ISSN 2309-3684

Математическое моделирование и численные методы

УДК 519.8

Вероятностные модели двухсторонних боевых действий с линейными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя при упреждающем ударе одной из них

© В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе теории непрерывных марковских процессов разработаны модели двухсторонних боевых действий с линейными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя при упреждающем ударе одной из них. Разработан алгоритм, позволяющий вычислить основные показатели боя. Проведено сравнение с результатами моделирования боя, полученными на основе вероятностных моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями и моделью динамики средних с линейными авиcимостями эффективных скорострельностей от времени боя. Исследовано влияние упреждающего удара одной из противоборствующих сторон на исход и основные показатели боя.

Ключевые слова: *непрерывный марковский процесс, вероятностные модели двухсторонних боевых действий, эффективная скорострельность, упреждающий удар*

Введение. При создании новых технических устройств возникает, как правило, необходимость построения математической модели функционирования устройства с целью оценки его работоспособности [1–2]. Основой оценки разрабатываемых образцов вооружения и военной техники являются показатели их боевой эффективности, так как они позволяют оценить степень приспособленности данного образца к решению конкретных боевых задач [3–6]. В качестве основы такой оценки необходимо использование моделей двухсторонних боевых действий, так как они в конечном итоге позволяют более достоверно учесть большее число факторов, влияющих на эффективность в реальных боевых условиях, чем модели без учёта ответного огня [7–9]. А поскольку бой является стохастическим процессом, в качестве основы такой оценки целесообразно использовать вероятностные модели боевых действий, так как они позволяют описать процесс протекания боя со значительно большей степенью точности и полноты, чем детерминированные модели (модели динамики средних) [10–11].

Одним из возможных методов построения вероятностной модели двухсторонних боевых действий является применение теории непрерывных марковских процессов [12]. Процесс, протекающий в системе, называется марковским, если в каждый момент времени вероятности любых состояний системы в будущем зависит только от её состояния в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в данное состояние [13].

Последовательность выстрелов, осуществляемых каждой участвующей в бою единицей, представляется в виде пуассоновского потока событий [4]. Используется также приём, заключающийся в переходе от потока выстрелов к потоку успешных выстрелов, который также считается пуассоновским. Выстрел назовём успешным, если он поражает боевую единицу противника [3].

Пусть в начале боя сторона X имеет m однотипных боевых единиц, а сторона Y имеет n также однотипных боевых единиц, не обязательно однородных с единицами стороны X.

Введём следующие обозначения: p_x, p_y — вероятности поражения боевой единицы противника одним выстрелом единицы сторон X и Y соответственно, λ_x, λ_y — практические скорострельности боевых единиц сторон X и Y соответственно, величины $v = p_x\lambda_x$ и $u = p_y\lambda_y$ назовём эффективными скорострельностями боевых единиц сторон [14–15].

В настоящее время разработаны марковские модели двухсторонних боевых действий различных по численности группировок [16–17]. Однако большинство из них имеет довольно существенный недостаток — эффективные скорострельности боевых единиц сторон полагаются в течение всего боя постоянными (то есть $v = const, u = const$), что не всегда приемлемо при отображении реальных боевых действий. Так, например, анализ боевых действий противотанковой обороны, осуществляемой различными противотанковыми средствами, показывает, что во время боя эффективные скорострельности единиц как наступающей, так и обороняющейся сторон, существенно увеличиваются. При атаке группировки танков происходит сближение сторон, приводящее к уменьшению дальности стрельбы, в результате чего существенно возрастает точность стрельбы танковых и противотанковых орудий. Также при уменьшении дальности стрельбы при небольших скоростях противотанковых управляемых ракет (ПТУР) существенно уменьшается время полёта ракеты до цели, что приводит к значительному повышению скорострельности (при больших скоростях ПТУР это проявляется в меньшей степени). Поскольку использование моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями боевых единиц сторон может привести к довольно существенным ошибкам в вычислении основных показателей боя, в настоящей статье принята попытка устранить этот недостаток.

Описание процесса протекания боя. Основные математические зависимости и формулы. Проведённые теоретические исследования, а также экспериментальные данные показали, что во многих боевых ситуациях необходимо учитывать изменение эффективных скорострельностей боевых единиц сторон в течение боя. В ряде случаев их хорошей аппроксимацией являются линейные функции времени боя, то есть

$$\begin{cases} v = k_x\left(1 + a_x t\right) \\ u = k_y\left(1 + a_y t\right) \end{cases}. \tag{1}$$

Полагаем, что противоборствующие стороны имеют полную и не запаздывающую информацию о состоянии боевых единиц противника (поражены или нет) и ведут огонь только по уцелевшим единицам.

