнению движения (4) операцию дивергенции, учтем при этом, что

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0, \qquad (8)$$

получим

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = v^2 \Delta e - kc\Delta T. \qquad (9)$$

Параметр v — скорость распространения упругих волн;

$$v = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \tag{10}$$

Уравнение (9) — неоднородное уравнение гиперболического типа (волновое уравнение). Это означает, что объемная деформация сжатия-растяжения распространяется в теле как волна со скоростью v. Второе слагаемое в правой части играет роль внешней вынуждающей силы в этом процессе, и ее вклад определяется безразмерным параметром связности k и распределением температуры.

Оценка коэффициента упругой связанности для различных материалов. Для того чтобы более четко отразить это влияние, скомбинируем уравнения теплопроводности (5) и движения (9) и получим

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = \upsilon^2 \Delta e - \frac{kc}{a}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + 3kT_0 \frac{\partial e}{\partial t}\right). \tag{11}$$

Видно, что внешняя вынуждающая сила (второе слагаемое) определяется тремя факторами: упругими и теплофизическими свойствами материала, скоростью изменения температуры и скоростью изменения объемной деформации. Безразмерный параметр k определяет механические и теплофизические свойства материала. Оценим его для некоторых распространенных материалов. Механические и теплофизические характеристики этих материалов приведены в табл. 1.

Вычисленные по формуле (6) значения безразмерного параметра связанности k приведены далее в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что по параметру k выделяются поливинилацетали и бетон. Использование уравнений (5) и (11) предполагает одновременное определение полей температуры и деформации.

Уравнение (11) определяет волну расширения (сжатия) и показывает связь этой волны с температурой. Из уравнения (11) следует, что распространение волны расширения (сжатия) вызвано выработкой теплоты. Механическая энергия волны расширения частично переходит в тепловую, что и приводит к повышению температуры. Соотношения (5) и (11) раскрывают физическую суть эффекта взаимодействия механического и температурного полей (эффекта связанности). В то же время необходимо отметить, что во всех случаях возникновения чисто температурных напряжений количество подводимой к телу извне теплоты значительно больше того, что создается деформационным процессом. Например, в металлических телах деформация упругого тела вызывает малое изменение его температуры, отсюда в практических расчетах учет эффекта связанности имеет значение не столько для задач о тепловых напряжениях, сколько для задач о термоупругом рассеянии энергии. Но, как видно из табл. 2, подобное положение не соответствует полимерным материалам, прежде всего, поливинилацеталям.

