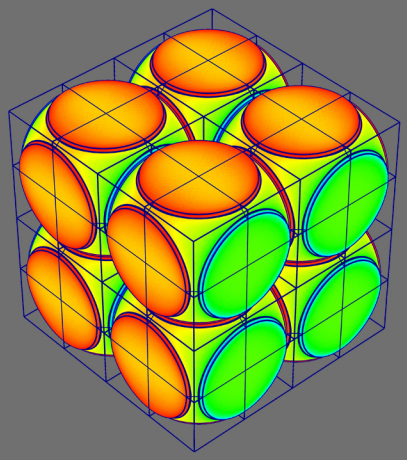
ISSN 2309-3684



# Математическое моделирование и численные методы

Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю.
Механический аналог, моделирующий процессы неупругого неизотермического деформирования. Математическое моделирование и численные методы, 2014, №3 (3), с. 25-38

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/19/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.210
01.02.2026 13:55:51

УДК 517.1; 539.434

# Механический аналог, моделирующий процессы неупругого неизотермического деформирования

© В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Представлен механический аналог, позволяющий на качественном и количественном уровнях описать основные особенности неупругого деформирования конструкционного материала при переменных температурах. Аналог построен с использованием физических представлений о микроструктуре поликристаллических конструкционных материалов и микромеханизме процесса их деформирования в сочетании с известными положениями феноменологических теорий пластичности и ползучести. Применительно к конкретным режимам теплового и механического воздействий на теплонапряженную конструкцию такой подход позволяет выбрать рациональный вариант модели конструкционного материала, достаточно полно описывающий наиболее существенные эффекты, характерные для процесса неупругого неизотермического деформирования. Разработан один из вариантов такой модели при одноосном нагружении материала и приведен пример подбора числовых значений ее параметров.*

***Ключевые слова:*** *механический аналог, математическая модель, неупругое неизотермическое деформирование, одноосное нагружение.*

**Введение.** Для многих областей техники характерны конструкции, работающие в условиях интенсивных тепловых и механических воздействий. При этом деформирование конструкционных материалов происходит в неупругой области и сопровождается изменением во времени их температурного состояния. Работоспособность и долговечность таких теплонапряженных конструкций зависит от ряда взаимосвязанных факторов, являющихся предметом изучения различных разделов механики, — теорий теплопроводности, термоупругости, пластичности и ползучести, механики разрушения и др. Однако особенности работы теплонапряженных конструкций требуют, как правило, совместного рассмотрения упомянутых разделов механики и использования их положений при разработке математических моделей процессов деформирования указанных конструкций. Один из подходов к разработке таких моделей связан с построением механического аналога, моделирующего процессы деформирования поликристаллических конструкционных материалов в условиях переменных температур. При построении такого аналога наряду с известными положениями феноменологических теорий пластичности и ползучести целесообразно использовать сведения о микроструктуре материалов и микромеханизме процесса их деформирования.

**Микромеханизм неупругого деформирования.** В результате теоретического и экспериментального изучения неупругого дефор-

мирования кристаллических тел установлено, что один из основных микромеханизмов этого процесса связан с движением таких дефектов в структуре кристаллов, которыми являются дислокации [1–4]. Это движение происходит под действием касательных напряжений в плоскостях скольжения, соответствующих плоскостям кристаллографической решетки с наиболее плотной упаковкой атомов, по направлениям, в которых расстояния между атомами являются наименьшими. Сочетание плоскости скольжения с каждым из таких направлений образует систему скольжения дислокации. Например, в кристаллах с гранецентрированной кубической (ГЦК) решеткой можно выделить 12 независимых систем скольжения вдоль диагоналей граней кубического повторяющегося элемента этой решетки. Другие типы кристаллической решетки имеют меньшее число систем скольжения, что объясняет при прочих равных условиях более высокую склонность к неупругому деформированию материалов с ГЦК кристаллической решеткой.