Также считаем, что хорошая маскировка боевых единиц стороны X позволяет им в течение времени t_c вести огонь по противнику, не испытывая ответного противодействия. Тогда в течение времени t_c процесс протекания боя опишется системой уравнений

$$\begin{cases} F'_{m0}\left(t\right) = mk_x\left(1 + a_x t\right)F_{m1}\left(t\right) \\ \ldots \\ F'_{mj}\left(t\right) = mk_x\left(1 + a_x t\right)\left(F_{m,\mathrm{j}+1}\left(t\right) - F_{mj}\left(t\right)\right) \text{ при } j = \overline{1, n-1} \\ \ldots \\ F'_{mn}\left(t\right) = -mk_x\left(1 + a_x t\right)F_{mn}\left(t\right) \\ F'_{ij}\left(t\right) = 0 \text{ при } i = \overline{0, m-1};\ j = \overline{0, n} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} F_{mn}\left(0\right) = 1 \\ F_{ij}\left(0\right) = 0 \text{ при } i + j < m + n \end{cases},$$

где $F_{ij}\left(t\right)$ — вероятность того, что в момент времени t_c сохранились i единиц стороны X и j единиц стороны Y, $F'_{ij}\left(t\right)$— их производные по времени.

В момент времени t_c открытия стороной Y ответного огня имеем:

$$\begin{gathered} F_{m0}\left(t_c\right) = 1 - \sum_{j=1}^{n} F_{mj}\left(t_c\right),\ F_{m1}\left(t_c\right) = \frac{c^{n-1}}{\left(n-1\right)!}e^{-c}, \ldots. \\ F_{mj}\left(t_c\right) = \frac{c^{n-j}}{\left(n-j\right)!}e^{-c}, \ldots \\ F_{mn}\left(t_c\right) = e^{-c},\quad F_{ij}\left(t_c\right) = 0 \text{ при } i = \overline{1, m-1},\quad j = \overline{1, n}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $c = mk_x\left(t_c + \frac{a_x t_c^2}{2}\right)$.

Дальнейшее протекание боя опишется системой уравнений

$$F'_{i0}(t) = ik_x(1+a_x t)F_{i1}(t) \quad i=\overline{1,m},$$
$$F'_{0j}(t) = jk_y(1+a_y t)F_{1j}(t) \quad j=\overline{1,n},$$
$$F'_{ij}(t) = -\left(ik_x(1+a_x t)+jk_y(1+a_y t)\right)F_{ij}(t)+$$
$$+ik_x(1+a_x t)F_{i,j+1}(t)+jk_y(1+a_y t)F_{i+1,j}(t) \quad i=\overline{1,m-1}, \quad j=\overline{1,n-1},$$
$$F'_{mj}(t) = -\left(mk_x(1+a_x t)+jk_y(1+a_y t)\right)F_{mj}(t)+$$
$$+mk_x(1+a_x t)F_{\mathrm{m},j+1}(t) \quad j=\overline{1,n-1},$$
$$F'_{in}(t) = -\left(ik_x(1+a_x t)+nk_y(1+a_y t)\right)F_{in}(t)+$$
$$+nk_y(1+a_y t)F_{\mathrm{i+1,n}}(t) \quad i=\overline{1,m-1},$$
$$F'_{mn}(t) = -\left(mk_x(1+a_x t)+nk_y(1+a_y t)\right)F_{mn}(t)$$

с начальными условиями (2).

При упреждающем ударе стороны Y процесс протекания боя опишется аналогично.

Считая, что бой ведётся до полного уничтожения одной из противоборствующих сторон, получаем, что окончательными состояниями системы являются $(1:0),...(i:0),...(m:0),...(0:1),...(0:j),...(0:n)$.

Авторами разработан численный алгоритм, позволяющий вычислить вероятности текущих и окончательных состояний, а также основные показатели боя многочисленных группировок. К ним, в первую очередь, относятся: P_{ox} и P_{oy} — вероятности победы сторон X и Y соответственно; M_x и M_y — математические ожидания относительных количеств сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя.

Для боя $(m:n)$ эти величины вычисляются следующим образом:

$$P_{ox} = \sum_{i=1}^{m} F_{io}(\infty), \ P_{oy} = \sum_{j=1}^{n} F_{oj}(\infty),$$
$$M_x = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} iF_{io}(\infty), \ M_y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} jF_{oj}(\infty),$$

где $F_{ij}(\infty)$ — вероятности того, что к концу боя сохранились i единиц стороны X и j единиц стороны Y.

Аналогично опишется процесс протекания боя, и вычисляются его основные показатели при упреждающем ударе стороны Y.

