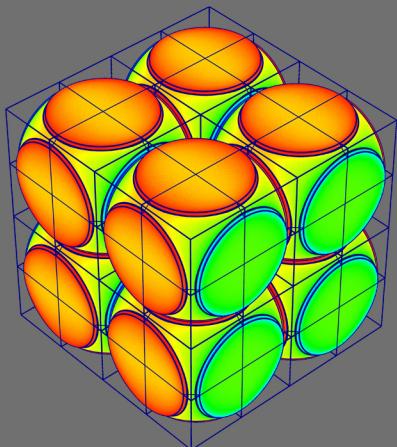


# Математическое моделирование и численные методы



Бутина Т.А., Дубровин В.М. Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочек вращения в условиях ползучести материала. Математическое моделирование и численные методы, 2019, № 2, с. 3-14.

Источник: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/191/>

УДК 629.7.015.4

## Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочек вращения в условиях ползучести материала

© Т.А. Бутина, В.М. Дубровин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Одним из основных свойств конструкционных материалов является ползучесть. Рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния осесимметрично нагруженных оболочек вращения при ползучести.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, осесимметричное нагружение, ползучесть оболочки вращения, усталость материала, деформации, напряжения

**Введение.** Ползучесть, наряду с упругостью и пластичностью, является одним из основных свойств конструкционных материалов и заключается в увеличении деформации в процессе эксплуатации конструкции под действием даже постоянных нагрузок [1, 2]. Ползучесть проявляется и при небольших уровнях напряжений и нормальных температурах, но она, как правило, мала в течении всего времени эксплуатации конструкций и отбрасывается при расчетах. При повышении температуры и уровня напряжений в конструкциях ползучесть становится заметной, а иногда и решающей характеристикой в расчетах [4, 3]. В работе рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния осесимметрично нагруженных оболочек вращения при ползучести. Система разрешающих уравнений представлена в виде, удобном для решения методом конечных разностей.

**Методика расчета.** Рассматривается изотропная однослойная оболочка, образованная вращением некоторой кривой вокруг оси  $x$  (рис.1). Положение точки на поверхности оболочки определяется ортогональными криволинейными координатами  $\alpha$  и  $\beta$ , отсчитываемыми соответственно в меридиональном и окружном направлениях. Координатные линии  $\alpha$  и  $\beta$  являются линиями главных кривизн  $K_\alpha$  и  $K_\beta$  недеформированной поверхности. Геометрия оболочки задается коэффициентами Ляме  $A$  и  $B$ , радиусами кривизны  $R_\alpha = \frac{1}{K_\alpha}$  и  $R_\beta = \frac{1}{K_\beta}$ , толщиной  $h(\alpha)$ , начальным  $\alpha_0$  и конечным  $\alpha_K$  значениями координаты  $\alpha$ .

Оболочка может быть нагрета осесимметрично (неравномерно по толщине и образующей) и нагружена осесимметричными усилиями. Кроме того, температурное поле и внешние нагрузки могут меняться со временем. Если температурный нагрев и уровень напряженного состояния значительны, то в оболочке наряду с упругопластическими деформациями со временем возникают деформации ползучести.

Свойства материала характеризуются, например, набором  $N = K * M$  диаграмм  $\varepsilon_{(i,j)}(\sigma_{(i)}, T_{(j)}, t)$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ ) зависимости полной деформации  $\varepsilon$  от времени  $t$  при постоянных значениях напряжения  $\sigma$  и температуры  $T$ . При этом напряжение и температура должны меняться с достаточно малыми шагами  $\Delta\sigma = \sigma_{i+1} - \sigma_i$ ,  $\Delta T = T_{j+1} - T_j$  и в широких пределах из-за сильной нелинейности зависимости  $\varepsilon(\sigma, T, t)$ . При выборе конкретного метода решения и «теории ползучести» указанные диаграммы перестраиваются в изохронные кривые, кривые «мгновенного» деформирования, диаграммы для скоростей ползучести и др.

Следует также задавать коэффициент температурного расширения  $\alpha_T$  и коэффициент Пуассона  $\gamma_p$ .