Таблица 1

Материал	Константы Ламе, Н/м^2		Модуль Юнга E, Н/м^2	Коэффициент Пуассона, ν	Удельная теплоемкость c, Дж/(кг·К)	Коэффициент линейного расширения α_T, К$^{-1}$	Плотность ρ, кг/м^3	Коэффициент тепло-проводности λ_T, Вт/(м·К)	Коэффициент температуро-проводности α, м^2/с
	λ	μ							
Стекло	$0{,}48\cdot10^{11}$	$0{,}29\cdot10^{11}$	$0{,}7\cdot10^{11}$	0,25	$0{,}833\cdot10^{3}$	$2{,}7\cdot10^{-5}$	$2{,}55\cdot10^{3}$	1,15	$3{,}4\cdot10^{-7}$
Сталь	$1{,}26\cdot10^{11}$	$0{,}84\cdot10^{11}$	$2{,}06\cdot10^{11}$	0,3	$0{,}46\cdot10^{3}$	$3{,}5\cdot10^{-5}$	$7{,}7\cdot10^{3}$	52	$1{,}172\cdot10^{-5}$
Полиметил-метакрилат (ПММА)	$0{,}0242\cdot10^{11}$	$0{,}0104\cdot10^{11}$	$0{,}028\cdot10^{11}$	0,35	$1{,}47\cdot10^{3}$	$6\cdot10^{-5}$	$1{,}15\cdot10^{3}$	0,162	$0{,}096\cdot10^{-6}$
Поливинил-формаль	$5{,}71\cdot10^{9}$	$2{,}86\cdot10^{9}$	$4\cdot10^{9}$	0,4	$0{,}108\cdot10^{3}$	$5{,}4\cdot10^{-5}$	$1{,}24\cdot10^{3}$	0,271	$2{,}024\cdot10^{-6}$
Поливинил-этилаль	$5{,}71\cdot10^{9}$	$2{,}86\cdot10^{9}$	$4\cdot10^{9}$	0,4	$0{,}108\cdot10^{3}$	$5{,}4\cdot10^{-5}$	$1{,}35\cdot10^{3}$	0,271	$1{,}86\cdot10^{-6}$
Поливинил-формаль-этилаль	$4{,}57\cdot10^{9}$	$2{,}28\cdot10^{9}$	$3{,}2\cdot10^{9}$	0,4	$0{,}108\cdot10^{3}$	$5{,}4.10^{-5}$	$1{,}20\cdot10^{3}$	0,271	$2{,}09\cdot10^{-6}$
Поливинил-бутираль	$3{,}14\cdot10^{9}$	$1{,}57\cdot10^{9}$	$2{,}2\cdot10^{9}$	0,4	$0{,}108\cdot10^{3}$	$9{,}2\cdot10^{-5}$	$1{,}10\cdot10^{3}$	0,271	$2{,}28\cdot10^{-6}$
Поливинил-бутираль-фурфураль	$3{,}43\cdot10^{9}$	$1{,}71\cdot10^{9}$	$2{,}4\cdot10^{9}$	0,4	$0{,}108\cdot10^{3}$	$13{,}10^{-5}$	$1{,}05\cdot10^{3}$	0,271	$2{,}39\cdot10^{-6}$
Полиэтилен низкой плотности	$3{,}025\cdot10^{8}$	$2{,}59\cdot10^{8}$	$3{,}5\cdot10^{8}$	0,35	$2{,}15\cdot10^{3}$	$9{,}73\cdot10^{-5}$	$0{,}935\cdot10^{3}$	0,425	$0{,}211\cdot10^{-6}$
Полиэтилен высокой плотности	$5{,}83\cdot10^{8}$	$5\cdot10^{8}$	$6{,}75\cdot10^{8}$	0,35	$2{,}15\cdot10^{3}$	$9{,}73\cdot10^{-5}$	$0{,}935\cdot10^{3}$	0,425	$0{,}211\cdot10^{-6}$

Окончание табл. 1

Материал	Константы Ламе, Н/м^2		Модуль Юнга E, Н/м^2	Коэффициент Пуассона, ν	Удельная теплоемкость c, Дж/(кг·К)	Коэффициент линейного расширения α_T, К$^{-1}$	Плотность ρ, кг/м^3	Коэффциент тепло-проводности λ_T, Вт/(м·К)	Коэффициент температуро-проводности α, м^2/с
	λ	μ							
Полистирол	$2{,}59\cdot10^9$	$2{,}22\cdot10^9$	$3{,}10^9$	0,35	$1{,}38\cdot10^3$	$8{,}78\cdot10^{-5}$	$1{,}06\cdot10^3$	0,130	$0{,}99\cdot10^{-2}$
Поли-пропилен	$1{,}60\cdot10^9$	$1{,}07\cdot10^9$	$1{,}47\cdot10^9$	0,375	$1{,}93\cdot10^3$	$15{,}99\cdot10^{-5}$	$0{,}905\cdot10^3$	0,202	$0{,}096\cdot10^{-6}$
Бетон	$0{,}66\cdot10^{12}$	$2{,}56\cdot10^{12}$	$3{,}10^{12}$	0,17	$1{,}13\cdot10^3$	$0{,}99\cdot10^{-5}$	$(0{,}15\ldots0{,}6)\cdot10^3$	0,7	$1{,}65\cdot10^{-6}$
Железобетон	$1{,}08\cdot10^{10}$	$2{,}43\cdot10^{10}$	$(1{,}8\ldots4{,}2)\cdot10^{10}$ $(1{,}07\ldots2{,}64)\cdot10^{10}$	0,235	$0{,}84\cdot10^3$	$1{,}19\cdot10^{-5}$	$4{,}10^3$	1,7	$0{,}506\cdot10^{-6}$
Кирпич силикатный	$0{,}114\cdot10^{10}$	$0{,}228\cdot10^{10}$	$(0{,}27\ldots0{,}3)\cdot10^{10}$	0,25	$0{,}88\cdot10^3$	$0{,}98\cdot10^{-5}$	$(1{,}8\ldots1{,}95)\cdot10^3$	(0,7…0,8)	$5{,}2\cdot10^{-7}$
Стекло-пластик волокнистый	$3{,}46\cdot10^{10}$	$4{,}62\cdot10^{10}$	$(5\ldots7)\cdot10^{10}$	0,3	$0{,}83\cdot10^3$	$(0.5\ldots1{,}2)\cdot10^{-5}$	$1{,}8\cdot10^3$	0,23	$1{,}6\cdot10^{-7}$