Формулы для вычисления вероятностей текущих и окончательных состояний, а также основных показателей дуэльного боя приведены в [18]. Отметим, что для дуэльного боя

$$P_{ox} = M_x = F_{10}(\infty),$$
$$P_{oy} = M_y = F_{01}(\infty).$$

Анализ результатов расчётов. Исследуем возможность использования более простых моделей двухсторонних боевых действий для решения военно-технических и военно-тактических задач: вероятностных моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями боевых единиц [19] и модели динамики средних с линейными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя [20]. Для этого проведём сравнение результатов моделирования боя при использовании различных моделей двухсторонних боевых действий.

Введём следующие обозначения:

$$\mu = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{a_x + a_y}; \;\; \nu = \frac{a_y}{a_x + a_y}; \;\; æ = \frac{n}{m}\sqrt{\frac{k_y}{k_x}}.$$

Параметр μ характеризует степень роста интенсивности протекания боя (чем меньше μ, тем быстрее растает интенсивность его протекания). В реальных боевых условиях $\mu \geq 1$ (как правило, $\mu \geq 2$). Параметр ν характеризует относительную скорость изменения эффективных скорострельностей боевых единиц одной из противоборствующих сторон относительно другой в процессе боя. Отметим, что $\nu \in [0;1]$. При $\nu = 1$ имеем $a_y = 0$ (то есть эффективные скорострельности боевых единиц стороны X в течение боя не меняются), при $\nu = 0$ величина $a_y = 0$, а при $\nu = 0,5$ получаем $a_x = a_y$. Параметр æ назовём параметром начального соотношения сил. Отметим, что для модели динамики средних с постоянными эффективными скорострельностями при одновременном открытии огня обеими сторонами значение $æ = 1$ является условием равенства сил противоборствующих группировок [10].

На рис. 1–6 представлены результаты расчётов, полученные с использованием разработанного авторами численного алгоритма вычисления основных показателей боя. Значения M_x и M_y, полученные с использованием представленной в настоящей статье модели, показаны соответственно красными и зелёными линиями, значения

M_x и M_y, полученные методом динамики средних — синими и чёрными линиями.

Рис. 1 и 4 соответствуют равным начальным численностям группировок ($m = n$), рис. 2 и 5 соответствуют ситуации, когда начальные численности стороны Y в пять раз превосходят начальные численности стороны X ($n = 5m$), а рис. 3 и 6 — ситуации, когда начальные численности стороны X в пять раз превосходят начальные численности стороны Y ($m = 5n$). Рисунки 1–3 соответствуют значению $\nu = 0$ $\left(a_y = 0\right)$, а рисунки 4–6 соответствуют значению $\nu = 1$ $\left(a_x = 0\right)$, то есть тем значениям ν, которые наиболее сильно влияют на ход протекания боя и его основные показатели. Все рисунки соответствуют значению $\mu = 1$ и значению $\overline{t_c} = 0,5$, где $\overline{t_c} = \sqrt{k_x k_y}\left(t_c + \frac{a_x t_c^2}{2}\right)$ — приведённое время нанесения стороной X упреждающего удара.
Значение $\overline{t_c} = 0,5$ соответствует проведению единицами стороны X по одному – двум выстрелам до открытия стороной Y ответного огня, так как в реальных боевых условиях после проведения боевой единицей одного – двух выстрелов она будет обнаружена и по ней будет открыт ответный огонь.

При упреждающем ударе стороны Y получаем аналогичные результаты.

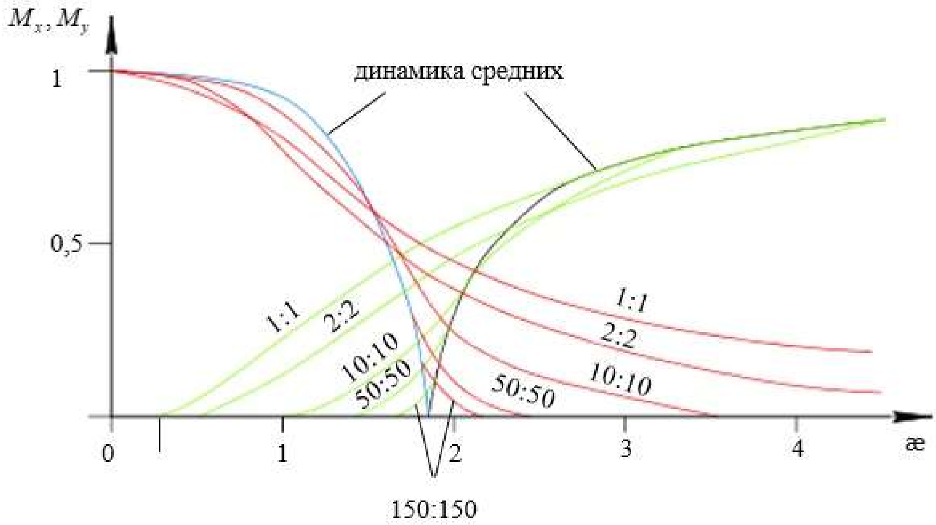

Рис. 1. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя при упреждающем ударе стороны X $\left(m = n, \nu = 0, \mu = 1, \overline{t_c} = 0,5\right)$