Вклад движения дислокаций в неупругое поведение материала можно разделить на мгновенную пластическую деформацию и деформацию ползучести [5]. Для кристаллов металлов без примесей касательное напряжение $\tau_*$ в системе скольжения, достаточное для начала движения дислокации сразу после начала нагружения, на несколько порядков меньше модуля сдвига $\mu$ [6]. При наличии в основном металле примесей (в том числе из легирующих элементов) атомы примесей взаимодействуют с дислокациями, что приводит к возникновению около дислокаций «облаков» из атомов этих примесей и является одной из причин возрастания $\tau_*$. Внешняя приложенная нагрузка может оказаться недостаточной, чтобы в системе скольжения возникло касательное напряжение $\tau \geqslant \tau_*$, позволяющее вырвать дислокацию из такого «облака» и обеспечить ее движение. Но перемещение дислокации возможно и при $\tau < \tau_*$ вместе с «облаком» благодаря диффузии образующих его атомов примесей. В отличие от мгновенной пластической деформации, связанной с движением свободной дислокации, перемещение вместе с «облаком» приводит к деформации ползучести и становится более интенсивным с повышением температуры в связи с ускорением процесса диффузии.

Повышение температуры вызывает уменьшение концентрации атомов примесей в каждом «облаке» и более равномерное их распределение по объему кристалла. Однако при резком повышении температуры $T$ изменение $\tau_*$ запаздывает по времени $t$ по сравнению с изменением $T$. Запаздывание $\tau_*$ по сравнению с установившимся значением $\tau_*^\circ(T)$ для фиксированной температуры $T$ можно в первом приближении описать

уравнением [7] $t_\tau \exp\left(Q_\tau / (k_B T)\right) d\tau_* / dt + \tau_* = \tau_*^\circ(T)$, где $t_\tau$ — коэффициент, выполняющий роль постоянной времени процесса диффузии атомов примесей; $Q_\tau$ — энергия активации этого процесса; $k_B$ — постоянная Больцмана, $k_B \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

По мере накопления неупругой деформации вследствие торможения дислокаций перед препятствиями их движению в системах скольжения возникает встречное касательное напряжение $\tau'$, которое можно считать пропорциональным деформации сдвига $\gamma$ с коэффициентом пропорциональности $\mu'(T)$, зависящим от температуры. При этом для продолжения движения дислокаций в системе скольжения необходимо касательное напряжение $\tau \geqslant \tau^*$, где $\tau^* = \tau_* + \mu'(T)\gamma$ — напряжение, определяющее анизотропное деформационное упрочнение материала по мере накопления неупругой деформации. Кроме того, наличие встречного касательного напряжения в системе скольжения является первопричиной возникновения известного эффекта Баушингера, состоящего в снижении сопротивления деформированию при смене направления нагружения материала, когда это напряжение уже не препятствует движению дислокаций, а совпадает по направлению с напряжением, вызванным внешней нагрузкой. Эффект Баушингера можно рассматривать как проявление памяти материала об «истории» процесса деформирования.

Другой причиной возрастания $\tau^*$ по сравнению с исходным значением $\tau_*$ является препятствие движению дислокаций в виде пространственной дислокационной сетки. Для начала движения участка дислокации, концы которого закреплены в узлах этой сетки со средним размером $l$ ее ячейки, необходимо выполнение условия $\tau \geqslant \tau_* + \tau_{cr}$, где $\tau_{cr}$ — касательное напряжение, обратно пропорциональное $l$. Значение $\tau_{cr}$ является характеристикой источника дислокаций в виде расширяющихся петель в плоскости скольжения [2]. Часть дислокаций, возникших в результате работы такого источника, присоединяются к дислокационной сетке, уменьшая значение $l$ по мере увеличения $\gamma$, что в итоге приводит к возникновению изотропного упрочнения материала, не зависящего от направления внешней нагрузки.

С повышением температуры заторможенные дислокации благодаря диффузионным процессам могут выходить из скоплений перед препятствиями, что ведет к постепенному уменьшению $\tau'$ и возобновлению движения дислокаций в системе скольжения даже при фиксированном значении $\tau$ касательного напряжения, создаваемого приложенной нагрузкой. При повышенной температуре процесс ре-

лаксации напряжения $\tau'$ в системе скольжения может происходить и после снятия нагрузки, что приводит к снижению анизотропного упрочнения и ослаблению эффекта Баушингера. Благодаря тепловому возбуждению атомов часть дислокаций освобождается от закрепления в узлах дислокационной сетки, что вызывает снижение изотропного упрочнения. Эти процессы характеризуют так называемый возврат (или отдых) [8], когда материал как бы «забывает» историю своего деформирования.