Таблица 2

Материал	k	δ ($T_0 = 293$ K)	$M_0 - 1$ ($T_0 = 293$ K, $P_0 = 0{,}981$ Н/м^2)	ΔT, K	$\Delta T/T_0$, %
Стекло	0,593	0,00718	0,01426	0,74016	0,253
Сталь	1,693	0,02487	0,0323	1,293	0,441
Полиметилметакрилат (ПММА)	0,110	0,00401	0,0034234	1,999	0,682
Поливинилформаль	2,69	0,099	0,045	20,5	6,99
Поливинилэтилаль	2,47	0,0912	0,042	17,5	6,056
Поливинилформальэтилаль	2,22	0,082	0,038	21,52	7,34
Поливинилбутираль	2,84	0,18	0,076	36,72	12,53
Поливинилбутиральфурфураль	4.58	0.41	0.14	45.59	15.56
Полиэтилен низкой плотности	0,019	0,0011	0,00094182	2,713	0,926
Полиэтилен высокой плотности	0,0363	0,00215	0,0018389	2,747	0,937
Полистирол	0,2	0,01068	0,009057	3,373	1,151
Полипропилен	0,18	0,01855	0,01214	5,066	1,729
Бетон	23,08	0,189	0,0796	0,2169	0,074
Железобетон	0,067	0,000377	0,0008499	0,233	0,0795
Кирпич	0,01128	0,000053982	0,0001079	0,379	0,129
Стеклопластик	0,28	0,00129	0,00172	0,33	0,113

Динамическая связанная задача термоупругости для слоя. Рассмотрим динамическую связанную задачу термоупругости для упругого слоя $|z| \le l$ при мгновенном приложении к теплоизолированным поверхностям $|z| = l$ нормальной сжимающей силы интенсивности P_0. При этих условиях реализуется случай одномерного движения, когда $u_x = u_y = 0$, $u_z = u_z(z,t)$, $T = T(z,t)$, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0.$ Преобразуя формулу (2), получим

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{zz} - \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}\alpha_T\left(T(z,t) - T_0\right). \tag{12}$$

Выполним в формуле (2) свертку и выразим объемную деформацию

$$e = \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma}{3\lambda + 2\mu} + 3\alpha_T\left(T(z,t) - T_0\right). \tag{13}$$

Здесь $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ — след тензора напряжений (сумма нормальных напряжений).

С учетом формулы (12) получим

$$\sigma = \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{zz} - \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}\alpha_T\left(T(z,t) - T_0\right). \tag{14}$$

Подставим данные в формулу (13) и получим

$$e = \varepsilon_{zz} = \frac{2\lambda}{(3\lambda + 2\mu)(\lambda + 2\mu)}\sigma_{zz} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\alpha_T\left(T(z,t) - T_0\right). \tag{15}$$

Вернемся теперь к уравнению (11) и перепишем его с учетом того, что в рассматриваемом случае $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$, $e = \varepsilon_{zz}(z,t)$, $\Delta e = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial z^2}$. Получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial z^2} - \frac{kc}{a}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + 3kT_0\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t}\right). \tag{16}$$

Подставляем в это уравнение формулу (15)

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}(z,t)}{\partial z^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \sigma_{zz}(z,t)}{\partial t^2} = 3k\frac{c\rho^2}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial t^2},\ |z| < l,\ t > 0, \tag{17}$$

где k — введенный в формуле (6) безразмерный параметр связности.

Подставив (15) в уравнение теплопроводности (5), с учетом формулы (15) (в данном случае $\Delta T = \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$), получим

$$(1+\delta)\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} - \frac{3kT_0}{\lambda+2\mu}\frac{\partial \sigma_{zz}(z,t)}{\partial t},\ |z|<l,\ t>0, \tag{18}$$

где δ — безразмерный параметр, зависящий от исходной температуры

$$\delta = k\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha_T T_0 = k\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T T_0. \tag{19}$$

Значения параметра связности δ для всех обследованных нами материалов приведены в табл. 2, из которой видно, что по этому показателю снова заметно выделяются поливинилацетали.