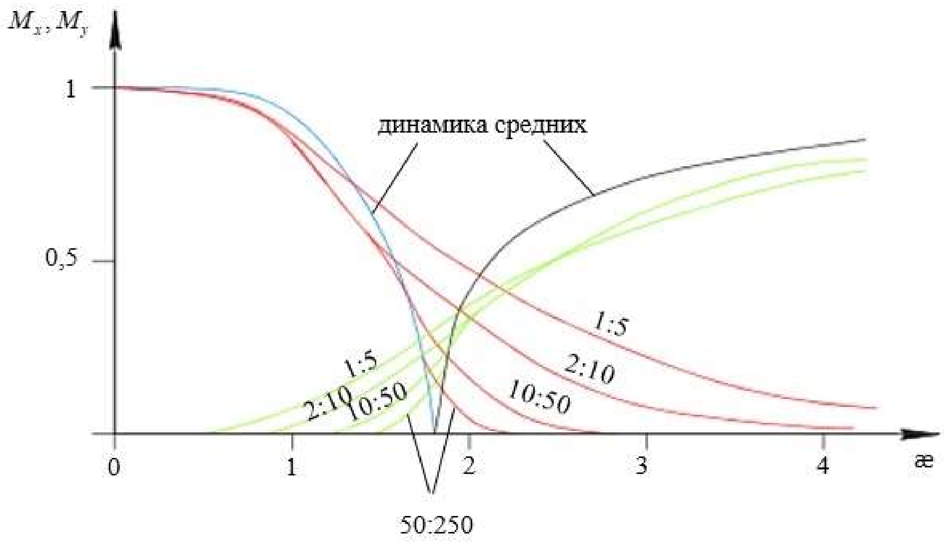

Рис. 2. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя при упреждающем ударе стороны X $\left(n = 5m, \nu = 0, \mu = 1, \overline{t_c} = 0,5\right)$

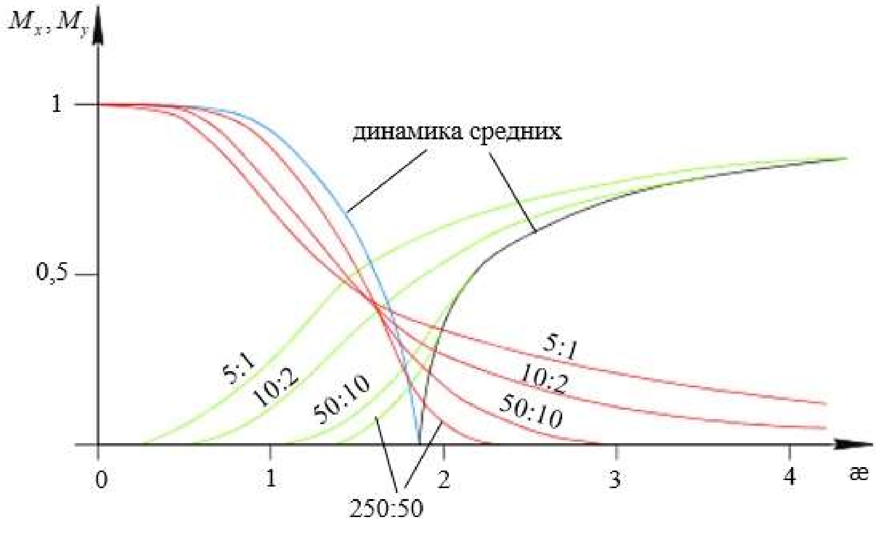

Рис. 3. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя при упреждающем ударе стороны X $\left(m = 5n, \nu = 0, \mu = 1, \overline{t_c} = 0,5\right)$