При определении напряженно-деформированного состояния оболочки вращения в условиях ползучести использовались два различных подхода на основе деформационной теории ползучести.

В первом подходе полная деформация представляется в виде суммы упругопластической деформации, температурного расширения и деформации ползучести. Упруго-пластические деформации и соответствующие им напряжения определялись по кривым мгновенного деформирования методом переменных параметров упругости. По найденному напряженно-деформированному состоянию отдельно определялись деформации ползучести, использовались соотношения различных теорий ползучести. Деформации ползучести считались «пассивными» в том смысле, что собственно их изменение не влияет непосредственно на напряженное состояние оболочки, но приводит к изменению формы оболочки, из-за чего даже при постоянных внешних воздействиях может происходить перераспределение напряжений и упругопластических деформаций.

При втором подходе общие кривые ползучести перестраиваются в изохронные кривые и по ним методом переменных параметров сразу определяется сумма упругопластических деформаций и деформаций ползучести в искомый момент времени.

Ниже приводится вывод разрешающих уравнений для первого подхода, поясняется отличие в постановке и применении второго метода.

Рассмотрим связь усилий с деформациями с учетом разгрузки. По гипотезе Кирхгофа-Лява о неизменяемости нормали к срединной поверхности, деформации в слое, расположенному на расстоянии  $z$  от срединной поверхности, представляется в виде:

$$e_\alpha = \varepsilon_\alpha - zx_\alpha, (\alpha \leftrightarrow \beta), \quad e_{\alpha\beta} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, x_\alpha, x_\beta$  — полные деформации и измерения кривизн в срединной поверхности оболочки, которые для осесимметричного случая нагружения согласно Х.М. Муштари [12] записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= u' - \frac{w}{R_\alpha} + \frac{1}{2} \varphi^2, \quad \varepsilon_\beta = \vartheta u - \frac{w}{R_\beta}, \\ x_\alpha &= \varphi', \quad x_\beta = \vartheta \varphi, \quad \varphi = w', \\ (\dots)' &= \frac{1}{A} \frac{d(\dots)}{d\alpha}, \quad \vartheta = \frac{B'}{B}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u, w$  — перемещения точек срединной поверхности, положительные направления которых указаны на рис.1,  $B$  — функция времени

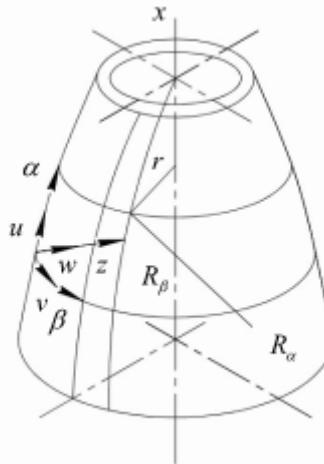


Рис. 1. Схема перемещения точек срединной поверхности для оболочки вращения

Полные деформации в любом слое оболочки можно представить в виде:

$$e_\alpha = e_\alpha^{ep} + e_\alpha^c + e_\alpha^T \quad (\alpha \leftrightarrow \beta), \quad (3)$$

где  $e_{\alpha}^{ep}$  — упруго-пластическая часть полной деформации;  $e_{\alpha}^c$  — деформация ползучести;  $e_{\alpha}^T$  — деформация нагрева.

Согласно деформационной теории термопластичности соотношение (3) можно представить в виде:

$$e_{\alpha} = \frac{1}{E_c^0} (\sigma_{\alpha} - \gamma \sigma_{\beta}) + \alpha_T \Delta T + e_{\alpha}^c (\alpha \leftrightarrow \beta) \quad (4)$$

Здесь  $E_c^0 = \sigma_x / \varepsilon_x$  — секущий модуль при одноосном растяжении;  $\gamma = \frac{1}{2} \left[ 1 + (2\gamma_p - 1) \frac{E_c^0}{E} \right]$  — коэффициент поперечного сжатия материала;  $E$  — модуль Юнга.

При определении напряженно-деформированного состояния секущий модуль  $E_c^0$  находится из диаграммы мгновенного деформирования. Учет разгрузки осуществляется следующим образом. Пусть в некоторый момент времени  $t$  в некоторой точке разбиения оболочки по толщине и по длине температура была  $T_1$ , а мгновенный предел текучести определялся точкой  $A$  (см. рис. 2).