К уравнениям (17)–(18) присоединим краевые условия

$$\begin{gathered} \sigma_{zz}\big|_{t=0} = \frac{\partial \sigma_{zz}(z,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,\ \ T\big|_{t=0} = T_0 \quad |z| \le l; \\ \sigma_{zz}\big|_{|z|=l} = -P_0,\ \ \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{|z|=l} = 0,\ \ t>0. \end{gathered} \tag{20}$$

Введем безразмерные переменные [23]:

$$\begin{aligned} &\xi = \frac{vz}{a};\ \xi_0 = \frac{vl}{a};\ \tau = \frac{v^2 t}{a};\ \sigma_0 = \frac{P_0(1-\nu)}{E}; \\ &W(\xi,\tau) = \alpha_T(T(z,t)-T_0); \\ &\sigma_{zz}(\xi,\ \tau) = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{zz}(z,t). \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь вместо коэффициентов Ламе λ и μ использованы технические упругие характеристики — модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν, в ряде случаев более удобные. Их значения приведены в табл. 1.

Запишем исходную задачу в выражениях (17), (18) в безразмерных переменных (ξ,τ):

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{zz}(\xi,\tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W(\xi,\tau)}{\partial \tau^2} \quad |\xi| < \xi_0,\ \tau>0; \tag{22}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{zz}(\xi,\tau)\big|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{zz}(\xi,\tau)}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = 0,\ \ |\xi| \le \xi_0; \\ \sigma_{zz}(\xi,\tau)\big|_{|\xi|=\xi_0} = -\sigma_0,\ \tau>0; \end{gathered} \tag{23}$$

$$\left(1+\delta\right)\frac{\partial W(\xi,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 W(\xi,\tau)}{\partial\xi^2}-\delta\frac{\partial\sigma_{zz}(\xi,\tau)}{\partial\tau},\ |\xi|<\xi_0,\ \tau>0; \qquad (24)$$

$$\left.\begin{array}{l} W(\xi,\tau)\big|_{\tau=0}=0,\ |\xi|\le\xi_0 \\ \left.\dfrac{\partial W(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{|\xi|=\xi_0}=0,\ \tau>0 \end{array}\right\}. \qquad (25)$$

Решения краевых задач (22)–(25) ищем в пространстве изображений по Лапласу $\overline{\Lambda}(\xi,p)=\int\limits_0^\infty \Lambda(\xi,\tau)e^{-p\tau}\,d\tau.$

Опуская длительную процедуру преобразований, приведем конечный результат операционного решения задачи:

$$\overline{W}(\xi,p)=\frac{\sigma_0\,\delta}{\overline{A}(p)}\left(k_1\,sh(k_1\,\xi_0)\,ch(k_2\,\xi)-k_2\,sh(k_2\,\xi_0)\,ch(k_1\,\xi)\right); \qquad (26)$$

$$\overline{\sigma}_{zz}(\xi,p)=\frac{\sigma_0}{p\,\overline{A}(p)}\left(\left(k_2^2-(1+\delta)\,p\right)k_1\,sh(k_1\,\xi_0)\,ch(k_2\,\xi)-\right.$$
$$\left.-\left(k_1^2-(1+\delta)\,p\right)k_2\,sh(k_2\,\xi_0)\,ch(k_1\,\xi)\right), \qquad (27)$$

где

$$\overline{A}(p)=(k_1^2-(1+\delta)\,p)\,k_2\,sh(k_2\xi_0)\,ch(k_1\xi_0)-$$
$$-(k_2^2-(1+\delta)\,p)\,k_1\,ch(k_2\xi_0)\,sh(k_1\xi_0); \qquad (28)$$

$$k_{1,2}=\sqrt{\frac{p}{2}}\left((1+p+\delta)\pm\sqrt{(1+p+\delta)^2-4p}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (29)$$

Для выяснения влияния эффекта связанности нет необходимости переходить к оригиналам в (26)–(27). Поэтому рассмотрим условие $t>>1$ после начала процесса. Находим из (26), применяя теорему о конечном значении [24],

$$\Delta T=\lim_{t\to\infty}\left(T(z,t)-T_0\right)=\frac{1}{\alpha_T}\lim_{p\to 0}p\overline{W}(\xi,p)=$$
$$=\frac{\delta P_0(1-2\nu)}{\alpha_T E(1+\delta)}=\frac{P_0}{\alpha_T E}\left(M_0-1\right). \qquad (30)$$