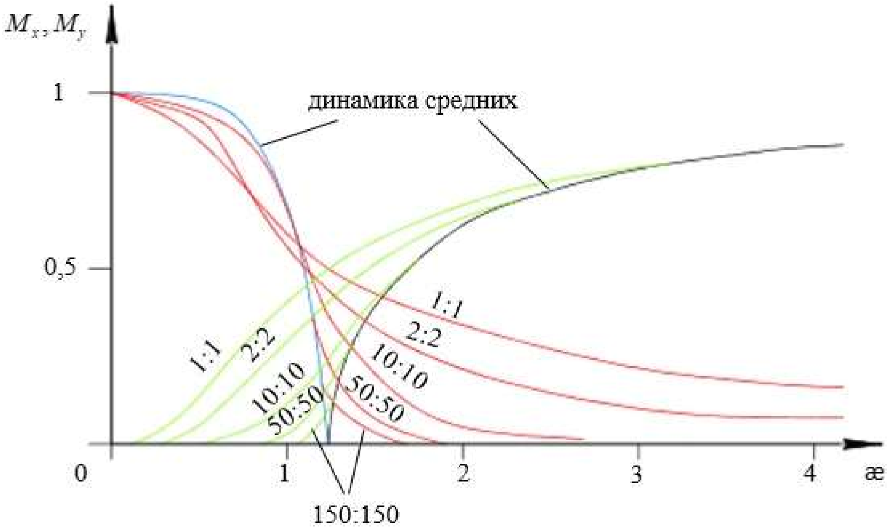

Рис. 4. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя при упреждающем ударе стороны X $\left(m = n, \nu = 1, \mu = 1, \overline{t_c} = 0,5\right)$

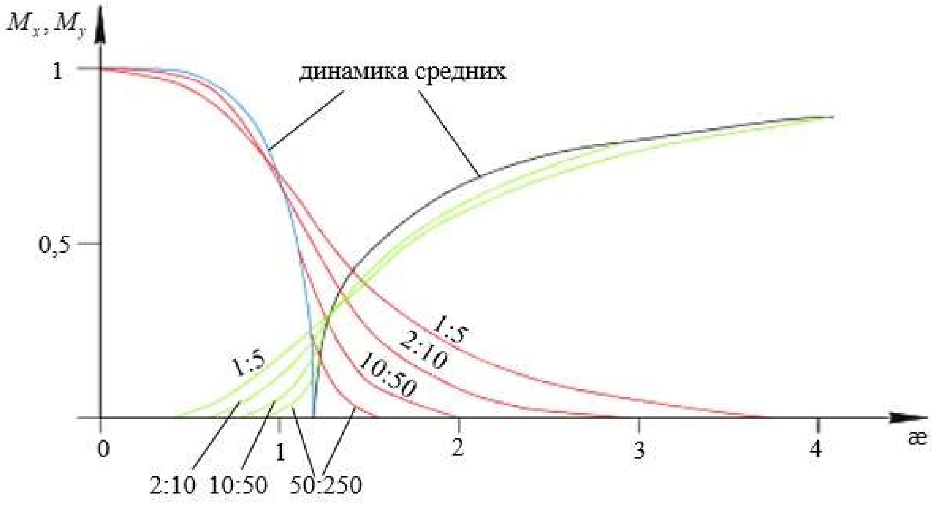

Рис. 5. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя при упреждающем ударе стороны X $\left(n = 5m, \nu = 1, \mu = 1, \overline{t_c} = 0,5\right)$

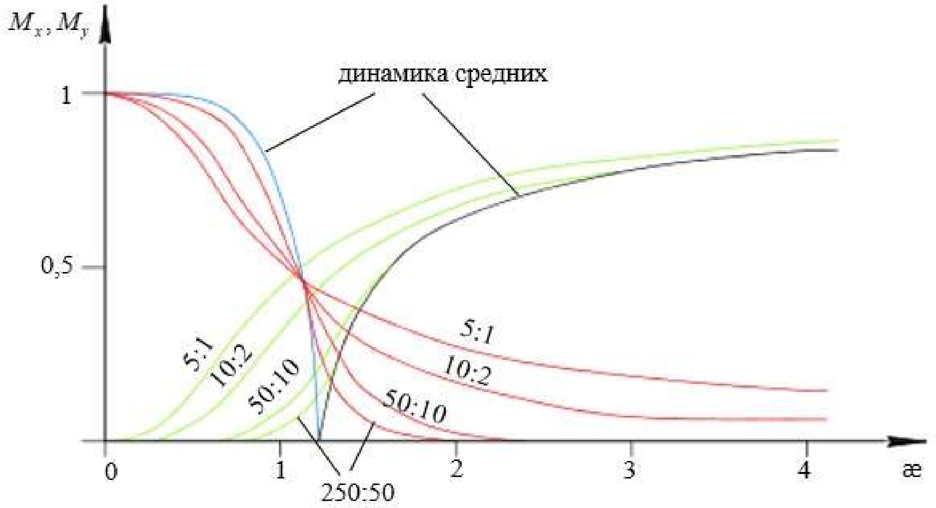

Рис. 6. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя при упреждающем ударе стороны X $\left(m = 5n, \nu = 1, \mu = 1, \overline{t_c} = 0,5\right)$