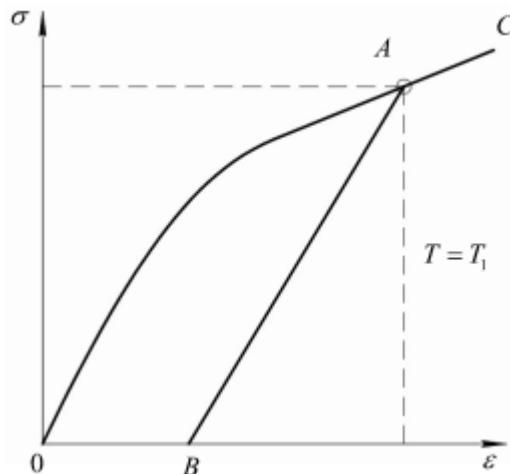
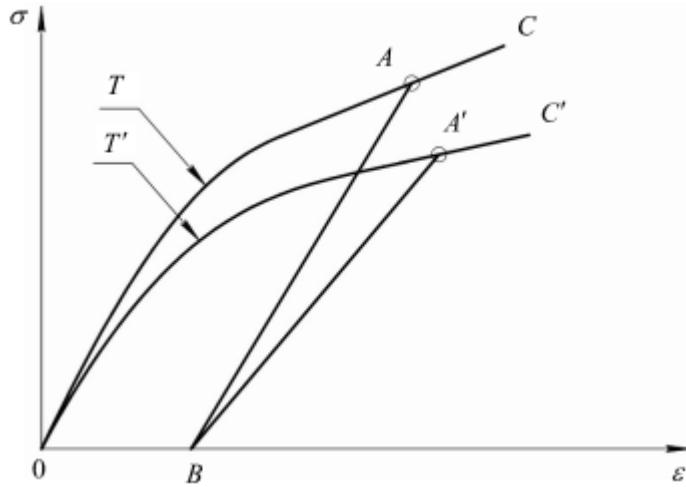


Рис. 2. Диаграмма мгновенного деформирования

В момент времени  $t + \Delta t$  при нахождении равновесного напряженно-деформированного состояния в той же точке оболочки будет рассматриваться уже не кривая  $OAC$ , а ломаная  $BAC$ . Если  $\sigma(t + \Delta t) < \sigma_A(t)$ , то точка  $(\sigma - \varepsilon)$  будет на прямой разгрузки, если  $\sigma(t + \Delta t) \geq \sigma_A(t)$  — то на кривой  $AC$ . При изменении температуры в

этой точке оболочки за время  $\Delta t$  от  $T$  к  $T'$  (см. ломанную  $B'A'C'$ ) (см. рис. 3).



**Рис. 3.** Диаграммы мгновенного деформирования при изменении Температуры за время  $\Delta t$  от  $T$  к  $T'$

Таким образом, при деформировании оболочки со временем активное напряженно-деформированное состояние определяется с учетом истории нагружения в смысле учета накопленной деформации ползучести и накопленной пластической деформации, но не зависит от пути нагружения. При одноосном напряженно-деформированном состоянии имеют место соотношения

$$e_u = \frac{2}{3}(1+\gamma)e_x, \quad \sigma_u = \sigma_x,$$

а при двухосном

$$\begin{aligned} e_u = & \frac{2}{3(1-\gamma)} \sqrt{(1-\gamma+\gamma^2)} \left[ (e_\alpha - e_\alpha^c)^2 + (e_\beta - e_\beta^c)^2 \right] - \\ & - (1-4\gamma+\gamma^2)(e_\alpha - e_\alpha^c)(e_\beta - e_\beta^c) + \\ & + (1+\gamma)^2 (\alpha \Delta T - (e_\alpha - e_\alpha^c) - (e_\beta - e_\beta^c)) \alpha_T \Delta T, \quad (5) \\ \sigma_u = & \sqrt{\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2} - \sigma_\alpha \sigma_\beta, \quad E_c^0 = \frac{2(1+\gamma)}{3} \frac{\sigma_u}{e_u}. \end{aligned}$$