Здесь M_0 — безразмерный параметр, зависящий от начальной температуры (см. табл. 2) и определяемый по формуле

$$M_0 = 1 + \frac{\delta(1-2\nu)}{\nu(1+\delta)} \geq 1. \tag{31}$$

Далее из формулы (12) получаем

$$\lim_{t\to\infty} \sigma_{xx}(z,t) = \lim_{t\to\infty} \sigma_{yy}(z,t) = \frac{\nu}{1-\nu} \lim_{t\to\infty} \sigma_{zz}(z,t) -$$
$$-\frac{E\alpha_T}{1-\nu} \lim_{t\to\infty}\left(T(z,t)-T_0\right) = -\frac{\nu P_0}{1-\nu} M_0. \tag{32}$$

Так как

$$\sigma_{zz}(z,t)\Big|_{\delta=0} = \sigma_{yy}(z,t)\Big|_{\delta=0} = -\frac{\nu P_0}{1-\nu}, \tag{33}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} \sigma_{xx}(z,t) = \lim_{t\to\infty} \sigma_{yy}(z,t) = \sigma_{xx}(z,t)\Big|_{\delta=0} M_0 = \sigma_{yy}(z,t)\Big|_{\delta=0} M_0. \tag{34}$$

Коэффициент M_0, отличие его от единицы, как раз и характеризует повышение температуры (30) и увеличение напряжений (34), обусловленные связанностью полей деформации и температуры.

Результаты численных расчетов. Рассмотрим эффект связанности при внезапном приложении давления $P_0 = 0,981 \cdot 10^8$ Н/м^2 к упругим слоям из существенно разных материалов (см. табл.1).

Принимая $T_0 = 293$ К (20 °С), определяем для всех этих материалов по формуле (19) коэффициент связанности δ и по формулам (30) и (32) соответствующие величины ΔT и M_0. При учете связанности приращение температуры ΔT и увеличение напряжений σ_{xx} и σ_{yy} для всех обследованных материалов, за исключением поливинилацеталей, невелико, а для этих полимеров весьма существенно (см. табл. 2).

Безразмерный параметр k определен в формуле (6), безразмерные параметры δ и M_0 определены в формулах (19) и (31), параметр ΔT — приращение температуры измеряется в градусах Кельвина и рассчитывается по формуле (30).

Таким образом, если в стекле, металлах и строительных материалах эффект взаимодействия полей деформации и температуры мало влияет на термическое возмущение и температурные напряжения, то для полимерных материалов (поливинилацеталей) эффект связанности может играть существенную роль. Полимеры этого класса используют при создании некоторых композиционных материалов, поэтому эффект связанности в этом случае необходимо учитывать. Вслед за поливинилацеталями по рассмотренным показателям идут полипропилен, полистирол, полиэтилен. В заключение можно с уверенностью сказать, что чувствительными к эффекту связности механического и температурного полей являются прежде всего полимеры.

Выводы. Деформирование неоднородных материалов или конструкций, или неоднородное внешнее механическое или температурное воздействие сопровождается термодинамическим эффектом взаимодействия деформационного и температурного полей (эффект связности этих полей), следствием которого является локальное выделение добавочной теплоты и неоднородное повышение температуры.

Для многих традиционных конструкционных, потребительских и строительных материалов термодинамический эффект взаимодействия деформационного и температурного полей незначителен и им принято пренебрегать при расчете, проектировании и эксплуатации конструкций.

Показано, что для полимерных материалов прежде всего из класса поливинилацеталей термодинамический эффект взаимодействия является существенным. Его необходимо учитывать при создании композиционных материалов на их основе, при проектировании изделий и конструкций из них.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карташов Э.М. Термодинамические аспекты термоупругости с учетом конечной скорости распространения тепла. Известия АН, Энергетика, 2004, № 4, с.146–159.

[2] Коваленко А.Д. *Основы термоупругости.* Киев, Наукова Думка, 1970, 308 с.

[3] Dimitrienko Yu.I**.** Heat- mass-transport and thermal stresses in porous charring materials. *Journal of Transport in Porous Media*,1997, vol. 27, № 2, pp. 143–170.

[4] Dimitrienko Yu.I. Modelling of mechanical properties of composite materials under high temperatures. Part 1. Matrix and fibres*. Int. Journal of Applied Composite Materials*,1997, vol. 4, № 4, pp. 219–237.

[5] Dimitrienko Yu.I**.** Modelling of mechanical properties of composite materials under high temperatures. Part 2. Unidirectional composites. *Int. Journal of Applied Composite Materials*, 1997, vol. 4, № 4, pp. 239–261.

[6] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanical behaviour of composite materials and structures under high temperatures. Part 1. Materials. Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1997, vol. 28A, pp. 453–461.

[7] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanical behaviour of composite materials and structures under high temperatures. Part 2. Structures. Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1997, vol. 28A, pp. 463–471.

[8] Dimitrienko Yu.I. Effect of finite deformations on heat-mass transfer in elastomer ablating materials. *Int. Journal of Heat Mass Transfer*, 1997, vol. 40, № 3, pp. 699–709.

[9] Dimitrienko Yu.I. Internal heat-mass-transfer and stresses in thin-walled structures of ablating materials. *Int. Journal of Heat Mass Transfer*, 1997, vol. 40, № 7, pp. 1701–1711.

[10] Dimitrienko Yu.I. Mechanics of porous media with phase transformations and periodical structure. Part 1. Method of asymptotic averaging. *European Journal of Mechanics. A: Solids*, 1998, vol. 17, № 2, pp. 305–322.

[11] Dimitrienko Yu.I. Mechanics of porous media with phase transformations and periodical structure. Part 2. Solutions of Local and Global Problems. *European Journal of Mechanics. A: Solids*,1998, vol. 17, № 2, pp. 323–337.

[12] Dimitrienko Yu.I**.** Modelling of mechanical properties of composite materials under high temperatures. Part 3. Textile composites. *Int. Journal of Applied Composite Materials*,1998, vol. 5, № 4, pp. 257 –272.

[13] Dimitrienko Yu.I. A structural thermomechanical model of textile composite materials at high temperatures. *Composite science and technologies*, 1999, vol. 59, pp. 1041–1053.

[14] Dimitrienko Yu.I. Modelling of carbon — carbon composite manufacturing processes. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1999, vol. 30A, pp. 82–86.

[15] Dimitrienko Yu.I. Dynamic transport phenomena in porous polymer materials under impulse thermal effects. *Journal of Transport in Porous Media*, 1999, vol. 35, № 2, pp. 69–75.

[16] Dimitrienko Yu.I. Thermomechanical behaviour of composites under local intense heating by irradiation. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2000, vol.31A, pp. 591–598.

[17] Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Корепанов А.С. Численное моделирование термонапряжений и тепломассопереноса в оболочечных композитных конструкциях при локальном лазерном нагреве. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2005, № 1, с. 102–116.

[18] Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е.К. Моделирование термомеханических процессов в композитных оболочках при локальном нагреве излучением. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2011, № 1, т. 17,-с. 71–91.

[19] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V., Syzdykov E.K. Modeling of the thermomechanical processes in composite shells in local radiation heating. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2011, vol. 2, pp. 147–169.

[20] Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е.К. Моделирование внутреннего тепломассопереноса и термонапряжений в композитных оболочках при локальном нагреве. *Математическое моделирование*, 2011, т. 23, № 9, с. 14–32.

[21] Валишин А.А., Карташов Э.М. Математическое моделирование термических напряжений в твердом теле с внутренней трещиной. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 3, с. 3–21.

[22] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория упругости*. Москва, Наука, 1968, 215 с.

[23] Карташов Э.М. Аналитические решения гиперболических моделей нестационарной теплопроводности. *Тонкие химические технологии*, 2018, т. 13, № 2, с. 81–90.

[24] Карташов Э.М. *Аналитические методы в теплопроводности твердых тел*. Москва, Высшая школа, 2001, 540 с.

Статья поступила в редакцию 23.07.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Валишин А.А., Карташов Э.М. Моделирование эффектов связанности в задаче об импульсном нагружении термоупругих сред. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 3, с. 3–18.

Валишин Анатолий Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. e-mail: enf@mail.ru

Карташов Эдуард Михайлович — д-р физ.-мат. наук, профессор, заслуженный деятель науки, профессор кафедры «Высшая и прикладная математика» МИРЭА Российский технологический университет. Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова.