Результаты расчётов показали, что на ошибки метода динамики средних влияет в первую очередь соотношение сил противоборствующих группировок, а не их начальные численности. Так для боя "$100:100$" при одновременном открытии огня обеими сторонами при $\mu = 1,\ \nu = 0,25$ и $æ = 1,05$ получаем $M_x = 0,220, M_y = 0,114$ (при использовании модели динамики средних $M_x = 0,227, M_y = 0,000$). А для боя "$500:500$" при упреждающем ударе стороны X $\left(\overline{t_c} = 0,5\right)$ при $\mu = 1,\ \nu = 0,\ æ = 1,83$ получаем $M_x = 0,121, M_y = 0,122$ (при использовании модели динамики средних $M_x = 0,000, M_y = 0,052$). То есть в первом случае ошибка в определении M_y, а во втором случае ошибка в определении M_x превосходят 11%. Вместе с тем при двукратном и более превосходстве одной из противоборствующих сторон ошибки модели динамики средних в определении величин M_x и M_y не превосходят 5%, если каждая из сторон имеет в начале боя не менее пяти боевых единиц ($m \geq 5, n \geq 5$).

Использование вероятностных моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями также может в отдельных случаях привести к существенным ошибкам в вычислении его основных показателей боя. Так, для боя "$25:25$" при упреждающем ударе стороны X при $k_x = 0,01,\ k_y = 0,0324,\ a_x = 0,0162,\ a_y = 0,0018,\ \overline{t_c} = 0,5$ (при этом $æ = 1,8,\ \mu = 1,\ \nu = 0,1$) получаем $M_x = 0,212,\ M_y = 0,249,$ $P_{0x} = 0,421,\ P_{0y} = 0,579$. Если же считать эффективные скорострельности постоянными и равными их значениям в начале боя, получаем $M_x = 0,064, M_y = 0,426, P_{0x} = 0,137$ и $P_{0y} = 0,863$. Если же принять их равными своим средним значениям в течение боя, то есть $\nu = 0,023,$ $u = 0,037$ (при этом $æ = 1,27$), получаем $M_x = 0,554, M_y = 0,054,$ $P_{0x} = 0,840, P_{0y} = 0,160$.

А для боя "$50:10$" при упреждающем ударе стороны X при $k_x = 0,01,\ k_y = 0,49,\ a_x = 0,0035,\ a_y = 0,0315,\ \overline{t_c} = 0,5$ (при этом $æ = 1,4,\ \ \mu = 2,\ \ \nu = 0,9$) получаем $M_x = 0,268, M_y = 0,283, P_{0x} = 0,419$ $P_{0y} = 0,581$. Если же принять эффективные скорострельности постоянными и равными их значениям в начале боя, получаем $M_x = 0,371, M_y = 0,203, P_{0x} = 0,576$ и $P_{0y} = 0,424$. Если же принять их равными своим значениям в середине боя, то есть $\nu = 0,011, u = 0,799$ (при этом $æ = 1,728$), получаем $M_x = 0,145, M_y = 0,414, P_{0x} = 0,250,$ $P_{0y} = 0,750$.

Ошибки в вычислении основных показателей боя при использовании вероятностных моделей с постоянными эффективными скорострельностями зависят в первую очередь от соотношения показателей роста эффективных скорострельностей (то есть значения ν) и в значительно меньшей степени от значений μ и $æ$. Начальные численности противоборствующих сторон практически не влияют на эти ошибки. При $0,45 < \nu < 0,55$ погрешности в вычислении величин M_x и M_y не превосходят 5% при любых значениях μ и $æ$, а при $\nu = 0,5$ (то есть $a_x = a_y$) значения M_x, M_y, P_{ox} и P_{oy} получаются одинаковыми при использовании обоих типов вероятностных моделей, изменяется только ожидаемое время протекания боя. Отметим, что при $\mu \geq 4$ (то есть при достаточно медленном росте эффективных скорострельностей), а также при $æ \leq 0,4$ и $æ \geq 2,5$ (то есть при значительном превосходстве одной из противоборствующих сторон) погрешности в вычислении основных показателей боя при использовании вероятностных моделей с постоянными эффективными скорострельностями также не превосходят 5% при любых начальных численностях противоборствующих группировок.