Помимо диффузионного механизма выхода дислокаций из скоплений перед препятствиями путем «переползания» в параллельные плоскости скольжения в кристаллах металлов благодаря наличию пересекающихся плоскостей скольжения возможен обход препятствий путем расщепления (диссоциации) дислокаций и их перехода в свободные для движения системы скольжения. Расщепление дислокации (как и ее «переползание») связано с тепловым возбуждением атомов, необходимым для преодоления определенного энергетического барьера, характеризуемого энергией активации $Q$. Вероятность осуществления расщепления или «переползания» дислокации, а значит, и скорость этих процессов пропорциональны множителю $\exp\left(-Q/(k_B T)\right)$. Но тепловое возбуждение связано с хаотическим движением атомов и поэтому не может вызвать направленного перемещения дислокаций. Вероятности «переползания» дислокации в свободную плоскость скольжения и обратно в скопление под действием только теплового возбуждения одинаковы. Также одинаковы вероятности расщепления дислокации и объединения ее расщепленных составляющих. Преимущественная направленность этих процессов зависит от действующего на дислокацию касательного напряжения $\tau_d$.

Когда дислокация покидает скопление, его энергия уменьшается на величину $\Delta U = v\tau_d$ [7], где $v$ — коэффициент пропорциональности, называемый активационным объемом. Если же дислокация возвращается в скопление, то его энергия возрастает на эту же величину $\Delta U$. Следовательно, вероятность осуществления первого процесса пропорциональна $\exp\left(-(Q-\Delta U)/(k_B T)\right)$, а вероятность второго — $\exp\left(-(Q+\Delta U)/(k_B T)\right)$. В итоге вероятность направленного движения дислокации пропорциональна разности

$$\exp\left(-\frac{Q-\Delta U}{k_B T}\right)-\exp\left(-\frac{Q+\Delta U}{k_B T}\right)=2\exp\left(-\frac{Q}{k_B T}\right)\operatorname{sh}\frac{v\tau_d}{k_B T}. \qquad (1)$$

Для дислокации в скоплении значению $\tau_d$ соответствует встречное напряжение $\tau'$, а для дислокации перед препятствием в виде пространственной дислокационной сетки — разность напряжений $\tau-\tau'$ [7].

**Элементы механического аналога.** Для отражения описанных выше процессов движения дислокаций можно построить механический аналог, состоящий из пружины *1* с линейной характеристикой, двух нелинейных элементов *2* и *3* вязкого трения и элемента *4* сухого трения (рис. 1). В случае затвердевания жидкости в элементах *2* и *3* перемещение *u* точки приложения силы *P*, являющейся аналогом касательного напряжения $\tau$, возникшего при нагружении материала в системе скольжения, моделирует мгновенную пластическую деформацию. При этом натяжение $P'$ пружины будет пропорционально встречному касательному напряжению $\tau'$ в скоплении дислокации перед препятствием их движению, а сила $P_*$ сопротивления при движении элемента сухого трения относительно направляющих — касательному напряжению $\tau_*$.

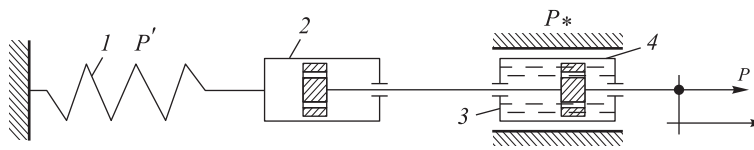



**Рис. 1.** Механический аналог процесса неупругого деформирования

При фиксированном значении *u* и конечной вязкости жидкости в элементе *2* перемещение по времени поршня относительно цилиндра этого элемента моделирует процесс релаксации напряжения $\tau'$. Тогда в случае $\tau_* < \tau = \text{const}$, что соответствует для аналога условию $P_* < P = \text{const}$, при затвердевшей жидкости в элементе *3* в аналоге одновременно происходят процессы релаксации натяжения пружины и восстановления этого натяжения благодаря приращению перемещения *u* за счет движения элемента сухого трения. Эта ситуация соответствует процессу установившейся ползучести, когда скорость ползучести остается постоянной.