Разрешая уравнения относительно напряжений, можно получить связь напряжений и деформаций в оболочке в некоторый момент времени:

$$\sigma_\alpha = \frac{E_c^0}{(1-\gamma^2)} \left[ e_\alpha - e_\alpha^c + \gamma (e_\beta - e_\beta^c) - (1+\gamma) \alpha_T \Delta T \right] (\alpha \leftrightarrow \beta) \quad (6)$$

Систему напряжений, распределенных по грани некоторого элемента оболочки, заменим равнодействующими усилиями  $T_\alpha$ ,  $T_\beta$  и моментами  $M_\alpha$ ,  $M_\beta$ , приложенными к срединной поверхности. Используя соотношения (1), (6), получим

$$\begin{aligned} T_\alpha &= A_1 \varepsilon_\alpha + A_2 \varepsilon_\beta - A_3 x_\alpha - A_4 x_\beta - B_1 - C_1 - C_2, \\ T_\beta &= A_1 \varepsilon_\beta - A_3 x_\beta - A_4 x_\alpha - B_1 - C_3 - C_4, \\ M_\alpha &= A_3 \varepsilon_\alpha + A_4 \varepsilon_\beta - A_5 x_\alpha - A_6 x_\beta - B_2 - C_5 - C_6, \\ M_\beta &= A_3 \varepsilon_\beta + A_4 \varepsilon_\alpha - A_5 x_\beta - A_6 x_\alpha - B_2 - C_7 - C_8, \end{aligned} \quad (7)$$

где коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int E_c dz, \quad A_2 = \int \gamma E_c dz, \quad A_3 = \int E_c z dz, \\ A_4 &= \int \gamma E_c z dz, \quad A_5 = \int E_c z^2 dz, \quad A_6 = \int \gamma E_c z^2 dz, \\ B_1 &= \int E_c (1+\gamma) \alpha \Delta T dz, \quad B_2 = \int E_c (1+\gamma) \alpha \Delta T z dz, \\ C_1 &= \int E_c e_\alpha^c dz, \quad C_2 = \int \gamma E_c e_\beta^c dz, \quad C_3 = \int E_c e_\beta^c dz, \\ C_4 &= \int \gamma E_c e_\alpha^c dz, \quad C_5 = \int E_c e_\alpha^c z dz, \quad C_6 = \int \gamma E_c e_\beta^c z dz, \\ C_7 &= \int E_c e_\beta^c z dz, \quad C_8 = \int \gamma E_c e_\alpha^c z dz, \quad E_c = \frac{E_c^0}{1-\gamma^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Все интегралы берутся от  $-h/2$  до  $+h/2$ , где  $h$  — толщина оболочки.

Ниже приводится разрешающая система уравнений, приведение ее к каноническому виду. Разрешающая система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} T_\alpha' + \frac{\theta}{A} (T_\alpha - T_\beta) &= 0, \\ N_\alpha' + \frac{\theta}{A} N_\alpha + \frac{T_\alpha}{R_\alpha} + \frac{T_\beta}{R_\beta} + q &= 0, \\ M_\alpha' + \frac{\theta}{A} (M_\alpha - M_\beta) + T_\alpha \varphi - N_\alpha &= 0, \quad N_\alpha = Q_\alpha + T_\alpha \varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $q$  — поперечная осесимметрическая нагрузка;  $T_\alpha$  — растягивающая сила;  $Q_\alpha$  — перерезывающая сила.

Для того, чтобы определить напряженно-деформированное состояние оболочки, к (9) необходимо присоединить уравнения (1) и (2) для