Упреждающий удар одной из противоборствующих сторон существенно влияет на исход и основные показатели достаточно близких по силам группировок, причём это влияние заметно возрастает с пропорциональным ростом их начальных численностей. Так, при значениях $æ = 1,5,\ \mu = 1,\ \nu = 0$ при изменении приведённого времени упреждающего удара стороны X от 0 до 0,5 для боя "5 : 5" значение M_x увеличивается с 0,150 до 0,536, а значение M_y уменьшается с 0,567 до 0,179. А для боя "50 : 50" при тех же значениях $æ, \mu, \nu$ значение M_x увеличивается с 0,004 до 0,586, а значение M_y уменьшается с 0,638 до 0,012.

А при $æ = 1,25,\ \mu = 1,\ \nu = 0$ при таком же изменении $\overline{t_c}$ с 0 до 0,5 для боя "25 : 5" значения M_x увеличиваются с 0,178 до 0,668, а значения M_y уменьшаются с 0,437 до 0,071, а для боя "250 : 50" при тех же значениях $æ, \mu, \nu$ значения M_x увеличиваются с 0,057 до 0,789, а значения M_y уменьшаются с 0,349 до 0,000.

При четырёхкратном и более превосходстве стороны, наносящей упреждающий удар, его влияние на исход боя и его основные показатели не велико (разница в значениях M_x и M_y не превосходит 3%). Однако влияние упреждающего удара на ожидаемые потери стороны, наносящей ответный удар, достаточно велико даже при её четырёхкратном превосходстве. Они при этом могут увеличиться более чем на 10%.

Выводы. Таким образом, результаты настоящей статьи позволяют сделать следующие выводы. 1. На основе нпрерывных марковских процессов разработаны вероятностные модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок с линейными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц от времени боя при упреждающем ударе одной из противоборствующих сторон

2. Установлено, что использование модели динамики средних приводит к значительным ошибкам в вычислении основных показателей боя близких по силам группировок даже при их больших начальных численностях. При существенном превосходстве одной из противоборствующих сторон модели данного типа можно использовать для исследования боя даже небольших по численности группировок, что не приведёт к сколь серьёзным ошибкам в вычислении его основных показателей.

3. Показано, что использование вероятностных моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями приводит в отдельных случаях к значительным погрешностям в вычислении его основных показателей. Установлена область применимости моделей данного

типа. Также показано, что при одинаковых показателях роста эффективных скорострельностей боевых единиц противоборствующих сторон значения основных показателей боя совпадают со значениями, получаемыми при использовании вероятностных моделей с постоянными эффективными скорострельностями.

4. Установлено, что упреждающий удар одной из противоборствующих сторон оказывает существенное влияние на исход и основные показатели боя близких по силам группировок, причём это влияние увеличивается с пропорциональным ростом начальных численностей противоборствующих сторон. 5. Показано, что упреждающий удар одной из противоборствующих сторон оказывает небольшое влияние на исход и основные показатели боя только при четырёхкратном и более начальном превосходстве стороны, наносящей упреждающий удар. Однако его влияние на потери стороны, наносящей ответный удар, достаточно заметно даже при её значительном превосходстве.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров А.А., Димитриенко Ю.И. Математическое и компьютерное моделирование — основа современных инженерных наук. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 3–4.

[2] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

[3] Чуев Ю.В. *Исследование операций в военном деле*. Москва, Воениздат, 1970, 270 с.

[4] Вентцель Е.С. *Исследование операций: задачи, принципы и методология*. Москва, УРСС, 2006, 432 с.

[5] Глушков И.Н. Выбор математической схемы при построении модели боевых действий. *Программные продукты и системы*, 2010, № 1, с. 1–9.

[6] Ильин В.А. Моделирование боевых действий сил флота. *Программные продукты и системы*, 2006, № 1, с. 23–27.

[7] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to Operations Research*. New York, McGraw-Hill, 2005, 998 p.

[8] Winston W.L. *Operations Research: Applications and Algorithms*. Belmont, Duxbury Press, 2001. 128 p.

[9] Chen X., Jing Y., Li C., Li M. Warfare Command Stratagem Analysis for Winning Based on Lanchester Attrition Models. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21 (1), pp. 94–105.

[10] Ткаченко П.Н. *Математические модели боевых действий*. Москва, Советское радио, 1969, 240 с.

[11] Jaiswal N.K. *Military Operations Research: Quantitative Decision Making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, 388 p.

[12] Алексеев О.Г., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. *Марковские модели боя*. Москва, Министерство обороны СССР, 1985, 85 с.

[13] Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, КноРус, 2016, 658 с.

[14] Чуев В.Ю. Вероятностная модель боя многочисленных группировок. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011. Спец. вып. «Математическое моделирование», с. 223–232.

[15] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1, с. 89–104.