При конечной вязкости жидкости в обоих элементах вязкого трения аналог моделирует процесс установившейся ползучести и в случае $\tau_* > \tau = \text{const}$ $(P_* > P = \text{const})$, когда элемент сухого трения остается неподвижным, т. е. приращение мгновенной пластической деформации отсутствует. Тогда наступлению установившейся стадии ползучести предшествует период времени, в течение которого происходит выравнивание скоростей относительного перемещения поршней в элементах *2* и *3*. Этот период времени соответствует неустановившейся стадии с убывающей скоростью $d\gamma_c / dt$ деформации ползучести [5], причем эта скорость будет пропорциональна величине, определяемой соотношением (1). В рассматриваемом случае

обе стадии ползучести можно описать двумя дифференциальными уравнениями [7, 9]:

$$\dot{\gamma}_c = \nu_\gamma \exp\left(-\frac{Q}{k_B T}\right) \mathrm{sh}\, v \frac{\tau - \tau'}{k_B T}; \quad \frac{\dot{\tau}'}{\mu'} = \frac{d\gamma_c}{dt} - \nu'_\gamma \exp\left(-\frac{Q'}{k_B T}\right) \mathrm{sh} \frac{v'\tau'}{k_B T}. \qquad (2)$$

Здесь $(\cdot) = d/dt$; $\nu_\gamma$ и $\nu'_\gamma$ — коэффициенты пропорциональности порядка наибольшей частоты колебаний атомов в кристаллической решетке; $Q$, $v$, $Q'$, $v'$ — энергии активации и активационные объемы соответственно при выходе дислокаций из скопления и при преодолении ими препятствия в виде дислокационной стенки.

В случае $\tau_* < \tau$ $(P_* < P = \mathrm{const})$ и конечной вязкости жидкости в элементах *2* и *3* механический аналог позволяет выявить взаимное влияние мгновенной пластической деформации и деформации ползучести и построить вариант модели неизотермического деформирования материала при одноосном нагружении.

**Модель деформирования материала при одноосном нагружении.** При сравнительно низких температурах, когда термически активируемые процессы протекают достаточно медленно (вязкость жидкости в элементах вязкого трения механического аналога, представленного на рис. 1, велика), приращение мгновенной пластической деформации возникает при условии

$$|\sigma - \sigma'| = \sigma_*, \qquad (3)$$

где $\sigma$ и $\sigma'$ — приложенное к образцу материала напряжение и среднее значение микронапряжений в материале, соответствующие на рис. 1 внешней силе $P$ и натяжению $P'$ пружины *1*, которая в общем случае может иметь нелинейную характеристику; $\sigma_*$ — предел текучести, отвечающий в аналоге силе сопротивления $P_*$ при движении элемента *4* сухого трения относительно направляющих. Примем, что $\sigma'$ зависит от температуры $T$ и мгновенной пластической деформации $\varepsilon_p$:

$$\sigma' = f'(T, \varepsilon_p); \quad \varepsilon_p = \int d\varepsilon_p, \qquad (4)$$

а $\sigma_*$ зависит от $T$ и абсолютной накопленной деформации $q_p$:

$$\sigma_* = f^*(T, q_p); \quad q_p = \int d|\varepsilon_p|. \qquad (5)$$

При этом функция $f'$ характеризует анизотропное упрочнение, а функция $f^*$ — изотропное.

Выполнение условия (3) необходимо, но недостаточно для возникновения приращения мгновенной пластической деформации. Это условие следует дополнить неравенством [7]

$$d'|\sigma-\sigma'|>d'\sigma_*, \tag{6}$$

где штрих у знака дифференциала означает, что бесконечно малые приращения вычислены без учета упрочнения, вызванного текущим пластическим деформированием, т. е. при $d\varepsilon_p=0$. Тогда с учетом соотношений (4) и (5) вместо неравенства (6) получим

$$(d\sigma-k_T\,dT)\mathrm{sign}(\sigma-\sigma')>k_T^*\,dT;\quad k_T=\partial f'/\partial T;\quad k_T^*=\partial f^*/\partial T. \tag{7}$$

При выполнении условия (3) замена в соотношении (7) знака «>» знаком «=» будет соответствовать нейтральному нагружению, а замена знаком «<» — началу упругой разгрузки материала. В обоих случаях приращения мгновенной пластической деформации не происходит, $d\varepsilon_p\equiv 0$.

Поскольку выполнение неравенства (3) является необходимым условием пластического деформирования, то, согласно формулам (4) и (5), справедливо равенство

$$\left(d\sigma-k_T\,dT-k_p\,d\varepsilon_p\right)\mathrm{sign}(\sigma-\sigma')=k_T^*\,dT+k_p^*\,dq_p,$$