Modeling of coupling effects in the problem of pulsed loading of thermoelastic media

A.A. Valishin[1], E.M. Kartashov[2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, 105005, Russia
[2]MIREA Russian University of technology. M. V. Lomonosov Moscow Institute of Fine Chemical Technology, Moscow, 119571, Russia

Deformation of solids under the action of non-stationary external mechanical, thermal or other effects is accompanied by the inverse thermodynamic effect of the release of additional heat due to internal friction, i.e. a change in the temperature field. This causes additional deformation, which in turn leads to the release of heat. This effect of the interaction of mechanical and temperature fields is called the connectivity effect. The consequence of this effect is the appearance of heat fluxes leading to an increase in the entropy of the thermodynamic system and thermoelastic energy dissipation. The purpose of the work is to study the influence of the interaction of deformation and temperature fields for different materials. For "classical" materials, such as metals and glass, the thermodynamic effect of the interaction of deformation and temperature fields is insignificant and it is usually neglected in the calculation, design and operation of structures. For some polymer materials such as various polyvinylacetals, this effect is significant; it must be taken into account when creating composite materials on their basis and when designing products and structures of them. A dynamic coupled problem of thermoelasticity for an elastic layer of various structural, consumer and construction materials under rapid application of a normal compressive load to thermally insulated surfaces is considered. It is shown that for glass and steel temperature increasing due to the interaction of the deformation and temperature fields being really negligible is 0.180–0.183 K (or 0.061–0.062 %). For polymers, first of all, from the class of polyvinylacetals, it is substantial, and it can no longer be neglected.

Keywords: *thermoelasticity, dynamic problem, coupling of deformation and temperature fields, glass, steel, concrete, reinforced concrete, fiberglass, polyvinylacetals*

REFERENCES

[1] Kartashov E.M. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2004, no. 4, pp. 146–159.

[2] Kovalenko A.D. *Osnovy termouprugosti* [Fundamentals of thermoelasticity]. Kiev. Naukova Dumka Publ., 1970, 308 p.

[3] Dimitrienko Yu.I. *Journal of Transport in Porous Media*, 1997, vol. 27, no 2, pp. 143–170.

[4] Dimitrienko Yu.I. *International Journal of Applied Composite Materials*, 1997, vol, 4, no. 4, pp. 219–237.

[5] Dimitrienko Yu.I. *International Journal of Applied Composite Materials,* 1997, vol. 4, no. 4, pp. 239–261.

[6] Dimitrienko Yu.I. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1997, vol. 28A, pp. 453–461.

[7] Dimitrienko Yu.I. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1997, vol. 28A, pp. 463–471.

[8] Dimitrienko Yu.I. *International journal of heat and mass transfer*, 1997, vol.40, no. 3, pp. 699–709.

[9] Dimitrienko Yu.I. *International journal of heat and mass transfer*, 1997, vol. 40, no. 7, pp. 1701–1711.

[10] Dimitrienko Yu.I. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 1998, vol. 17, no. 2, pp. 305–322.

[11] Dimitrienko Yu.I. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 1998, vol. 17, no. 2, pp. 323–337.

[12] Dimitrienko Yu.I**.** *International Journal of Applied Composite Materials,* 1998, vol. 5, no. 4, pp. 257–272.

[13] Dimitrienko Yu.I. *Composites Science and Technology*, 1999, vol. 59, pp. 1041–1053.

[14] Dimitrienko Yu.I. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1999, v. 30A, pp. 82–86.

[15] Dimitrienko Yu.I. *Journal of Transport in Porous Media*, 1999, vol. 35, no. 2, pp. 69–75.

[16] Dimitrienko Yu.I. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2000, v. 31A, pp. 591–598.

[17] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V., Korepanov A.S. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2005, no. 1, pp. 102–116.

[18] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V, Syzdykov E.K. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii –Mechanics of composite materials and structures*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 71–91.

[19] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V., Syzdykov E.K. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2011, vol. 2, pp. 147–169.
DOI: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v2.i2.50

[20] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V, Syzdykov E.K. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2011, vol. 23, no. 9, pp. 14–32.

[21] Valishin A. A Kartashov E. M. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 3 (16), pp. 3-21

[22] Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moskva, Nauka Publ., 1968, 215 p.

[23] Kartashov E.M. *Tonkie himicheskie tehnologii — Fine chemical technology*, 2018, vol.13, no. 2, pp. 81–90.

[24] Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in the thermal conductivity of solids]. Moscow, *Vysshaya shkola publ.,* 2001, 540 p.

Valishin A.A., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail enf@mail.ru

Kartashov E.M., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Honored Worker of Science and Engineering of the Russian Federation, Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, MIREA Russian University of technology. M.V. Lomonosov Moscow Institute of Fine Chemical Technology.