получения замкнутой системы шести уравнений с шестью неизвестными  $u, w, \varphi, T_\alpha, N_\alpha, M_\alpha$ . Из (1), (2), (7) путем несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{d\alpha} &= a_1 \theta u + A \left( \frac{1}{R_\alpha} - \frac{a_1}{R_\beta} \right) w + a_2 \theta \varphi + A (a_0 T_\alpha + a_3 M_\alpha) + A \left( a_4 - \frac{\varphi^2}{2} + C_1^* \right), \\
 \frac{dw}{d\alpha} &= A \varphi, \\
 \frac{d\varphi}{d\alpha} &= a_6 \theta u + A \frac{a_6}{R_\beta} w + a_7 \theta \varphi - A (a_3 T_\alpha + a_5 M_\alpha) + A (a_8 + C_2^*), \\
 \frac{dT_\alpha}{d\alpha} &= \theta \left[ \frac{a_9}{R_\beta} \theta u - \frac{a_9}{R_\beta} w + \frac{a_{11}}{A} \varphi + \theta (a_{10} - 1) T_\alpha + a_{12} M_\alpha + a_{13} + C_3^* \right. \\
 &\quad \left. + \theta (a_{10} - 1) T_\alpha + a_{12} M_\alpha + a_{13} + C_3^* \right], \\
 \frac{dN_\alpha}{d\alpha} &= -\frac{a_9 \theta}{R_\beta} u + \frac{A a_9}{R_\beta^2} w - \frac{a_{11} \theta}{R_\beta} \varphi - A \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{a_{10}}{R_\beta} \right) T_\alpha - \theta N_\alpha - \\
 &\quad - \frac{A a_{12}}{R_\beta} M_\alpha - A \left( q + \frac{a_{13} + C_3^*}{R_\beta} \right), \\
 \frac{dM_\alpha}{d\alpha} &= \theta \left( \frac{a_{14}}{A} u - \frac{a_{14}}{R_\beta} w + \frac{a_{16}}{A} \varphi + a_{15} T_\alpha \right) + A N_\alpha + \theta (a_{18} + C_4^*)
 \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta &= A_3^2 - A_1 A_5, \quad a_0 = -\frac{A_5}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{A_2 A_5 - A_3 A_4}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{A_3 A_6 - A_4 A_7}{\Delta}, \\
 a_3 &= \frac{A_3}{\Delta}, \quad a_4 = \frac{A_3 B_2 - A_5 B_1}{\Delta}, \quad a_5 = \frac{A_1}{\Delta}, \quad a_6 = \frac{A_3 A_2 - A_1 A_4}{\Delta}, \\
 a_7 &= \frac{A_1 A_6 - A_3 A_4}{\Delta}, \quad a_8 = \frac{A_1 B_2 - A_3 B_1}{\Delta}, \quad a_9 = A_1 + A_2 a_1 - A_4 a_6, \\
 a_{10} &= -a_1, \quad a_{11} = A_2 a_2 - A_4 a_7 - A_3, \quad a_{12} = a_6, \\
 a_{13} &= A_2 a_4 - A_4 a_8 - B_1, \quad a_{14} = A_3 + A_4 a_1 - A_6 a_6, \quad a_{15} = a_2, \\
 a_{16} &= A_4 a_2 - A_6 a_7 - A_5, \quad a_{17} = -a_7, \quad a_{18} = A_4 a_4 - A_6 a_8 - B_2, \\
 C_1^* &= a_3 (C_5 + C_6) + a_0 (C_1 + C_2), \quad C_2^* = a_5 (C_5 + C_6) - a_3 (C_1 - C_2), \\
 C_3^* &= A_2 C_1^* - A_4 C_2^* - C_3 - C_4, \quad C_4^* = A_4 C_1^* - A_6 C_2^* - C_7 - C_8.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Если ввести обозначения

$$y_1 = u, \quad y_2 = w, \quad y_3 = \varphi, \quad y_4 = T_\alpha, \quad y_5 = N_\alpha, \quad y_6 = M_\alpha, \quad (12)$$

то система уравнений (10) для осесимметрично нагруженной оболочки вращения можно будет записать в общем виде:

$$\frac{dy_i}{d\alpha} = A_{ij} y_j + B_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6. \quad (13)$$

Здесь  $A_{ij}$  — матрица коэффициентов однородной части;  $B_i$  — столбец неоднородных составляющих и нелинейных членов.

Значения  $A_{ij}$  и  $B_i$  легко определяются из (10). Для того, чтобы система (13) стала замкнутой, к ней необходимо присоединить шесть граничных условий: по три на каждом торце оболочки

$$(y_i - y_i^*) \gamma_{i+3j} + (y_{i+3} - y_{i+3}^*) (1 - j_{i+3j}) = 0 \quad (14)$$

$j = 1, 2; i = 1, 2, 3$ ; причем  $j = 0$  на левом краю  $j = 1$  на правом.

Если нужно задать на краю оболочки кинематические граничные условия, то следует положить  $j = 1$ , если статистические, то  $j = 0$ . Направление внешних усилий  $T_\alpha^*$ ,  $Q_\alpha^*$  и внешнего момента  $M_\alpha^*$  совпадают с направлениями внутренних силовых факторов, указанных на рис. 4.

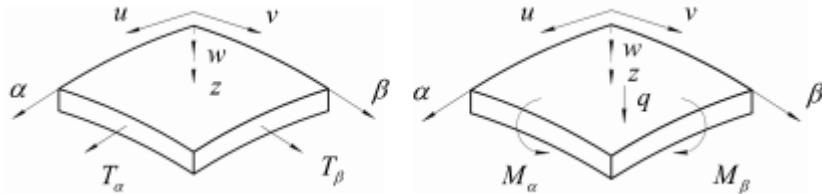
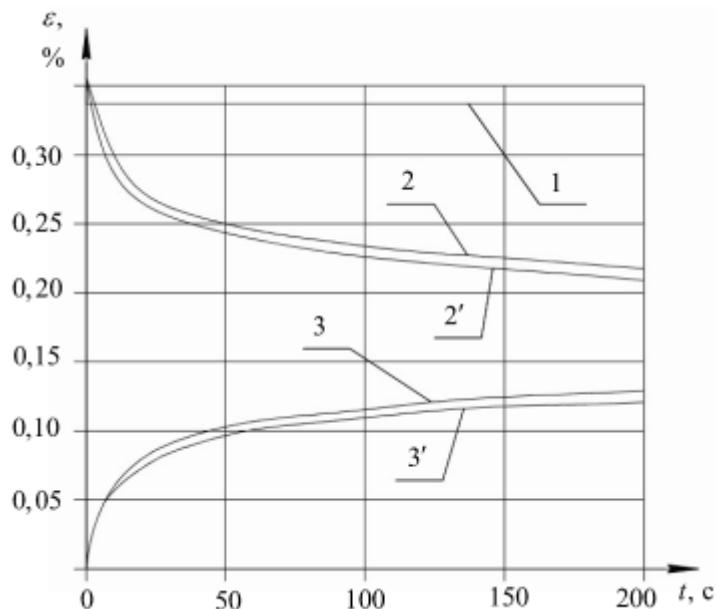


Рис. 4. Направление внутренних силовых факторов

После того, как искомые неизвестные  $u, w, \varphi, T_\alpha, N_\alpha, M_\alpha$  будут найдены из решения краевой задачи (13), (14), через них можно определить деформации  $\varepsilon_\beta, \tau_\beta$  по формулам (2) а также

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= a_1 \varepsilon_\beta + a_2 \tau_\beta + a_0 T_\alpha + a_3 M_\alpha + a_4 + C_1^*, \\ \tau_\alpha &= a_6 \tau_{\beta+} + a_7 \tau_\beta - a_3 T_\alpha + a_5 M_\alpha + a_8 + C_2^*, \\ T_\beta &= a_9 \varepsilon_\beta + a_{11} \tau_\beta + a_{10} T_\alpha + a_{12} M_\alpha + a_{13} + C_3^*, \\ M_\beta &= a_{14} \varepsilon_\beta + a_{16} \tau_\beta + a_{15} T_\alpha + a_{17} M_\alpha + a_{18} + C_4^*. \end{aligned} \quad (15)$$

**Примеры расчета.** Численное решение задачи [13] позволило реализовать данный метод и получить кривые изменения деформаций в условиях ползучести [14]. Рассматривалась цилиндрическая оболочка радиуса 100 см, выполненная из сплава Д16АТ, осесимметричная нагрузка составила 72 т. Плотность материала  $2,35 \text{ г/см}^3$ , модуль Юнга  $7,2 \text{ кг/см}^2$ , коэффициент Пуассона 0,3, предел прочности 420 кг/см<sup>2</sup>. Решение задачи иллюстрирует рис. 5. Полная деформация постоянна и равна  $0,34 \cdot 10^{-2}$ , на рис. 5 она изображена кривой 1. Распределение упруго-пластической деформации, полученной из точного решения, представлено кривой 2, а деформация ползучести кривой 3. Деформации  $\varepsilon^{ep}(t)$  и  $\varepsilon^c(t)$ , полученные простым шаговым методом Эйлера, представляют кривые 2' и 3' соответственно. Решение, полученное с использованием модифицированного метода Эйлера-Коши с итерациями, отличаются от точного в четвертом знаке. Шаг выбирается автоматически из условия: относительное изменение решения на шаге не превышает  $\delta$ , в приведенных задачах  $\sigma$  равнялось 5 процентам.



**Рис. 5.** Кривые изменения деформаций в условиях ползучести:

1 — полная деформация; 2 — упруго-пластическая деформация, точное решение; 2' — упруго-пластическая деформация, простой шаговый метод Эйлера; 3 — деформация ползучести, точное решение; 3' — деформация ползучести, простой шаговый метод Эйлера

На рис. 6 кривой 1 изображена релаксация напряжений со временем, полученная при помощи точного решения и модифицированного шагового метода, а кривой 1' — с использованием простого шагового метода, кривая 2 иллюстрирует релаксацию напряжений, полученную методом изохронных кривых.

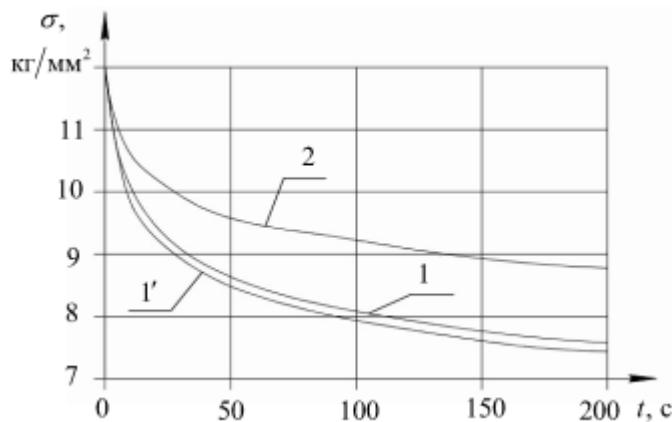


Рис. 6. Кривые релаксации напряжений со временем:

- 1 — точное решение; 1' — простой шаговый метод Эйлера;  
2 — метод изохронных кривых

**Выводы.** Данный метод позволяет с достаточной степенью точности проводить расчет напряженно-деформированного состояния конструкций в условиях ползучести, это видно сравнения кривых, полученных точным и численным методом. Метод дает возможность определить нарастание деформаций с течением времени. Расчеты показывают, что ошибка определения напряжения и деформации составляет 2–3 процента, а ошибка нахождения времени около 10–20 процентов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Качанов Л.М. *Теория ползучести*. Москва, Физматлит, 1960, 455 с.
- [2] Димитриенко Ю.И. *Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды. Т. 2*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 559 с.
- [3] Григодюк Э.Н., Липовцев Ю.В. Устойчивость оболочек в условиях ползучести. *Прикладная механика и техническая физика*, 1965, № 4, с. 111–116.
- [4] Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование процесса ползучести конструкционных материалов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, вып. 9 (21), 2013, с. 131–139.
- [5] Голушко С.К., Немировский Ю.В. *Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2008, 432 с.

- [6] Пачурин Г.В., Шевченко С.М., Дубинский В.Н., Власов О.В. *Микромеханизмы высокотемпературной усталости и ползучести металлов и сплавов*. Н. Новгород, НГТУ, 2006, 131 с.
- [7] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967, 984 с.
- [8] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка системы автоматизированного вычисления эффективных упругих характеристик композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 2, с. 57–67.
- [9] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физматлит, 2009, 624 с.
- [10] Харлаб В.Д. *Принципиальные вопросы линейной теории ползучести*. Санкт-Петербург, СПбГАСУ, 2014, 207 с.
- [11] Москвичев В.В. *Лекции по механике разрушения*. Новосибирск, Сибирский Федеральный Университет, 2007, 90 с.
- [12] Жилин П.А. *Актуальные проблемы механики*. Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН, 2006, 306 с.
- [13] Муштари Х.М., Галимов К.З. *Нелинейная теория упругих оболочек*. Казань, Таткнигоиздат, 1957, 431 с.
- [14] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. Москва, Бином, 2001, 636 с.
- [15] Фролов К.В. *Избранные труды*. В 2 т. Т. 2: Машиноведение и машиностроение. Москва, Наука, 2007, 523 с.

Статья поступила в редакцию 25.09.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Бутина Т.А., Дубровин В.М. Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочек вращения в условиях ползучести материала. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 2, с. 3–14.

**Бутина Татьяна Александровна** — канд. физ.-мат. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. e-mail: butina\_ta@mail.ru

**Дубровин Виктор Митрофанович** — канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. e-mail: dubrovinv1934@yandex.ru

## **Modeling of stressed-deformed state of rotation shells under conditions of material creep**

© Т.А. Butina, V.M. Dubrovin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*One of the main properties of structural materials is creep. The problem of determining the stress-strain state of axisymmetrically loaded shells of rotation at creep is considered*

**Keywords:** stress-strain state, axisymmetric loading, creep shell rotation, material fatigue, deformation, voltages

## REFERENCES

- [1] Kachanov L.M. *Teoriya polzuchesti* [Creep theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1960, 455 p.
- [2] Dimitrienko Yu.I. *Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuum]. Vol. 2. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 559 p.
- [3] Grigolyuk E.I., Lipovtsev Yu.V. Stability of shells in creep. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1965, vol. 6, iss. 4, pp. 71–74.
- [4] Dubrovin V.M., Butina T.A. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, no. 9 (21), 2013, pp. 131–139.
- [5] Golushko S.K., Nemirovskiy Yu.V. *Pryamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugikh kompozitnykh plastin i obolochek vrashcheniya* [Direct and inverse problems of mechanics of elastic composite plates and rotary shells]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2008, 432 p.
- [6] Pachurin G.V., Shevchenko S.M., Dubinskiy V.N., Vlasov O.V. *Mikromekhanizmy vysokotemperaturnoy ustalosti i polzuchesti metallov i splavov* [Micro-mechanisms of metals and alloys high-temperature fatigue and creep]. Nizhny Novgorod, NNSTU Publ., 2006, 131 p.
- [7] Volmir A.S. *Ustoichivost deformiruemых system* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 984 p.
- [8] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University, Natural Science Series*, 2008, no. 2, pp. 57–67.
- [9] Dimitrienko Yu.I. *Nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy* [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 624 p.
- [10] Harlab V.D. *Printsipialnye voprosy lineynoy teorii polzuchesti* [The fundamental problems of the linear creep theory]. St. Petersburg, SPbGASU Publ., 2014, 207 p.
- [11] Moskvichev V.V. *Lektsii po mekhanike razrusheniya* [Lectures on fracture mechanics]. Novosibirsk, SibFU Publ., 2007, 90 p.
- [12] Zhilin P.A. *Aktualnye problemy mekhaniki* [Current problems of mechanics]. St. Petersburg, IPME RAS Publ., 2006, 306 p.
- [13] Mushtari H.M., Galimov K.Z. *Nelinejnaya teoriya uprugih obolochek* [Nonlinear theory of elastic shells]. Kazan, Tatkniigoizdat Publ., 1957, 431 p.
- [14] Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Binom Publ., 2001, 636 p.
- [15] Frolov K.V. *Izbrannye trudy. V 2 tomakh. Tom 2. Mashinovedenie i mashinostroenie* [Selected Works. In 2 vols. Vol. 2. Theoretical and mechanical engineering]. Moscow, Nauka Publ., 2007, 523 p.

**Butina T.A.** Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Bauman Moscow State Technical University. Specialises in strength and stability of deformable systems.  
e-mail: butina\_ta@mail.ru

**Dubrovin V.M.**, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Bauman Moscow State Technical University; a specialist in the field of of strength and stability of deformable systems.  
e-mail: dubrovinvm1934@yandex.ru