где $k_p=\partial f'/\partial\varepsilon_p$ и $k_p^*=\partial f^*/\partial q_p$. Из сравнения этого равенства с неравенством (7) следует

$$k_p\,d\varepsilon_p\,\mathrm{sign}(\sigma-\sigma')+k_p^*\,dq_p>0. \tag{8}$$

Для устойчиво деформируемых материалов знак $d\varepsilon_p$ совпадает со знаком разности $\sigma-\sigma'$, т. е. с учетом формул (5) $d\varepsilon_p\mathrm{sign}(\sigma-\sigma')=|d\varepsilon_p|=dq_p$. Из двух последних соотношений получим ограничение для коэффициентов упрочнения в виде

$$k_p+k_p^*=\partial f'/\partial\varepsilon_p+\partial f^*/\partial q_p>0. \tag{9}$$

В частном случае для материала, обладающего изотропным разупрочнением ($k_p<0$), устойчивое пластическое деформирование возможно, если $k_p>|k_p^*|$. В предельном случае $k_p=|k_p^*|$, как и для идеально пластичного материала с постоянным пределом текучести, установление однозначной связи между $d\sigma$ и $d\varepsilon_p$ возможно лишь при наличии дополнительных условий.

С повышением температуры происходит интенсификация термически активируемых процессов и даже при неизменных во времени условиях теплового и механического воздействий возникает приращение

неупругой деформации материала вследствие эффекта ползучести. Скорость деформации ползучести представим в виде $d\varepsilon_c / dt = f_c(T, \sigma - \sigma')$.

В механическом аналоге (см. рис. 1) явлению ползучести соответствует конечная вязкость жидкости в нелинейных элементах *2* и *3* вязкого трения, причем функция $f_c$ отвечает характеристике элемента *3*. Термическое разупрочнение материала вызывает уменьшение $\sigma'$ по абсолютному значению, причем для неизотермических условий

$$\dot{\sigma}' = k_T \dot{T} + k_p \dot{\varepsilon}_p + k_c f_c(T, \sigma - \sigma') - f''(T, \sigma'); \quad k_c = \partial f_c'(T, \varepsilon_c) / \partial \varepsilon_c . \quad (10)$$

В частном случае $k_c = k_p$ при одинаковом микромеханизме анизотропного упрочнения материала вследствие мгновенной пластической деформации $\varepsilon_p$ и деформации ползучести $\varepsilon_c$. Функция $f''$ определяет скорость снятия анизотропного упрочнения материала благодаря релаксации микронапряжений и соответствует характеристике элемента *2* вязкого трения (см. рис. 1).

При высоких температурах процесс термического разупрочнения материала влияет и на значение $\sigma^*$. При достаточно длительной выдержке образца материала в изотермических условиях ($\dot{T} = 0$) без неупругого деформирования ($\dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_c = 0$) значение $\sigma^*$ должно стремиться к характерному для данного материала уровню $\sigma_0^*(T)$, который соответствует пределу текучести после высокотемпературного отжига [8]. Этот процесс можно описать следующим образом:

$$\dot{\sigma}^* = k_T^* \dot{T} + k_p^* \dot{q}_p + k_c^* \dot{q}_c - f^{**}(T, \sigma^* - \sigma_0^*); \; k_c^* = \partial f_c^*(T, q_c) / \partial q_c ;$$

$$q_c = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_c| dt. \quad (11)$$

В частном случае при одинаковом микромеханизме изотропного упрочнения материала вследствие накопленных значений мгновенной пластической деформации $q_p$ и деформации ползучести $q_c$ имеем $k_p^* = k_c^*$. Функция $f^{**}$ определяет скорость снятия изотропного упрочнения, а также позволяет учесть эффект запаздывания во времени изменения предела текучести по отношению к изменению температуры. В дополнение к необходимому условию (3) вместо неравенства (7) с учетом соотношений (10) и (11) получим

$$\left(\dot{\sigma} - k_T \dot{T} - k_c \dot{\varepsilon}_c + f''(T, \sigma')\right) \mathrm{sign}(\sigma - \sigma') > k_T^* \dot{T} + k_c^* \dot{q}_c - f^{**}(T, \sigma^* - \sigma_0^*).$$

При этом остается в силе ограничение (9).

Таким образом, представленный вариант модели материала описывает основные эффекты, которые характерны для неупругого по-

ведения конструкционного материала в неизотермических условиях. Среди этих эффектов следует отметить: изменение предела текучести при изменении направления деформирования (эффект Баушингера); изотропное упрочнение и разупрочнение материала; неустановившуюся и установившуюся стадии ползучести при постоянной нагрузке; взаимное влияние деформации ползучести и мгновенной пластической деформации; обратную ползучесть в процессе разгрузки и в разгруженном состоянии; релаксацию микронапряжений и возврат пластических свойств (отдых материала); запаздывание изменения предела текучести в неизотермических условиях.

**Идентификация параметров модели.** Для подбора числовых значений параметров представленной модели необходим сравнительно небольшой объем экспериментальных данных, полученных при стандартных испытаниях образцов материала при одноосном нагружении. Физические представления о микромеханизме неупругого деформирования кристаллических тел позволяют конкретизировать функции $f_c$, $f''$ и $f^{**}$ и тем самым упростить подбор числовых значений параметров. Эти функции можно представить в виде двух сомножителей. По аналогии с соотношениями (2) один из параметров зависит лишь от температуры, а второй может быть представлен в виде гиперболического синуса, аргумент которого зависит от соответствующего напряжения и температуры:

$$f_c = A(T)\mathrm{sh}\left(B(T)\frac{\sigma-\sigma'}{\sigma^*}\right); \quad f'' = A'(T)\mathrm{sh}\left(B'(T)\frac{\sigma'}{\sigma^*}\right);$$

$$f^{**} = A^*(T)\mathrm{sh}\left(B^*(T)\frac{\sigma^*-\sigma_0^*}{\sigma^*}\right),$$

где $A(T)$, $A'(T)$, $A^*(T)$, $B(T)$, $B'(T)$, $B^*(T)$ — функции температуры $T$, подбираемые по результатам испытаний образцов материала.

Если допустимо принять влияние мгновенной пластической деформации и деформации ползучести на упрочнение материала одинаковым, т. е. $k_p = k_c$ и $k_p^* = k_c^*$, а также положить $A'(T) = A(T)$ и $B'(T) = B(T)$, то число подбираемых параметров заметно уменьшается. Для их подбора достаточно диаграмм растяжения образцов при различных температурах и кривых ползучести в интервалах ожидаемого изменения напряжений и температур, а для разделения эффектов изотропного и анизотропного упрочнения — данных знакопеременного малоциклового нагружения [10–12]. Параметры функции $f^{**}$ можно подобрать по данным о скорости рекристаллизации при отжиге и времени запаздывания изменения предела текучести в неизотермических условиях.

В случае циклически стабильных материалов, не проявляющих изотропного упрочнения или разупрочнения ($k_p^* = k_c^* = 0$ и $f^{**} = 0$), подбор ограничен функциями $k_p$, $k_T$, $k_T^*$ и $A(T)$, $B(T)$. Для подбора $k_p$, $k_T$ и $k_T^*$ необходимо располагать диаграммами растяжения в ожидаемом диапазоне изменения температуры, полученными при достаточно высокой скорости нагружения, чтобы свести к минимуму влияние эффекта ползучести. Эти диаграммы можно аппроксимировать за пределом текучести $\sigma^* = f^*(T)$ зависимостями вида $\sigma(\varepsilon_p, T) = \sigma^* + \sigma' = f^*(T) + f'(T, \varepsilon_p)$. Например, для сплава на основе меди в диапазоне значений температуры 673…1073 K, используя результаты экспериментов [13], можно принять [7]:

$$\sigma^*(T) = 32(1-(T-673\hat{E})\,0{,}000882\,\hat{E}^{-1});$$

$$k_p(T) = 1440(1-(T-673\hat{E})\,0{,}00153\,\hat{E}^{-1});$$

$$E(T) = 1{,}09\cdot 10^5(1-(T-673\hat{E})\,0{,}000367\,\hat{E}^{-1}),$$

где $E(T)$ — зависящий от температуры модуль упругости, используемый при обработке исходных экспериментальных данных.

Для подбора функций $A(T)$ и $B(T)$ достаточно располагать кривыми ползучести, по которым можно найти значения скорости ползучести $\dot{\varepsilon}_c^{\infty}(\sigma,T)$ на установившейся стадии при заданных значениях $\sigma$ и $T$. При этом $\sigma'_{\infty} = \sigma/2$, тогда при фиксированной температуре $T$ из равенства

$$\dot{\varepsilon}_c^{\infty}(\sigma_1,T)\mathrm{sh}\left(B(T)\frac{\sigma_2}{2\sigma^*(T)}\right) = \dot{\varepsilon}_c^{\infty}(\sigma_2,T)\mathrm{sh}\left(B(T)\frac{\sigma_1}{2\sigma^*(T)}\right)$$

по значениям $\dot{\varepsilon}_c^{\infty}(\sigma_1,T)$ и $\dot{\varepsilon}_c^{\infty}(\sigma_2,T)$ при двух значениях $\sigma_1$ и $\sigma_2$ напряжения $\sigma$ можно найти $B(T)$, а затем вычислить $A(T)$ по формуле

$$A(T) = \dot{\varepsilon}_c^{\infty}(\sigma_1,T)\mathrm{sh}\left(B(T)\frac{\sigma_2}{2\sigma^*(T)}\right) = \dot{\varepsilon}_c^{\infty}(\sigma_2,T)\mathrm{sh}\left(B(T)\frac{\sigma_1}{2\sigma^*(T)}\right).$$

Для рассматриваемого сплава на основе меди из экспериментальных кривых ползучести в диапазоне значений температуры 673…1073 K следует $B(T) \approx 7{,}5 = \mathrm{const}$, а для $A(T)$ в этом диапазоне можно использовать аппроксимацию [7] $A(T) = \exp(T/40 + 10\,600/T - 46{,}4)$ $\mathrm{c}^{-1}$.

На рис. 2 для сравнения приведены экспериментальные кривые ползучести (сплошные линии) и результаты расчетов (штрихпунк-

тирные линии) с использованием подобранных выше параметров при температуре 873 K для двух значений растягивающего напряжения $\sigma$. Согласование расчетных зависимостей и экспериментальных кривых можно считать приемлемым, учитывая неизбежный разброс результатов опытов (полоса разброса при напряжении 37,2 МПа на рисунке заштрихована).

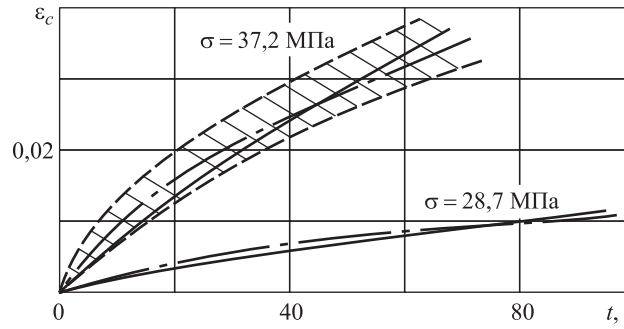



**Рис. 2.** Экспериментальные и расчетные кривые ползучести

**Заключение.** Использование физических представлений о микроструктуре поликристаллических конструкционных материалов и микромеханизме процесса их деформирования в сочетании с установившимися положениями феноменологических теорий пластичности и ползучести позволило построить механический аналог, который может служить основой для разработки адекватных математических моделей, описывающих неупругое деформирование материала в неизотермических условиях. Представлен вариант такой модели в случае одноосного нагружения материала и проведена идентификация ее параметров на примере сплава на основе меди.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ 255.2012.8), гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (проект МК 6618.2013.8) и проекта № 1.2640.2014 в рамках реализации государственного задания.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Новиков И.И. *Дефекты кристаллического строения металлов.* Москва, Металлургия, 1983, 232 с.

[2] Келли А., Гровс Г. *Кристаллография и дефекты в кристаллах.* Пер. с англ. Москва, Мир, 1974, 496 с.

[3] Полухин П.И., Горелик С.С., Воронцов В.К. *Физические основы пластической деформации.* Москва, Металлургия, 1982, 584 с.

[4] Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела.* Москва, Наука, 1988, 712 с.
[5] Малинин Н.Н. *Прикладная теории пластичности и ползучести.* Москва, Машиностроение, 1975, 400 с.
[6] Штремель М.А. *Прочность сплавов. Ч. 1. Дефекты решетки*. Москва, Металлургия, 1982, 280 с.
[7] Зарубин В.С. *Прикладные задачи термопрочности элементов конструкций.* Москва, Машиностроение, 1985, 296 с.
[8] Арзамасов Б.Н., ред. *Научные основы материаловедения.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994, 366 с.
[9] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 512 с.
[10] Гусенков А.П. *Прочность при изотермическом и неизотермическом малоцикловом нагружении.* Москва, Наука, 1979, 296 с.
[11] Махутов Н.А., Гаденин М.М., Гохфельд Д.А. и др. *Уравнения состояния при малоцикловом нагружении.* Москва, Наука, 1981, 344 с.
[12] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–18.
[13] Зарубин В.С., Кузьмин М.А. Расчетная модель неизотермического деформирования конструкционных материалов. *Изв. вузов. Машиностроение*, 1967, № 8, с. 31–35.

Статья поступила в редакцию 05.11.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Механический аналог, моделирующий процессы неупругого неизотермического деформирования. *Математическое моделирование и численные методы,* 2014, № 3, с. 25–38.

**Зарубин Владимир Степанович** родился в 1933 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1957 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, заслуженный деятель науки и техники РФ, лауреат премии правительства РФ в области науки и техники. Автор более 300 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций. e-mail: fn2@bmstu.ru

**Кувыркин Георгий Николаевич** родился в 1946 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1970 г. Д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, лауреат премии правительства РФ в области науки и техники. Автор более 200 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций. e-mail: fn2@bmstu.ru

**Савельева Инга Юрьевна** родилась в 1985 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2008 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций. e-mail: fn2@bmstu.ru

# Mechanical analog modeling of the inelastic non-isothermal deformation processes

© V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Yu. Savelyeva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The mechanical analog, allowing qualitatively and quantitatively describe the main features of inelastic deformation of the structural material at varying temperatures is presented. Analog is constructed using physical conceptions of polycrystalline structural material microstructures and the micromechanism of deformation process in combination with known provisions of the phenomenological theory of plasticity and creep. In the context of the particular modes of thermal and mechanical impacts on a heat-stressed structure this approach allows choosing a rational option of the structural material model adequately describing the most essential effects specific for the process of inelastic non-isothermal deformation. A variant of such a model under material single-axis loading is developed and an example of its parameter numerical values selection is presented.*

***Keywords:*** *mechanical analog, mathematical model, inelastic non-isothermal deformation, single-axis loading.*

REFERENCES

[1] Novikov I.I. *Defekty kristallicheskogo stroeniya metallov* [Defects of a crystal structure of metals]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1983, 232 p.

[2] Kelly A., Groves G.W. *Crystallography and Crystal Defects.* Longman, London, 1970. [Russian edition: Kelly A., Groves G.W. *Kristallografia i defekty v kristallah*. Moscow, Mir Publ., 1974, 496 p.

[3] Polukhin P.I., Gorelik S.S., Vorontsov V.K. *Fizicheskie osnovy plasticheskoy deformatsii* [Physical bases of plastic deformation]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1982, 584 p.

[4] Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable solid body]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 712 p.

[5] Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied plasticity and creep theory]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 400 p.

[6] Shtremel M.A. *Prochnost splavov. Chast' 1. Defekty reshetki* [Durability of alloys. Part 1. Defects of a lattice]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1982, 280 p.

[7] Zarubin V.S. *Prikladnye zadachi termoprochnosti elementov konstruktsiy* [Applied problems of thermodurability of structure elements]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985, 296 p.

[8] Arzamasov B.N., ed. *Nauchnye osnovy materialovedeniya* [Scientific bases of materials science]. Moscow, BMSTU Publ., 1994, 366 p.

[9] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Mathematical models of continuum mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2008, 512 p.

[10] Gusenkov A.P. *Prochnost pri izotermicheskom i neizotermicheskom malotsiklovom nagruzhenii* [Durability at isothermal and non-isothermal low-cyclic loading]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 296 p.

[11] Makhutov N.A., Gadenin M.M., Gokhfeld D.A. *Uravneniya sostoyaniya pri malotsiklovom nagruzhenii* [The state equations at low-cyclic loading]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 344 p.

[12] Zarubin V.S., Kuzmin M.A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — Proceedings of Universities. Mechanical Engineering*, 1967, no. 8, pp. 31–35.

**Zarubin V.S.** (b. 1933) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1957. Dr. Sci. (Eng.), professor of the Applied Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University. Honored Science and Technology Woker of the Russian Federation, laureate of the Russian Federation Government Prize in Science and Technology. Author of more than 300 publications in the field of mathematical modeling thermomechanical processes in materials and construction members. e-mail: fn2@bmstu.ru

**Kuvyrkin G.N.** (b. 1946) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1970. Dr. Sci. (Eng.), professor, head of the Applied Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University. Laureate of the Russian Federation Government Prize in Science and Technology. Author of more than 200 publications in the field of applied mathematics and mathematical modeling thermomechanical processes in materials and construction members. e-mail: fn2@bmstu.ru

**Savelyeva I.Yu.** (b. 1985) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2008. Ph. D., assoc. professor of the Applied Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of mathematical modeling thermomechanical processes in materials and construction members. e-mail: fn2@bmstu.ru