[16] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Вероятностная модель боевых действий при упреждающем ударе одной из сторон. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2015, № 2, с. 53–62.

[17] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Стохастизм и детерминизм при моделировании двухсторонних боевых действий. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2017, № 4, с. 16–25.

[18] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Стохастические модели дуэльного боя двух единиц. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2, с. 69–84.

[19] Дубограй И.В., Рябцев Р.А., Чуев В.Ю. Вероятностные модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок при упреждающем ударе одной из них. *Известия российской академии ракетных и артиллерийских наук*, 2017, № 4 (99), с. 37–46.

[20] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Модели динамики средних двухсторонних боевых действий многочисленных группировок. Саарбрюкен, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 72 с.

Статья поступила в редакцию 13.09.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Вероятностные модели двухсторонних боевых действий с линейными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя при упреждающем ударе одной из них. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 2, с. 84–98.

Чуев Василий Юрьевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области прикладной математики. e-mail: vacilious@mail.ru

Дубограй Ирина Валерьевна — доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области прикладной математики. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

Probabilistic models of bilateral combat operations with linear dependencies of effective rates of fire of combat units of the parties on the time of the battle with a preemptive strike of one of them

© V.Yu. Chuev, I.V. Dubogray

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

On the basis of the theory of continuous Markov processes the models of bilateral military operations with linear dependences of effective rates of fire of combat units of the parties on the time of battle with a preemptive strike of one of them are developed. The algorithm allowing to calculate the main indicators of fight is developed. A comparison with the simulation results obtained on the basis of probabilistic models of combat with constant effective rates of fire and the model of the dynamics of the average with linear dependencies *of effective rates of fire on the time of battle. The influence of a preemptive strike of one of the warring parties on the outcome and the main indicators of the battle is studed.*

Keywords: *continuous Markov process, probabilistic models of bilateral military operations, effective rate of fire, preemptive strike.*

REFERENCES

[1] Alexandrov A.A., Dimitrienko Yu.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 3–4.

[2] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 5–17.

[3] Chuev Yu.V. *Issledovanie operatsiy v voennom dele* [Operations research in military arts]. Moscow, Voenizdat Publ., 1970, 270 p.

[4] Venttsel E.S. *Issledovanie operatsiy: zadachi, printsipy, metodologiya* [Operations research: objectives, principles, methodology]. Moscow, URSS Publ., 2006, 432 p.

[5] Glushkov I.N. Programmnye produkty i sistemy — Software & systems, 2010, no. 1, pp. 1–9.

[6] Ilyin V.A. *Programmnye produkty i sistemy — Software & systems*, 2006, no. 1, pp. 23–27.

[7] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to Operations Research*. New York, McGraw-Hill, 2005, 998 p.

[8] Winston W.L. *Operations Research: Applications and Algorithms*. Belmont, Duxbury Press, 2001, 128 p.

[9] Chen X., Jing Y., Li C., Li M. Warfare Command Stratagem Analysis for Winning Based on Lanchester Attrition Models. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21 (1), pp. 94–105.

[10] Tkachenko P.N. *Matematicheskie modeli boevykh deistviy* [Mathematical models of combat operations]. Moscow, Sovetskoe radio, 1969, 240 p.

[11] Jaiswal N.K. *Military Operations Research: Quantitative Decision Making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, 388 p.

[12] Alekseev O.G., Anisimov V.G., Anisimov E.G. *Markovskie modeli boya* [Markov's battle models]. Moscow, the USSR Ministry of Defense Publ., 1985, 85 p.

[13] Venttsel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, KnoRus Publ., 2016, 658 p.

[14] Chuev V.Yu. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki*, 2011. Spets. vyp. "Matematicheskoe modelirovanie" — *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2011. Spec. issue "Mathematical modeling", pp. 223–232.

[15] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1, pp. 89–104.

[16] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2015, no. 2, pp. 53–62.

[17] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2017, no. 4, pp. 16–25.

[18] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2, pp. 69–84.

[19] Dubogray I.V., Ryabtsev R.A., Chuev V.Yu. *Izvestiya rossijskoj akademii raketnyh i artillerijskih nauk — Proceedings of the russian academy of rocket and artillery sciences*, 2017, no. 4 (99), pp. 37–46.

[20] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Modeli dinamiki srednikh dvukhstoronnikh boevykh deystviy mnogochislennykh gruppirovok* [Dynamics models of the average bilateral military operations of numerous forces]. Saarbryukken, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 72 p.

Chuev V.Yu., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 20 scientific papers in the field of applied mathematics. e-mail: vacilious@mail.ru

Dubogray I.V., Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of scientific papers in the field of applied mathematics. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru