ISSN 2309-3684

Математическое моделирование и численные методы

Полянин А.Д. Методы функционального разделения переменных и их применение в математической физике. Математическое моделирование и численные методы, 2019, № 1, с. 65–97.

УДК 517.9 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-1-6597

Методы функционального разделения переменных и их применение в математической физике

© А.Д. Полянин[1,2,3]

[1]ИПМех РАН, Москва, 119526, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[3]НИЯУ МИФИ, Москва, 115409, Россия

Дан краткий обзор существующих модификаций метода функционального разделения переменных. Предлагается новый более общий подход для построения точных решений нелинейных уравнений математической физики и механики, который основан на неявных преобразованиях интегрального типа в комбинации с использованием принципа расщепления. Эффективность такого подхода иллюстрируется на нелинейных диффузионных уравнениях, которые содержат реакционные и конвективные члены с переменными коэффициентами. Основное внимание сосредоточено на уравнениях достаточно общего вида, которые зависят от двух или трех произвольных функций (подобные нелинейные уравнения представляют наибольшие трудности для анализа). Описано много новых точных решений с функциональным разделением переменных и решений типа обобщенной бегущей волны. Полученные решения могут быть использованы для тестирования различных численных и приближенных аналитических методов математической физики.

Ключевые слова: *нелинейные уравнения математической физики, функциональное разделение переменных, обобщенное разделение переменных, точные решения, нелинейные реакционно-диффузионные уравнения.*

Введение. Методы обобщенного и функционального разделения переменных (и их различные модификации) относятся к наиболее эффективным методам построения точных решений различных классов нелинейных уравнений математической физики и механики (включая уравнения с частными производными достаточно общего вида, которые зависят от произвольных функций). В [1–23] путем применения этих методов было получено много точных решений уравнений теории тепло- и массопереноса, теории волн, нелинейной оптики, гидродинамики, газовой динамики и математической биологии.

Для определенности далее будем рассматривать нелинейные уравнения математической физики с двумя независимыми переменными

$$F(x,t,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\ldots)=0, \tag{1}$$

где $u=u(x,t)$ — искомая функция.

Использование методов обобщенного и функционального разделения переменных основано на априорном задании структурного вида искомой переменной u, которая зависит от несколько свободных функций (конкретный вид этих функций определяется далее путем анализа возникающих функционально-дифференциальных уравнений). Часто (в узком смысле) термин "решение с функциональным разделением переменных" используется при построении точных решений вида (см., например, [1–3, 6, 7, 12])

$$u = \varphi(z), \quad z = \xi(x) + \eta(t),$$

где функции $\varphi(z)$, $\xi(x)$, $\eta(t)$ находятся в процессе последующего исследования (иногда функция $\varphi(z)$ задается из априорных соображений, а функции $\xi(x)$ и $\eta(t)$ ищутся [13, 16]).

Важно отметить, что при функциональном разделении переменных поиск точных решений вида $u = \varphi(\xi(x)\eta(t))$ и $u = \varphi(\xi(x) + \eta(t))$ приводит к одинаковым результатам, поскольку справедливо представление $\varphi(\xi(x)\eta(t)) = \varphi_1(\xi_1(x) + \eta_1(t))$, где $\varphi_1(z) = \varphi(e^z)$, $\varphi_1(x) = \ln\varphi(x)$, $\psi_1(t) = \ln\psi(t)$ (здесь, без ограничения общности, считается, что $\varphi > 0$, $\psi > 0$).

Решения типа обобщенной бегущей волны вида $u = \varphi(z)$, где $z = \xi(t)x + \eta(t)$ также относят к решениям с функциональным разделением переменных [12, 16].

В [18–20] был описан новый прямой метод построения точных решений с функциональным разделением переменных, основанный на поиске решений в неявной форме

$$\int \zeta(u)\,du = \xi_1(x)\eta(t) + \xi_2(x), \tag{2}$$

где функции $\zeta(u)$, $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, $\eta(t)$ определяются методом расщепления в процессе дальнейшего анализа. Этот метод позволил найти более 40 точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений и уравнений типа Клейна–Гордона с переменными коэффициентами, зависящими от одной или нескольких произвольных функций. В [21] было показано, что некоторые из приведенных в [18, 19] решений нельзя получить с помощью метода неклассических симметрий [24–31] (см. также [12, 16]), основанного на использовании условия инвариантной поверхности (дифференциальной связи, эквивалентной соотношению (2)).

В общем случае решениями с функциональным разделением переменных уравнения (1) будем называть решения вида

$$u = \varphi(z), \quad z = Q(x, t), \tag{3}$$

где искомые функции $\varphi(z)$ и $Q(x,t)$ описываются соответственно переопределенными системами обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. В вырожденных случаях каждая из этих функций может описываться одним уравнением. Представление (3) было использовано в [22, 23] для построения точных решений с функциональным разделением переменных некоторых классов нелинейных реакционно-диффузионных и конвективно-диффузионных уравнений.

В данной работе для построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными предлагается использовать новый метод, основанный комбинации неявного нелинейного преобразования интегрального типа и обобщенного принципа расщепления. Такой подход технически более прост и удобен, чем поиск решения в виде (3); он обобщает зависимость (2) и позволяет единообразно находить различные решения, не задавая априорно их структуру.

Функциональное разделение переменных, основанное на нелинейных преобразованиях и принципе расщепления. Для построения точных решений уравнения (1) на начальном этапе используем нелинейное преобразование вида

$$\vartheta = \int \zeta(u)\,du, \tag{4}$$

где $\vartheta = \vartheta(x,t)$ и $\zeta = \zeta(u)$ — функции, которые ищутся в ходе дальнейшего анализа. После того, как эти функции будут определены, интегральное соотношение (4) будет задавать точное решение рассматриваемого уравнения в неявной форме.

Дифференцируя (4) по независимым переменным, находим частные производные

$$u_x = \frac{\vartheta_x}{\zeta}, \quad u_t = \frac{\vartheta_t}{\zeta}, \quad u_{xx} = \frac{\vartheta_{xx}}{\zeta} - \frac{\vartheta_x^2 \zeta_u'}{\zeta^3}, \quad \ldots \tag{5}$$

Будем считать, что после подстановки выражений (5) в (1) полученное уравнение можно преобразовать к билинейному виду:

$$\sum_{n=1}^{N} \Phi_n \Psi_n = 0, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \Phi_n(x, t, \vartheta_x, \vartheta_t, \vartheta_{xx}, \ldots), \\ \Psi_n &= \Psi_n(u, \zeta, \zeta_u', \zeta_{uu}'', \ldots). \end{aligned} \tag{7}$$

Для построения точных решений уравнения (6)–(7) используем принцип расщепления, описанный ниже.

Принцип расщепления. Рассматриваем линейные комбинации двух наборов элементов $\{\Phi_j\}$ и $\{\Psi_j\}$, входящих в (6), которые связаны соотношениями

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_{ni} \Phi_n = 0, \quad i = 1, \dots, l;$$
$$\sum_{n=1}^{N} \beta_{nj} \Psi_n = 0, \quad j = 1, \dots, m, \tag{8}$$

где $1 \le l \le N-1$ и $1 \le s \le N-1$. Константы α_{ni} и β_{nj} в (8) выбираются так, чтобы билинейное равенство (6) удовлетворялось тождественно (это всегда можно сделать, см. далее). Важно отметить, что соотношения (8) носят чисто алгебраический характер и не связаны с конкретным видом дифференциальных форм (7).

После получения соотношений (8) в них подставляются дифференциальные формы (7), что приводит к системам дифференциальных уравнений (часто переопределенным) для искомых функций $\vartheta = \vartheta(x,t)$ и $\zeta = \zeta(u)$, которые входят в (4).

Замечание 1. Необходимо отдельно рассмотреть также вырожденные случаи, когда, помимо линейных соотношений (8), некоторые дифференциальные формы Φ_n или Ψ_n равны нулю.

Замечание 2. Билинейные функционально-дифференциальные уравнения, внешне похожие на (6)–(7), возникают при поиске точных решений нелинейных уравнений математической физики методами обобщенного и функционального разделения переменных с априорно заданной структурой решения [12, 16]. Однако в данном случае имеется принципиальное отличие: дифференциальные формы Φ_n и Ψ_n (7) ввиду преобразования (4) зависят от одних и тех же независимых переменных x и t (при использовании методов обобщенного и функционального разделения переменных дифференциальные формы зависят от разных независимых переменных).

Формулы, позволяющие тождественно удовлетворить билинейному соотношению (6). 1. Для любых N билинейному соотношению (6) можно удовлетворить, если все Φ_i положить пропорциональными одному и тому же выбранному элементу Φ_j ($j \ne i$). В результате получим

$$\Phi_i = -A_i \Phi_j, \quad i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N;$$
$$\Psi_j = A_1 \Psi_1 + \dots + A_{j-1} \Psi_j + A_{j+1} \Psi_{j+1} + \dots + A_N \Psi_N, \tag{9}$$

где A_i — произвольные постоянные. В формулах (9) можно сделать переобозначения символов $\Phi_n \leftrightarrow \Psi_n$.

2. Для четных N равенство (6) удовлетворяется, если обращаются в нуль изолированные парные суммы $\Phi_i \Psi_i + \Phi_j \Psi_j = 0$. В этом случае

имеем соотношения

$$\Phi_i - A_{ij}\Phi_j = 0, \quad A_{ij}\Psi_i + \Psi_j = 0 \quad (i \neq j),$$

где A_{ij} — произвольные постоянные, а индексы i и j в совокупности принимают все значения от 1 до N.

3. При $N \geq 3$ равенство (6) также будет удовлетворяться тождественно, если задать линейные соотношения

$$\begin{aligned}
&\Phi_m - A_m\Phi_{N-1} - B_m\Phi_N = 0, \quad m = 1,2,\ldots,N-2;\\
&\Psi_{N-1} + A_1\Psi_1 + \cdots + A_{N-2}\Psi_{N-2} = 0,\\
&\Psi_N + B_1\Psi_1 + \cdots + B_{N-2}\Psi_{N-2} = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

где A_i и B_i — произвольные постоянные. В формулах (10) можно сделать переобозначения символов $\Phi_n \leftrightarrow \Psi_n$ или одновременные парные перестановки $\Phi_i \leftrightarrow \Phi_j$ и $\Psi_i \leftrightarrow \Psi_j$.

Для построения более сложных линейных комбинаций вида (8), тождественно удовлетворяющих билинейному соотношению (6) для любого N, можно использовать формулы для коэффициентов α_{ni} и β_{nj}, приведенные в книгах [12, 16] (в разделах, посвященных обобщенному разделению переменных).

Класс рассматриваемых уравнений. Преобразование к билинейному виду. Рассмотрим широкий класс нелинейных уравнений диффузии

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x + c(x)h(u), \tag{11}$$

которые содержат реакционные и конвективные члены с переменными коэффициентами.

Отметим, что точные решения некоторых более простых уравнений, принадлежащих классу (11), можно найти, например, в [7, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 22, 23, 26, 31–44].

Используя метод функционального разделения переменных, основанный на нелинейных преобразованиях и принципе расщепления, получим некоторые новые точные решения уравнений вида (11), в которых по крайней мере два функциональных коэффициента $a(x)$ и $f(u)$ будут заданы произвольно (а остальные через них выражаются). Далее для краткости аргументы функций, входящих в преобразование (4) и уравнение (11), часто будут опускаться.

Сделав замену (4), подставим производные (5) в (11). После элементарных преобразований получим

$$-\vartheta_t + (a\vartheta_x)_x f + a\vartheta_x^2 \left(\frac{f}{\zeta}\right)'_u + b\vartheta_x g + ch\zeta = 0. \tag{12}$$

При $\zeta = 1$ уравнение (12) совпадает с исходным уравнением (11), где $u = \vartheta$. Поэтому на данном этапе никакие решения не теряются.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -\vartheta_t, \quad \Phi_2 = (a\vartheta_x)_x, \quad \Phi_3 = a\vartheta_x^2, \quad \Phi_4 = b\vartheta_x, \quad \Phi_5 = c;\\ &\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = f, \quad \Psi_3 = (f/\zeta)'_u, \quad \Psi_4 = g, \quad \Psi_5 = h\zeta. \end{aligned} \tag{13}$$

В результате уравнение (12) можно представить в билинейной виде (6) при $N = 5$:

$$\sum_{n=1}^{5} \Phi_n \Psi_n = 0. \tag{14}$$

Ниже будут построены точные решения нелинейных уравнений вида (11), исходя из соотношений (13), (14), путем использования формул (9)–(10).

Решения с функциональным разделением переменных типа обобщенной бегущей волны.

Решение 1. Уравнению (14) можно тождественно удовлетворить, если использовать линейные соотношения

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -\Phi_5, \quad \Phi_2 = 0, \quad k\Phi_3 = -\Phi_4;\\ &\Psi_1 = \Psi_5, \quad \Psi_3 = k\Psi_4, \end{aligned} \tag{15}$$

где k — произвольная постоянная. Подставляя (13) в (15), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &\vartheta_t = c, \quad (a\vartheta_x)_x = 0, \quad ka\vartheta_x^2 = -b\vartheta_x;\\ &h\zeta = 1, \quad (f/\zeta)'_u = kg. \end{aligned} \tag{16}$$

Общее решение переопределенной системы, состоящей из первых трех уравнений (16), имеет вид

$$b(x) = b_0, \quad c(x) = c_0, \quad \vartheta(x,t) = c_0 t - \frac{b_0}{k}\int \frac{dx}{a(x)} + C_1, \tag{17}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, b_0, c_0, C_1 – произвольные постоянные. Общее решение системы, состоящей из двух последних уравнений (16), записывается так:

$$h = \frac{kG(u) + C_2}{f}, \quad \zeta = \frac{f}{kG(u) + C_2}, \quad G(u) = \int g(u)\,du, \tag{18}$$

где $f(u)$ и $g(u)$ — произвольные функции. Из формул (17) и (18) при $b_0 = c_0 = 1$ получим уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + g(u)u_x + \frac{kG(u)+C_2}{f(u)}, \tag{19}$$

которое допускает точное решение типа обобщенной бегущей волны в неявной форме

$$\int \frac{f(u)du}{kG(u)+C_2} = t - \frac{1}{k}\int \frac{dx}{a(x)} + C_1. \tag{20}$$

Отметим, что уравнение (19) содержит три произвольные функции $a(x)$, $f(u)$, $g(u)$ и две произвольные постоянные C_2, k.

Решение 2. Уравнению (14) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{gathered}\Phi_1 = -k_1\Phi_5, \quad \Phi_2 = -k_2\Phi_5, \quad \Phi_4 = -k_3\Phi_5; \\ \Psi_3 = 0, \quad \Psi_5 = k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2 + k_3\Psi_4,\end{gathered} \tag{21}$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Подставляя (13) в (21), имеем

$$\begin{gathered}\vartheta_t = k_1 c, \quad (a\vartheta_x)_x = -k_2 c, \quad b\vartheta_x = -k_3 c; \\ \left(f/\zeta\right)'_u = 0, \quad h\zeta = k_1 + k_2 f + k_3 g.\end{gathered} \tag{22}$$

Общее решение переопределенной системы, состоящей из первых трех уравнений (22), можно представить в виде

$$\begin{gathered}\vartheta(x,t) = c_0k_1t - c_0k_2\int \frac{x\,dx}{a(x)} - C_1\int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \\ b(x) = \frac{c_0k_3a(x)}{c_0k_2x + C_1}, \quad c(x) = x_0\end{gathered} \tag{23}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, c_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Из двух последних уравнений (22) получим

$$h = \frac{k_1}{f} + k_2 + k_3\frac{g}{f}, \quad \zeta = f, \tag{24}$$

где $f = f(u)$ и $g = g(u)$ — произвольные функции.

При $c_0 = k_3 = 1$ формулы (23) и (24) приводят к уравнению

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{a(x)}{k_2x + C_1}g(u)u_x + \frac{k_1 + k_2f(u) + g(u)}{f(u)},$$

которое имеет точное решение типа обобщенной бегущей волны

$$\int f(u)du = k_1 t - k_2 \int \frac{x\,dx}{a(x)} - C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2.$$

Решение 3. Уравнению (14) можно удовлетворить, если использовать линейные соотношения

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -\Phi_5, \quad \Phi_2 = -k\Phi_4; \\ &\Psi_1 = \Psi_5, \quad k\Psi_2 = \Psi_4, \quad \Psi_3 = 0, \end{aligned} \tag{25}$$

где k — произвольная постоянная. Подставляя (13) в (25), получим

$$\begin{aligned} &\vartheta_t = c, \quad (a\vartheta_x)_x = -kb\vartheta_x; \\ &h\zeta = 1, \quad kf = g, \quad (f/\zeta)'_u = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Общее решение переопределенной системы, состоящей из первых двух уравнений (26), имеет вид

$$\begin{aligned} &\vartheta(x,t) = c(x)t + s(x), \\ &c(x) = C_1 \int \exp\left(-k\int \frac{b}{a}dx\right)\frac{dx}{a} + C_2, \\ &s(x) = C_3 \int \exp\left(-k\int \frac{b}{a}dx\right)\frac{dx}{a} + C_4, \end{aligned} \tag{27}$$

где $a = a(x)$ и $b = b(x)$ — произвольные функции, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Общее решение системы, состоящей из трех последних уравнений (26), дается формулами

$$g = kf, \quad h = \frac{1}{f}, \quad \zeta = f. \tag{28}$$

Учитывая соотношения (27) и (28), получим уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + kb(x)f(u)u_x + \frac{c(x)}{f(u)}, \tag{29}$$

которое допускает точное решение в неявной форме

$$\int f(u)du = c(x)t + s(x). \tag{30}$$

Здесь $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, а функции $c(x)$ и $s(x)$ определены в (27). В частности, при $C_2 = \lambda$, $C_1 = 0$, $k = 1$ имеем уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)f(u)u_x + \frac{\lambda}{f(u)}, \tag{31}$$

которое имеет решение

$$\int f(u)du = \lambda t + C_3 \int \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right)\frac{dx}{a(x)} + C_4. \tag{32}$$

Решение 4. Уравнению (14) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{aligned} &\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_4 = 0, \quad \Phi_3 = -k\Phi_5; \\ &\Psi_2 = \Psi_1, \quad \Psi_4 = \Psi_1, \quad k\Psi_3 = \Psi_5, \end{aligned} \tag{33}$$

где k — произвольная постоянная. Подставляя (13) в (33), получим

$$\begin{aligned} &-\vartheta_t + (a\vartheta_x)_x + b\vartheta_x = 0, \quad a\vartheta_x^2 = -kc; \\ &f = g = 1, \quad k(f/\zeta)'_u = h\zeta. \end{aligned} \tag{34}$$

Первые два уравнения (34) допускают решение

$$\vartheta(x,t) = \lambda t + \int r(x)dx + C_1, \quad b = \frac{\lambda}{r} - \frac{(ar)'_x}{r}, \quad c = -\frac{ar^2}{k}, \tag{35}$$

где $a = a(x)$, $r = r(x)$ — произвольные функции, λ, C_1 — произвольные постоянные. Из последнего уравнения (34) имеем $k\zeta^{-3}\zeta'_u = -h$, что дает два решения

$$\zeta = \pm\left(\frac{2}{k}\int h du + C_2\right)^{-1/2}, \tag{36}$$

где $h = h(u)$ — произвольная функция, C_2 — произвольная постоянная.

Решение 5. Уравнению (14) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = \lambda\Phi_5, \quad \Phi_2 = k_1\Phi_5, \quad \Phi_4 = k_2\Phi_3; \\ &\lambda\Psi_1 + k_1\Psi_2 + \Psi_5 = 0, \quad \Psi_3 = -k_2\Psi_4, \end{aligned} \tag{37}$$

где k_1, k_2, λ — произвольные постоянные. Подставив (13) в (37), имеем

$$\begin{aligned} &\vartheta_t = -\lambda c, \quad (a\vartheta_x)_x = k_1 c, \quad b\vartheta_x = k_2 a\vartheta_x^2; \\ &\lambda + k_1 f + h\zeta = 0, \quad (f/\zeta)'_u = -k_2 g. \end{aligned} \tag{38}$$

Решение первых трех уравнений (38) имеет вид

$$\begin{aligned} &\vartheta(x,t) = -\lambda t + k_1\int\frac{xdx}{a(x)} + C_1\int\frac{dx}{a(x)} + C_2, \\ &b(x) = k_2(k_1 x + C_1), \quad c(x) = 1, \end{aligned} \tag{39}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Решение двух последних уравнений (38) определяется формулами

$$h = \frac{k_1 f + \lambda}{f}\left(k_2 \int g\,du + C_3\right), \quad \zeta = -f\left(k_2 \int g\,du + C_3\right)^{-1}, \tag{40}$$

где $f = f(u)$, $g = g(u)$ — произвольные функции, C_3 —произвольная постоянная.

Полагая $k_1 = k$, $k_2 = 1$ в (39), (40), приходим к уравнению

$$u_t = [a(x) f(u) u_x]_x + (kx + C_1) g(u) u_x + \frac{kf(u) + \lambda}{f(u)} G(u), \; G(u) = \int g(u)\,du + C_3,$$

где $a(x)$, $f(u)$, $g(u)$ — произвольные функции, C_1, C_3, k, λ — произвольные постоянные, которое допускает точное решение в неявной форме

$$\int \frac{f(u)}{G(u)}\,du = \lambda t - k\int \frac{x\,dx}{a(x)} - C_1 \int \frac{dx}{a(x)} - C_2,$$

Решение 6. Уравнение (14) становится тождеством, если

$$\begin{gathered} \Phi_2 = k_1 \Phi_5, \quad \Phi_3 = -k_2^2 \Phi_1, \quad \Phi_4 = -k_3 \Phi_1; \\ \Psi_5 = -k_1 \Psi_2, \quad \Psi_1 - k_2^2 \Psi_3 - k_3 \Psi_4 = 0, \end{gathered} \tag{41}$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Подставляя (13) в (41), получим

$$\begin{gathered} (a\vartheta_x)_x = k_1 c, \quad a\vartheta_x^2 = k_2^2 \vartheta_t, \quad b\vartheta_x = k_3 \vartheta_t; \\ h\zeta = -k_1 f, \quad 1 - k_2^2 (f/\zeta)'_u - k_3 g = 0. \end{gathered} \tag{42}$$

Решения первых трех уравнений (42) можно представить в виде

$$\vartheta(x,t) = \lambda t + k_2\sqrt{\lambda}\int \frac{dx}{\sqrt{a}} + C_1, \quad b(x) = \frac{k_3}{k_2}\sqrt{\lambda a}, \quad c(x) = \frac{k_2\sqrt{\lambda}}{2k_1}\frac{a'_x}{\sqrt{a}}, \tag{43}$$

где $a = a(x)$ — произвольная постоянная, C_1, λ — произвольные постоянные. Решение двух последних уравнений (42) определяется выражениями

$$g = \frac{1}{k_3}\left(1 + \frac{k_2^2}{k_1} h'_u\right), \quad \zeta = -k_1 \frac{f}{h}, \tag{44}$$

где $f = f(u)$ и $h = h(u)$ — произвольные функции.

Полагая $k_1 = k_3 = 1$, $k_2 = 1/\sqrt{\lambda}$, $C_2 = -C$ в (43), (44), приходим к уравнению

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \sqrt{a(x)}[\lambda + h'_u(u)]u_x + \frac{1}{2}\frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}}h(u), \tag{45}$$

которое содержит три произвольные функции $a(x)$, $f(u)$, $h(u)$ и имеет точное решение

$$\int \frac{f(u)}{h(u)}du = -\lambda t - \int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C. \tag{46}$$

Решение 7. Уравнению (14) можно удовлетворить, если использовать линейные соотношения

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -k_1\Phi_4, \quad \Phi_2 = -k_2\Phi_4, \quad \Phi_3 = -\Phi_5; \\ &\Psi_4 = k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2, \quad \Psi_3 = \Psi_5, \end{aligned} \tag{47}$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные. Подставив (13) в (47), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &\vartheta_t = k_1 b\vartheta_x, \quad (a\vartheta_x)_x = -k_2 b\vartheta_x, \quad a\vartheta_x^2 = -c; \\ &g = k_1 + k_2 f, \quad (f/\zeta)'_u = h\zeta. \end{aligned} \tag{48}$$

Решения первых трех уравнений (48) имеют вид

$$\begin{aligned} &\vartheta(x,t) = \lambda t - \frac{k_2\lambda}{k_1}\int \frac{x + C_1}{a(x)}dx + C_2, \\ &b(x) = -\frac{a(x)}{k_2(x + C_1)}, \quad c(x) = -\frac{k_2^2\lambda^2(x + C_1)^2}{k_1^2 a(x)}, \end{aligned} \tag{49}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Последние два уравнения (48) дают два решения

$$g(u) = k_1 + k_2 f(u), \quad \zeta(u) = \pm f(u)\left(2\int f(u)h(u)du + C_3\right)^{-1/2}, \tag{50}$$

где $f = f(u)$ и $h = h(u)$ — произвольные функции, C_3 — произвольная постоянная.

Полагая в (49) и (50) $C_1 = s$, $k_1 = -1$, $k_2 = k$, $\lambda = k$ получим уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \frac{a(x)}{x + s}[k + f(u)]u_x - \frac{(x + s)^2}{a(x)}h(u), \tag{51}$$

где $a(x)$, $f(u)$, $h(u)$ — произвольные функции, k, s — произвольные постоянные, которое допускает точные решения

$$\pm\int f(u)\Big(2\int f(u)h(u)du+C_3\Big)^{-1/2}du=kt-\int\frac{x+s}{a(x)}dx+C_2, \qquad (52)$$

где C_2, C_3 — произвольные постоянные.

В частном случае $k=-1$, $f(u)=1$, $s=0$ уравнение (51) переходит в уравнение

$$u_t=[a(x)u_x]_x-\frac{x^2}{a(x)}h(u),$$

которое рассматривалось в [18]. Полагая в (51) $h(u)=0$, $C_3=0$, $s=0$ и переобозначая $a(x)$ на $xa(x)$, получим уравнение

$$u_t=[xa(x)f(u)u_x]_x-a(x)[k+f(u)]u_x,$$

которое имеет решения

$$\pm\int f(u)du=kt-\int\frac{dx}{a(x)}+C_2.$$

Решение 8. Уравнению (14) можно удовлетворить, если взять

$$\begin{gathered}\Phi_1+\Phi_3+k_1\Phi_4+\Phi_5=0,\quad \Phi_2+k_2\Phi_4=0;\\ \Psi_3=\Psi_1,\quad \Psi_4=k_1\Psi_1+k_2\Psi_2,\quad \Psi_5=\Psi_1,\end{gathered} \qquad (53)$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные. Подставив (13) в (53), приходим к уравнениям

$$\begin{gathered}-\vartheta_t+a\vartheta_x^2+k_1b\vartheta_x+c=0,\quad (a\vartheta_x)_x+k_2b\vartheta_x=0;\\ (f/\zeta)'_u=1,\quad g=k_1+k_2f,\quad h\zeta=1.\end{gathered} \qquad (54)$$

В частном случае $k_1=k_2=0$ решение системы (54) приводит к уравнению

$$u_t=\big[a(x)f(u)u_x\big]_x+\left[\lambda-\frac{\beta^2}{a(x)}\right]\frac{u}{f(u)},$$

где $a(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, β, λ — произвольные постоянные, которое допускает два точных решения

$$\int\frac{f(u)}{u}du=\lambda t\pm\beta\int\frac{dx}{a(x)}+C_1.$$

Решение 9. Уравнению (14) можно удовлетворить, если использовать линейные соотношения

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -k_1\Phi_5, \quad \Phi_2 = -k_2\Phi_3, \quad \Phi_4 = -k_3\Phi_5; \\ &\Psi_5 = k_1\Psi_1 + k_3\Psi_4, \quad \Psi_3 = k_2\Psi_2, \end{aligned} \tag{55}$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Подставив (13) в (55), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &\vartheta_t = k_1 c, \quad (a\vartheta_x)_x = -k_2 a\vartheta_x^2, \\ &b\vartheta_x = -k_3 c; \\ &h\zeta = k_1 + k_3 g, \quad (f/\zeta)'_u = k_2 f. \end{aligned} \tag{56}$$

Решения первых трех уравнений (56) описываются формулами

$$\begin{aligned} &\vartheta(x,t) = k_1 t + \frac{1}{k_2}\ln\left(k_2\int\frac{dx}{a(x)} + C_1\right) + C_2, \\ &b(x) = -k_3 a(x)\left(k_2\int\frac{dx}{a(x)} + C_1\right), \quad c(x) = 1, \end{aligned} \tag{57}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Решения двух последних уравнений (56) имеют вид

$$\begin{aligned} &h(u) = \frac{k_1 + k_3 g(u)}{f(u)}\left[k_2\int f(u)du + C_3\right], \\ &\zeta(u) = f(u)\left[k_2\int f(u)du + C_3\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{58}$$

где $f(u)$, $g(u)$ — произвольные функции, C_3 — произвольная постоянная.

В частности, полагая в (57)–(58) $a(x) = x^n$, $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = m$, $k_1 = k$, $k_2 = 1 - n$, $k_3 = 1$, приходим к уравнению

$$u_t = [x^n f(u)u_x]_x - xg(u)u_x + \frac{k + g(u)}{f(u)}\left[(1-n)\int f(u)du + m\right].$$

Решение 10. Уравнению (14) можно удовлетворить, если взять

$$\begin{aligned} &\Phi_3 = \Phi_1, \quad \Phi_4 = k_1\Phi_1 + k_2\Phi_2, \quad \Phi_5 = \Phi_1; \\ &\Psi_1 + \Psi_3 + k_1\Psi_4 + \Psi_5 = 0, \quad \Psi_2 + k_2\Psi_4 = 0, \end{aligned} \tag{59}$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные. Подставив (13) в (59), приходим к уравнениям

$$a\vartheta_x^2 = -\vartheta_t, \quad b\vartheta_x = -k_1\vartheta_t + k_2(a\vartheta_x)_x, \quad c = -\vartheta_t;$$
$$1 + (f/\zeta)'_u + k_1 g + h\zeta = 0, \quad f + k_2 g = 0. \tag{60}$$

Первые три уравнения (60) допускают два решения, которые описываются формулами

$$\vartheta(x,t) = -t \pm \int \frac{dx}{\sqrt{a}} + C_1, \quad b(x) = \pm k_1\sqrt{a} + \frac{1}{2}k_2 a'_x, \quad c(x) = 1, \tag{61}$$

где $a = a(x)$ — произвольная функция, C_1 — произвольная постоянная (в обеих формулах одновременно берутся верхние или нижние знаки). Из последнего уравнения (60) получим $g = -f/k_2$, а предпоследнее уравнение, которое служит для определения функции ζ, преобразуется к уравнению Абеля второго рода

$$\xi\xi'_u + \left(1 - \frac{k_1}{k_2} f\right)\xi + fh = 0, \quad \zeta = f/\xi. \tag{62}$$

Полагая в (61) и (62) $k_1 = \pm k$, $k_2 = 1$ приходим к уравнению

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \left[k\sqrt{a(x)} + \frac{1}{2}a'_x(x)\right]f(u)u_x + h(u),$$

которое имеет два точных решения, допускающих представление в неявной форме

$$\int \frac{f(u)}{\xi(u)}du = -t \pm \int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C_1,$$

где функция $\xi = \xi(u)$ описывается уравнением Абеля

$$\xi\xi'_u + [1 \mp kf(u)]\xi + f(u)h(u) = 0.$$

Точные решения уравнений Абеля для различных функций $f(u)$ и $h(u)$ можно найти в [45].

Другие решения с функциональным разделением переменных, полученные путем использования уравнения (12).

Решение 11. Положим $a = b = c = 1$ в (12), а затем сделаем замену

$$\vartheta = \overline{\vartheta} + \alpha x + \beta t, \tag{63}$$

где α и β — свободные параметры. В результате получим

$$-\overline{\vartheta}_t + \overline{\vartheta}_{xx} f + (\overline{\vartheta}_x + \alpha)^2 \left(\frac{f}{\zeta}\right)'_u + \overline{\vartheta}_x g - \beta + \alpha g + h\zeta = 0. \tag{64}$$

1. Частное решение уравнения (64) ищем в виде

$$\overline{\vartheta} = C_1 e^{\lambda t + \gamma x} + C_2, \quad \zeta = f, \tag{65}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Имеем

$$(-\lambda + \gamma^2 f + \gamma g)\overline{\vartheta} - \beta + \alpha g + h\zeta = 0,$$

что приводит к определяющей системе уравнений

$$-\lambda + \gamma^2 f + \gamma g = 0, \quad -\beta + \alpha g + h\zeta = 0. \tag{66}$$

Решения этих уравнений с учетом второго равенства (65) определяются формулами

$$g = \frac{\lambda}{\gamma} - \gamma f, \quad h = \alpha\gamma + \left(\beta - \frac{\alpha\lambda}{\gamma}\right)\frac{1}{f}, \quad \zeta = f. \tag{67}$$

Таким образом приходим к уравнению

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \left[\frac{\lambda}{\gamma} - \gamma f(u)\right]u_x + \alpha\gamma + \left(\beta - \frac{\alpha\lambda}{\gamma}\right)\frac{1}{f(u)}, \tag{68}$$

которое зависит от произвольной функции $f = f(u)$ и допускает точное решение в неявной форме

$$\int f(u)du = \alpha x + \beta t + C_1 e^{\lambda t + \gamma x} + C_2. \tag{69}$$

Полагая в (68) и (69) $\lambda/\gamma = \sigma$, $\beta - (\alpha\lambda/\gamma) = \mu$, $\alpha\gamma = \varepsilon$, приходим к уравнению более компактного вида

$$u_t = [f(u)u_x]_x + [\sigma - \gamma f(u)]u_x + \varepsilon + \frac{\mu}{f(u)}, \tag{70}$$

которое имеет точное решение

$$\int f(u)du = \frac{\varepsilon}{\gamma}x + \left(\mu + \frac{\varepsilon\sigma}{\gamma}\right)t + C_1 e^{\gamma\sigma t + \gamma x} + C_2. \tag{71}$$

2. При $g \equiv 0$ уравнение (64) имеет стационарное частное решение

$$\overline{\vartheta} = -kx^2 + C, \quad h = \frac{\beta}{f} + 2k, \quad \zeta = f, \tag{72}$$

где $f = f(u)$ — произвольная функция, C, k — произвольные постоянные, которое приводит к уравнению [16]

$$u_t = [f(u)u_x]_x + 2k + \frac{\beta}{f(u)}, \tag{73}$$

допускающему решение в неявном виде $\int f(u)du = -kx^2 + \alpha x + \beta t + C$.

3. При $g \equiv 0$ и $\alpha = 0$ уравнение (64) имеет другое стационарное частное решение

$$\overline{\vartheta} = \ln(C_1 x + C_2), \quad h = \beta \frac{F}{f}, \quad \zeta = \frac{f}{F}, \quad F = \int f(u)du, \tag{74}$$

которое также приводит к уравнению, рассмотренному в [16].

Решение 12. В (12) положим $\zeta = f$, а затем сделаем замену

$$\vartheta = \overline{\vartheta} + \beta t + k\int \frac{dx}{a(x)}, \tag{75}$$

где β, k — свободные параметры. Имеем

$$-\overline{\vartheta}_t + (a\overline{\vartheta}_x)_x f + b\overline{\vartheta}_x g - \beta + k\frac{b}{a}g + cfh = 0. \tag{76}$$

1. Ищем стационарное решение $\overline{\vartheta} = \overline{\vartheta}(x)$ уравнения (76). В результате получим

$$\begin{aligned} &\overline{\vartheta}(x) = C_1\int \frac{e^{\mu x}}{a(x)}dx + C_2, \quad b(x) = a(x), \quad c(x) = 1, \\ &g(u) = -\mu f(u), \quad h(u) = k\mu + \frac{\beta}{f(u)}, \end{aligned} \tag{77}$$

где C_1, C_2, μ — произвольные постоянные. Учитывая соотношение (75) и обозначая $\sigma = k\mu$, получим уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \mu a(x)f(u)u_x + \sigma + \frac{\beta}{f(u)},$$

которое допускает точное решение

$$\int f(u)du = \beta t + \frac{\sigma}{\mu}\int \frac{dx}{a(x)} + C_1\int \frac{e^{\mu x}}{a(x)}dx + C_2.$$

2. Частное решение уравнения (76) ищем в виде

$$\overline{\vartheta} = e^{\lambda t}\xi(x). \tag{78}$$

В результате приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &-\lambda\xi + (a\xi'_x)'_x f + b\xi'_x g = 0, \\ &-\beta + k\frac{b}{a}g + cfh = 0. \end{aligned} \tag{79}$$

При $g = \text{const}$ получим $f = \text{const}$ и $h = \text{const}$, что соответствует линейному уравнению. Поэтому далее считаем, что $g \neq \text{const}$.

Первому уравнению (79) можно удовлетворить, если положить

$$(a\xi'_x)'_x - Ab\xi'_x = 0, \quad Bb\xi'_x - \lambda\xi = 0, \quad g = B - Af, \tag{80}$$

где A, B — произвольные постоянные ($A \neq 0$). В первые два уравнения (80) входят три функции $a = a(x)$, $b = b(x)$, $\xi = \xi(x)$, одну из которых можно считать произвольной.

Считая в (80) заданной $\xi = \xi(x)$, находим

$$a = \frac{1}{\xi'_x}\left(\frac{A\lambda}{B}\int \xi\,dx + C_1\right), \quad b = \frac{\lambda\xi}{B\xi'_x}, \tag{81}$$

Если считать заданной $b = b(x)$, то решения первых двух уравнений (80) имеют вид

$$\begin{aligned} &a(x) = b(x)\exp\left(-\frac{\lambda}{B}\int\frac{dx}{b(x)}\right)\left[A\int\exp\left(\frac{\lambda}{B}\int\frac{dx}{b(x)}\right)dx + C_1\right], \\ &\xi(x) = C_2\exp\left(\frac{\lambda}{B}\int\frac{dx}{b(x)}\right), \end{aligned} \tag{82}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные $(C_2 \neq 0)$.

В частности, при $B = 1$, $b(x) = 1$ из (82) получим

$$a(x) = \frac{A}{\lambda} + C_1 e^{-\lambda x}, \quad \xi(x) = C_2 e^{\lambda x},$$

а при $B = 1$, $b(x) = x$ имеем

$$a(x) = \frac{A}{\lambda + 1}x^2 + C_1 x^{1-\lambda}, \quad \xi(x) = C_2 x^{\lambda}.$$

Последнему уравнению (79) можно удовлетворить в двух случаях, которые рассмотрены ниже.

2.1. При $\beta = 0$ решение последнего уравнения (79) определяется формулами

$$c(x) = k\frac{b(x)}{a(x)}, \quad h(u) = A - \frac{B}{f(u)}, \tag{83}$$

при выводе которых учтено последнее соотношение в (80). Таким образом, уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)[B - Af(u)]u_x + k\frac{b(x)}{a(x)}\left[A - \frac{B}{f(u)}\right],$$

где $b(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции, а функция $a = a(x)$ выражается через $b = b(x)$ первой формулой в (82), допускает точное решение

$$\int f(u)du = k\int\frac{dx}{a(x)} + C_2 e^{\lambda t}\exp\left(\frac{\lambda}{B}\int\frac{dx}{b(x)}\right).$$

2.2. При $k = 0$ решение последнего уравнения (79) определяется формулами

$$c(x) = 1, \quad h(u) = \frac{\beta}{f(u)}. \tag{84}$$

В результате приходим к уравнению

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)[B - Af(u)]u_x + \frac{\beta}{f(u)},$$

где $b(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции, а функция $a = a(x)$ выражается через $b = b(x)$ согласно (82), которое имеет решение

$$\int f(u)du = \beta t + C_2 e^{\lambda t}\exp\left(\frac{\lambda}{B}\int\frac{dx}{b(x)}\right).$$

Решение 13. Уравнению (14) можно удовлетворить, если положить Φ_i $(i = 1,2,3,4)$ пропорциональными Φ_5. В результате получим

$$\begin{aligned}&\Phi_1 = k_1\Phi_5, \quad \Phi_2 = k_2\Phi_5, \quad \Phi_3 = k_3\Phi_5, \quad \Phi_4 = k_4\Phi_5,\\&k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2 + k_3\Psi_3 + k_4\Psi_4 + \Psi_5 = 0.\end{aligned} \tag{85}$$

Подставив (13) в (85), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}&\vartheta_t = -k_1 c, \quad (a\vartheta_x)_x = k_2 c, \quad a\vartheta_x^2 = k_3 c, \quad b\vartheta_x = k_4 c;\\&k_1 + k_2 f + k_3(f/\zeta)'_u + k_4 g + h\zeta = 0.\end{aligned} \tag{86}$$

Рассмотрим два случая.

1. Простейшее решение первых четырех уравнений (86)

$$a(x) = b(x) = c(x) = 1, \quad \vartheta(x,t) = -k_1 t + k_4 x + C_1, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = k_4^2$$

приводит к решению типа бегущей волны исходного реакционно-диффузионного уравнения вида (11) (это очевидное решение здесь обсуждаться не будет).

2. Первые четыре уравнения (86) допускают также другое решение

$$a(x)=x^2, \quad b(x)=x, \quad c(x)=1,$$
$$\vartheta(x,t)=-k_1t+k_2\ln x+C_1, \quad k_3=k_2^2, \quad k_4=k_2. \tag{87}$$

Полагая $k=k_1$, $k_2=1$ в (87) и используя последнее уравнение в (86), приходим к уравнению реакционно-диффузионного типа

$$u_t=[x^2f(u)u_x]_x+xg(u)u_x+h(u), \tag{88}$$

где

$$h(u)=-\frac{\xi(u)}{f(u)}\left[k+f(u)+g(u)+\xi'_u(u)\right], \quad \xi(u)=\frac{f(u)}{\zeta(u)}, \tag{89}$$

а $f=f(u)$, $g=g(u)$, $\xi=\xi(u)$ — произвольные функции, которое допускает инвариантное точное решение

$$\int\frac{f(u)}{\xi(u)}du=-kt+\ln x+C_1. \tag{90}$$

Отметим, что инвариантное решение (90) уравнения (88) можно получить стандартным способом в виде $u=U(z)$, где $z=-kt+\ln x$ (в этом случае соотношение (89) между f, g, h и ξ не используется). Функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(U)U'_z]'_z+[f(U)+g(U)+k]U'_z+h(U)=0.$$

Дальнейшие обобщения и модификации, основанные на использовании эквивалентных уравнений. Другие точные решения уравнения (1) можно получить, если вместо преобразованного уравнения (6)–(7) рассматривать эквивалентные дифференциальные уравнения, которые сводятся к (6)–(7) на множестве функций, удовлетворяющих соотношению (4). Укажем здесь два класса таких уравнений, которые будут использованы далее.

1. Можно использовать уравнения вида

$$\sum_{n=1}^{N}\widetilde{\Phi}_n\widetilde{\Psi}_n=0, \quad \widetilde{\Phi}_n=\Phi_n\eta_n(\vartheta), \quad \widetilde{\Psi}_n=\Psi_n/\eta_n(Z), \quad Z=\int\zeta(u)du, \tag{91}$$

которые в силу (4) (т. е. $\vartheta=Z$) эквивалентны уравнению (6)–(7) для любых функций $\eta_n(\vartheta)$.

2. Также можно использовать уравнение

$$\lambda\vartheta-\lambda Z+\sum_{n=1}^{N}\Phi_n\Psi_n=0, \qquad (92)$$

которое также эквивалентно уравнению (6)–(7). Здесь λ может быть константой или любой функций, зависящей как от x и t, так и от ϑ и ζ (и их производных).

Использование принципа расщепления к уравнениям (91) и (92) в случае общего положения будет приводить к другим точным решениям исходного уравнения (1), чем использование этого принципа к уравнению (6).

Учитывая изложенные соображения, получим новые точные решения уравнения (1). Для этого вместо (6)–(7) будем использовать эквивалентные дифференциальные уравнения, которые сводятся к (6)–(7) на множестве функций, удовлетворяющих соотношению (4).

Решения с функциональным разделением переменных, полученные путем использования эквивалентных уравнений.

Решение 14. Вернемся к классу реакционно-диффузионных уравнений вида (11). Сделав замену (4), вместо уравнения (12) рассмотрим более сложное уравнение

$$-e^{\lambda\vartheta}e^{-\lambda Z}\vartheta_t+(a\vartheta_x)_x f+a\vartheta_x^2\left(\frac{f}{\zeta}\right)_u'+b\vartheta_x g+ch\zeta=0, \qquad (93)$$

где $Z=\int\zeta\,du$ и λ — произвольная постоянная. Уравнения (12) и (93) эквивалентны, поскольку в силу преобразования (4) имеет место соотношение $\vartheta=Z$.

Уравнение (93) можно представить в билинейной форме (14), где

$$\begin{array}{lllll}\Phi_1=-e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t, & \Phi_2=(a\vartheta_x)_x, & \Phi_3=a\vartheta_x^2, & \Phi_4=b\vartheta_x, & \Phi_5=c;\\ \Psi_1=e^{-\lambda Z}, & \Psi_2=f, & \Psi_3=(f/\zeta)_u', & \Psi_4=g, & \Psi_5=h\zeta.\end{array} \qquad (94)$$

Как и ранее, уравнению (14) можно удовлетворить, используя соотношения (15). Подставляя (94) в (15), приходим к уравнениям

$$\begin{array}{l}e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t=c,\quad (a\vartheta_x)_x=0,\quad ka\vartheta_x^2=-b\vartheta_x;\\ h\zeta=e^{-\lambda Z},\quad (f/\zeta)_u'=kg,\end{array} \qquad (95)$$

которые при $\lambda=0$ совпадают с (16). Общее решение переопределенной системы, состоящей из первых трех уравнений (95), имеет вид

$$b(x) = b_0, \quad c(x) = \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{b_0\lambda}{k}\int\frac{dx}{a(x)} + C_1\lambda\right),$$
$$\vartheta(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(t + C_2) - \frac{b_0}{k}\int\frac{dx}{a(x)} + C_1, \tag{96}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, b_0, C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные. Общее решение системы, состоящей из двух последних уравнений (95), записывается так:

$$\zeta(u) = \frac{f(u)}{kG(u) + C_2}, \quad h(u) = \frac{1}{\zeta(u)}\exp\left(-\lambda\int\zeta(u)du\right), \quad G(u) = \int g(u)du, \tag{97}$$

где $f(u)$, $g(u)$ — произвольные функции.

Решение 15. Уравнению (14) можно удовлетворить также с помощью соотношений (21). Подставляя (94) в (21), получим уравнения

$$e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t = k_1 c, \quad (a\vartheta_x)_x = -k_2 c, \quad b\vartheta_x = -k_3 c;$$
$$(f/\zeta)'_u = 0, \quad h\zeta = k_1 e^{-\lambda Z} + k_2 f + k_3 g. \tag{98}$$

Общее решение переопределенной системы, состоящей из первых трех уравнений (98), имеет вид

$$\vartheta(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[k_1(\lambda t + C_1)c(x)\right],$$
$$a(x) = \frac{c(x)}{c'_x(x)}\left(C_2 - k_2\lambda\int c(x)dx\right), \quad b(x) = -\frac{k_3\lambda c^2(x)}{c'_x(x)}, \tag{99}$$

где $c(x)$ — произвольная функция (отличная от константы), C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Решения двух последних уравнений (98) описываются формулами

$$h(u) = \frac{1}{f(u)}\left[k_1\exp\left(-\lambda\int f(u)du\right) + k_2 f(u) + k_3 g(u)\right], \quad \zeta(u) = f(u), \tag{100}$$

где $f = f(u)$, $g = g(u)$ — произвольные функции.

Решение 16. Как и ранее, уравнению (14) можно удовлетворить с помощью соотношений (25). Подставляя (94) в (25), приходим к уравнениям

$$e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t = c, \quad (a\vartheta_x)_x = -kb\vartheta_x;$$
$$h\zeta = e^{-\lambda Z}, \quad kf = g, \quad (f/\zeta)'_u = 0. \tag{101}$$

Решение переопределенной системы, состоящей из первых двух уравнений (101), имеет вид

$$c(x)=\frac{1}{\lambda}\exp\left[C_2\lambda\int\exp\left(-k\int\frac{b}{a}dx\right)\frac{dx}{a}+C_3\lambda\right],$$
$$\vartheta(x,t)=\frac{1}{\lambda}\ln(t+C_1)+C_2\int\exp\left(-k\int\frac{b}{a}dx\right)\frac{dx}{a}+C_3, \qquad (102)$$

где $a=a(x)$ и $b=b(x)$ — произвольные функции, C_1, C_2, C_3, k, λ — произвольные постоянные. Решение системы, состоящей из трех последних уравнений (101), дается формулами

$$g=kf,\quad h=\frac{1}{mf}\exp\left(-m\lambda\int f\,du\right),\quad \zeta=mf, \qquad (103)$$

где $m\neq 0$ — произвольная постоянная.

Решение 17. Подставив (94) в (85), приходим к уравнениям

$$e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t=-k_1c,\quad (a\vartheta_x)_x=k_2c,\quad a\vartheta_x^2=k_3c,\quad b\vartheta_x=k_4c;$$
$$k_1e^{-\lambda Z}+k_2f+k_3(f/\zeta)'_u+k_4g+h\zeta=0. \qquad (104)$$

Рассмотрим два случая.

1. Первые четыре уравнения системы (104) допускают решение для функциональных коэффициентов экспоненциального вида

$$a(x)=b(x)=c(x)=e^{\lambda x},\quad \vartheta(x,t)=\frac{1}{\lambda}\ln t+x,$$
$$k_1=-\frac{1}{\lambda},\quad k_2=\lambda,\quad k_3=k_4=1. \qquad (105)$$

Используя последнее уравнение в (104), приходим к уравнению реакционно-диффузионного типа

$$u_t=[e^{\lambda x}f(u)u_x]_x+e^{\lambda x}g(u)u_x+e^{\lambda x}h(u), \qquad (106)$$

где

$$h(u)=-\frac{1}{\zeta}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda Z}+\lambda f+\left(\frac{f}{\zeta}\right)'_u+g\right],\quad Z=\int\zeta\,du, \qquad (107)$$

а $f=f(u)$, $g=g(u)$, $\zeta=\zeta(u)$ — произвольные функции, которое допускает инвариантное точное решение

$$\int\zeta(u)du=\frac{1}{\lambda}\ln t+x. \qquad (108)$$

Отметим, что инвариантное решение (108) уравнения (106) можно представить в стандартной форме $u = U(z)$, где $z = \dfrac{1}{\lambda}\ln t + x$ (в этом случае соотношение (107) между f, g, h и ζ не используется). Функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{\lambda}U_z' = [e^{\lambda z} f(U)U_z']_z' + e^{\lambda z} g(U)U_z' + e^{\lambda z} h(U).$$

2. Первые четыре уравнения системы (104) допускают также решение для функциональных коэффициентов степенного вида

$$\begin{gathered} a(x) = x^n,\ b(x) = x^{n-1},\ c(x) = x^{n-2},\ \vartheta(x,t) = \frac{1}{n-2}\ln t + \ln x, \\ \lambda = n-2, \quad k_1 = -\frac{1}{n-2}, \quad k_2 = n-1, \quad k_3 = k_4 = 1. \end{gathered} \tag{109}$$

Используя последнее уравнение в (104), приходим к уравнению реакционно-диффузионного типа

$$u_t = [x^n f(u)u_x]_x + x^{n-1} g(u)u_x + x^{n-2} h(u), \tag{110}$$

где

$$h(u) = -\frac{1}{\zeta}\left[-\frac{1}{n-2}e^{-(n-2)Z} + (n-1)f + \left(\frac{f}{\zeta}\right)_u' + g\right], \quad Z = \int \zeta\, du, \tag{111}$$

а $f = f(u)$, $g = g(u)$, $\zeta = \zeta(u)$ — произвольные функции, которое допускает инвариантное точное решение

$$\int \zeta(u)du = \frac{1}{n-2}\ln t + \ln x. \tag{112}$$

Автомодельное решение (112) уравнения (110) можно искать в стандартном виде $u = U(z)$, где $z = xt^{1/(n-2)}$ (в этом случае соотношение (111) между f, g, h и ζ не используется). Функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{n-2}zU_z' = [z^n f(U)U_z']_z' + z^{n-1} g(U)U_z' + z^{n-2} g(U).$$

Решение 18. Уравнению (14) можно удовлетворить, если положить Ψ_i $(i = 1,3,4,5)$ пропорциональными Ψ_2. В результате получим

$$\begin{aligned}&\Psi_1 = k_1\Psi_2, \quad \Psi_3 = k_2\Psi_2, \quad \Psi_4 = k_3\Psi_2, \quad \Psi_5 = k_4\Psi_2,\\ &k_1\Phi_1 + \Phi_2 + k_2\Phi_3 + k_3\Phi_4 + k_4\Phi_5 = 0.\end{aligned} \tag{113}$$

Подставив (94) в (113), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}&e^{-\lambda Z} = k_1 f, \quad (f/\zeta)'_u = k_2 f, \quad g = k_3 f, \quad h\zeta = k_4 f,\\ &-k_1 e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t + (a\vartheta_x)_x + k_2 a\vartheta_x^2 + k_3 b\vartheta_x + k_4 c = 0.\end{aligned} \tag{114}$$

Рассмотрим два случая.

1. Первые четыре уравнения системы (114) допускают решение для функциональных коэффициентов экспоненциального вида

$$\begin{aligned}&f(u) = g(u) = h(u) = e^{-\lambda u}, \quad \zeta = 1, \quad Z = u;\\ &k_1 = k_3 = k_4 = 1, \quad k_2 = -\lambda.\end{aligned} \tag{115}$$

В результате приходим к уравнению реакционно-диффузионного типа

$$u_t = [a(x)e^{\beta u}u_x]_x + b(x)e^{\beta u}u_x + c(x)e^{\beta u}, \quad \lambda = -\beta, \tag{116}$$

которое имеет точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = -\frac{1}{\beta}\ln t + \eta(x), \tag{117}$$

где функция $\eta = \eta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-\frac{1}{\beta} = [a(x)e^{\beta\eta}\eta'_x]'_x + b(x)e^{\beta\eta}\eta'_x + c(x)e^{\beta\eta}. \tag{118}$$

Уравнения (116) и (118) содержат три произвольные функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$.

Отметим, что уравнение (118) подстановкой $\xi = e^{\beta\eta}$ сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$[a(x)\xi'_x]'_x + b(x)\xi'_x + \beta c(x)\xi + 1 = 0.$$

2. Первые четыре уравнения системы (114) допускают также решение для функциональных коэффициентов степенного вида

$$\begin{aligned}&f(u) = u^n, \quad g(u) = u^n, \quad h(u) = u^{n+1}, \quad \zeta(u) = 1/u, \quad Z = \ln u,\\ &\lambda = -n, \quad k_1 = k_3 = k_4 = 1, \quad k_2 = n+1.\end{aligned} \tag{119}$$

В этом случае решение последнего уравнения в (114) определяется формулой $\vartheta = -(1/n)\ln t + \eta(x)$, где функция $\eta = \eta(x)$ удовлетворяет ОДУ

$$\frac{1}{n}e^{-n\eta} + (a\eta'_x)'_x + (n+1)a(\eta'_x)^2 + b\eta'_x + c = 0. \tag{120}$$

В результате получим уравнение реакционно-диффузионного типа

$$u_t = [a(x)u^n u_x]_x + b(x)u^n u_x + c(x)u^{n+1}, \tag{121}$$

точное решение которого можно представить в виде произведения функций двух аргументов $u = t^{-1/n}\xi(x)$, где функция $\xi(x) = e^{\eta}$ описывается ОДУ

$$[a(x)\xi^n \xi'_x]'_x + b(x)\xi^n \xi'_x + c(x)\xi^{n+1} + \frac{1}{n}\xi = 0.$$

Решение 19. Вернемся к классу реакционно-диффузионных уравнений вида (11). Сделав замену (4), вместо уравнения (12) рассмотрим более сложное уравнение

$$-\vartheta_t + (a\vartheta_x)_x f + a\vartheta_x^2\left(\frac{f}{\zeta}\right)'_u + b\vartheta_x g + ch\zeta\frac{\vartheta}{Z} = 0, \tag{122}$$

где $Z = \int \zeta\, du$. Уравнения (12) и (122) эквивалентны, поскольку в силу преобразования (4) имеет место соотношение $\vartheta = Z$.

Уравнение (122) можно представить в билинейной форме (14), где

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -\vartheta_t, \quad \Phi_2 = (a\vartheta_x)_x, \quad \Phi_3 = a\vartheta_x^2, \\ &\Phi_4 = b\vartheta_x, \quad \Phi_5 = c\vartheta; \\ &\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = f, \\ &\Psi_3 = (f/\zeta)'_u, \quad \Psi_4 = g, \quad \Psi_5 = h\zeta/Z. \end{aligned} \tag{123}$$

Уравнению (14) можно удовлетворить, если использовать соотношения (21). Подставляя (123) в (21), имеем

$$\begin{aligned} &\vartheta_t = k_1 c\vartheta, \quad (a\vartheta_x)_x = -k_2 c\vartheta, \\ &b\vartheta_x = -k_3 c\vartheta; \\ &(f/\zeta)'_u = 0, \quad h\zeta/Z = k_1 + k_2 f + k_3 g, \end{aligned} \tag{124}$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Пусть $a = a(x)$, $f = f(u)$, $g = g(u)$ — произвольные функции. Тогда решения уравнений (124) описываются формулами

$$b(x) = -\frac{k_3\lambda}{k_1}\frac{\omega'_x}{\omega}, \quad c(x) = \frac{\lambda}{k_1} = \text{const}, \quad \vartheta(x,t) = e^{\lambda t}\omega(x),$$
$$h = \frac{1}{f}(k_1 + k_2 f + k_3 g)F, \quad \zeta = f, \quad F = \int f\,du, \tag{125}$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\omega = \omega(x)$ — решение линейного ОДУ второго порядка $(a\omega'_x)'_x = -(k_2\lambda/k_1)\omega$. В частном случае $a(x) = \text{const}$, $k_3 = 0$ формулы (125) приводят к нелинейному реакционно-диффузионному уравнению и его решению, которые рассматривались в [16].

Решение 20. Рассмотрим теперь уравнение

$$-\vartheta_t + \lambda\vartheta - \lambda Z + (a\vartheta_x)_x f + a\vartheta_x^2 \left(\frac{f}{\zeta}\right)'_u + b\vartheta_x g + ch\zeta = 0, \tag{126}$$

где $\lambda = \text{const}$, которое в силу (4) ($\vartheta = Z$) эквивалентно уравнению (12).

Уравнение (126) инвариантно относительно преобразования

$$\vartheta = \overline{\vartheta} + C_1 e^{\lambda t}, \tag{127}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

1. Нетрудно проверить, что при постоянных a, b, c, которые без ограничения общности можно считать равными 1, уравнение (126) имеет частное решение

$$\overline{\vartheta} = C_2 e^{\beta t - \mu x}, \quad g = \mu f + \frac{\lambda - \beta}{\mu}, \quad h = \frac{\lambda}{f}\int f\,du, \quad \zeta = f, \tag{128}$$

где $f = f(u)$ — произвольная функция, C_2, β, μ — произвольные постоянные. Учитывая (127), получим уравнение

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \left[\mu f(u) + \frac{\lambda - \beta}{\mu}\right]u_x + \frac{\lambda}{f(u)}\int f(u)\,du, \tag{129}$$

которое имеет точное решение в неявном виде

$$\int f(u)\,du = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\beta t - \mu x}. \tag{130}$$

Полагая $\beta = \lambda - \sigma\mu$, уравнение (129) можно записать в более компактной форме

$$u_t = [f(u)u_x]_x + [\mu f(u) + \sigma]u_x + \frac{\lambda}{f(u)}\int f(u)\,du.$$

При этом его решение принимает вид $\int f(u)du = C_1e^{\lambda t} + C_2e^{(\lambda-\sigma\mu)t-\mu x}$.

2. Ищем стационарное частное решение $\vartheta = \vartheta(x)$ уравнения (126). Этому уравнению можно удовлетворить, если положить

$$\begin{gathered} a\vartheta_x^2 = k_1\vartheta, \quad (a\vartheta_x)_x = k_2, \quad b\vartheta_x = k_3, \quad c = 1; \\ \lambda + k_1(f/\zeta)'_u = 0, \quad -\lambda Z + k_2 f + k_3 g + h\zeta = 0, \end{gathered} \tag{131}$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Решение первых трех уравнений (131) при $k_1k_2 \neq 0$ можно представить в виде

$$\begin{gathered} a(x) = \frac{1}{C_2k_1}(k_2x + C_3)^{2-(k_1/k_2)}, \quad b(x) = \frac{k_3}{C_2k_1}(k_2x + C_3)^{1-(k_1/k_2)}, \\ \vartheta(x) = C_2(k_2x + C_3)^{k_1/k_2}, \end{gathered} \tag{132}$$

где C_2, C_3 — произвольные постоянные. Решение системы, состоящей из двух последних уравнений (131), записывается так:

$$\zeta = -\frac{k_1}{\lambda}\frac{f}{u + C_4}, \quad h = \frac{\lambda(u + C_4)}{k_1 f}\left(k_2 f + k_3 g + k_1\int\frac{f\,du}{u + C_4}\right), \tag{133}$$

где $f = f(u)$, $g = g(u)$ — произвольные функции, C_4 — произвольная постоянная.

Полагая в формулах (132), (133) $C_2 = 1/k$, $C_3 = C_4 = 0$, $k_1 = k$, $k_2 = k_3 = 1$, $\lambda = k\sigma$ приходим к уравнению

$$\begin{gathered} u_t = [x^{2-k}f(u)u_x]_x + x^{1-k}g(u)u_x + \\ + \frac{\sigma u}{f(u)}\left[f(u) + g(u) + k\int\frac{f(u)}{u}du\right]. \end{gathered} \tag{134}$$

Это уравнение при $k \neq 0$ допускает точное решение

$$\int\frac{f(u)}{u}du = Ce^{k\sigma t} - \frac{\sigma}{k}x^k, \qquad C = -C_1\sigma, \tag{135}$$

при построении которого учитывалась инвариантность уравнения (126) относительно преобразования (127).

Замечание 3. Описанный метод позволяет получить также другие точные решения уравнения (11), которые здесь не рассматриваются.

Замечание 4. Этот метод может применяться для построения точных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Краткие выводы. Описан новый метод построения точных решений нелинейных уравнений математической физики, который основан на нелинейных преобразованиях интегрального типа в комбинации с использованием принципа расщепления. Эффективность метода иллюстрируется на нелинейных уравнениях реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами, которые зависят от двух или трех произвольных функций. Получен ряд новых точных решений с функциональным разделением переменных и решений типа обобщенной бегущей волны. Важно отметить, что подавляющее большинство построенных решений являются неинвариантными (т. е. не могут быть получены с помощью классического группового анализа дифференциальных уравнений [46]).

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-03228).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Grundland A.M., Infeld E. A family of non-linear Klein–Gordon equations and their solutions. *J. Math. Phys*., 1992, vol. 33, pp. 2498–2503.

[2] Miller W. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. J. Phys. A, 1993, vol. 26, pp. 1901–1913.

[3] Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation. *J. Phys. A*, 1994, vol. 27, pp. L291–L297.

[4] Галактионов В.А., Посашков С.А., Свирщевский С.Р. Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями. *Дифференциальные уравнения*, 1995, т. 31, № 2, с. 253–261.

[5] Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, 1995, vol. 125, № 2, pp. 225–246.

[6] Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A. *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*, Dordrecht, Kluwer, 1998, 396 p.

[7] Doyle Ph.W., Vassiliou P.J. Separation of variables for the 1-dimensional nonlinear diffusion equation. *Int. J. Non-Linear Mech*., 1998, vol. 33, № 2, pp. 315–326.

[8] Pucci E., Saccomandi G. Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables. *Physica D*, 2000, vol. 139, pp. 28–47.

[9] Polyanin A.D. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with generalized separation of variables. *Doklady Physics*, 2001, vol. 46, № 10, pp. 726–731.

[10] Estevez P.G., Qu C., Zhang S. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source. *J. Math. Anal. Appl*., 2002, vol. 275, pp. 44–59.

[11] Estevez P.G., Qu C.Z. Separation of variables in nonlinear wave equations with variable wave speed. *Theor. Math. Phys*., 2002, vol. 133, № 2, pp. 1490–1497.

[12] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. Москва, Физматлит, 2005, 256 с.

[13] Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2007, 498 p.

[14] Hu J., Qu C. Functionally separable solutions to nonlinear wave equations by group foliation method. *J. Math. Anal. Appl*., 2007, vol. 330, pp. 298–311.

[15] Jia H., Zhao W.X.X., Li Z. Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with dependent convection and absorption. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 339, pp. 982–995.
[16] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*. Boca Raton, CRC Press, 2012, 1912 p.
[17] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional and generalized separable solutions to unsteady Navier–Stokes equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2016, vol. 79, pp. 88–98.
[18] Polyanin A.D. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 111, pp. 95–105.
[19] Polyanin A.D. Construction of functional separable solutions in implicit formfor non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 114, pp. 29–40.
[20] Полянин А.Д., Журов А.И. Решения с функциональным разделением переменных двух классов нелинейных уравнений математической физики. *Доклады АН*, 2019, т. 486, № 3, с. 19–23.
[21] Polyanin A.D. Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions. *Mathematics*, 2019, vol. 7, № 5, 386.
[22] Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Applied Math. Comput.*, 2019, vol. 347. pp. 282–292.
[23] Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear convection-diffusion equations with variable coefficients. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2019, vol. 73, pp. 379–390.
[24] Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation. *J. Math. Mech.*, 1969, vol. 18, pp. 1025–1042.
[25] Levi D., Winternitz P. Nonclassical symmetry reduction: Example of the Boussinesq equation. *J. Phys. A*, 1989, vol. 22, pp. 2915–2924.
[26] Nucci M.C., Clarkson P.A. The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation. *Phys. Lett. A*, 1992, vol. 164, pp. 49–56.
[27] Clarkson P.A. Nonclassical symmetry reductions for the Boussinesq equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1995, vol. 5, pp. 2261–2301.
[28] Olver P.J., Vorob'ev E.M. Nonclassical and conditional symmetries. In: *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol. 3* (ed. N.H. Ibragimov), Boca Raton, CRC Press, 1996, pp. 291–328.
[29] Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J. The classical, direct and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations. *Methods Appl. Anal.*, 1997, vol. 4, № 2, pp. 173–195.
[30] Olver P.J. Direct reduction and differential constraints. Proc. *Roy. Soc. London, Ser. A*, 1994, vol. 444, pp. 509–523.
[31] Kaptsov O.V., Verevkin I.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, vol. 36, pp. 1401–1414.
[32] Dorodnitsyn V.A. On invariant solutions of the equation of non-linear heat conduction with a source. *USSR Comput. Math. & Math. Phys.*, 1982, vol. 22, № 6, pp. 115–122.
[33] Kudryashov N.A. On exact solutions of families of Fisher equations. *Theor. Math. Phys.*, 1993, vol. 94, № 2, pp. 211–218.
[34] Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions. *Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl.*, 1994, vol. 23,

pp. 1595–621.

[35] Gandarias M.L., Romero J.L., Diaz J.M. Nonclassical symmetry reductions of a porous medium equation with convection. *J. Phys. A: Math. Gen*., 1999, vol. 32, pp. 1461–1473.

[36] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations. *J. Physics A: Math. Gen*., 2004, vol. 37, pp. 7547–7565.

[37] Ivanova N.M., Sophocleous C. On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion-convection equations. *J. Comput. Appl. Math*., 2006, vol. 197, № 2, pp. 322–344.

[38] Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl*., 200 7, vol. 330, № 2, pp. 1363–1386.

[39] Ivanova N.M. Exact solutions of diffusion-convection equations. *Dynamics of PDE*, 2008, vol. 5, № 2, pp. 139–171.

[40] Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source. *Acta Appl. Math*., 2009, vol. 106, № 1, pp. 1–46.

[41] Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl*., 2012, vol. 396, pp. 225–242.

[42] Cherniha R.M., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of reaction-diffusion-convection equations with exponential nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl*., 2013, vol. 403, pp. 23–37.

[43] Bradshaw-Hajek B.H., Moitsheki R.J. Symmetry solutions for reaction-diffusion equations with spatially dependent diffusivity. *Appl. Math. Comput*., 2015, vol. 254, pp. 30–38.

[44] Cherniha R., Serov M., Pliukhin O. *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2018, 238 p.

[45] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Boca Raton, CRC Press, 2018, 1496 p.

[46] Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. Москва, Наука, 1978, 339 с.

Статья поступила в редакцию 14.09.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Полянин А.Д. Методы функционального разделения переменных и их применение в математической физике. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 1, с. 65–97.

Полянин Андрей Дмитриевич — доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, профессор кафедр «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана и НИЯУ МИФИ. Области научных интересов: дифференциальные и интегральные уравнения, математическая физика, гидродинамика, теория тепло- и массопереноса, химическая технология. Автор более 30 монографий и справочников, опубликованных в России, США, Англии, Германии и Болгарии, более 240 научных статей в рецензируемых журналах и трех изобретений. SPIN-код 4163-0687, Scopus Author ID: 7006010305, ORCID: 0000-0002-2610-0590, WoS Researcher ID: E-5121-2015. polyanin@ipmnet.ru.

Methods of functional separation of variables and their application in mathematical physics

© A.D. Polyanin[1,2,3]

[1]IPMech RAS, Moscow 119526, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[3]MEPhI, Moscow, 115409, Russia

A brief review of existing modifications of the method of functional separation of variables is given. A new more general approach is proposed for construction of ex-act solutions of nonlinear equations of mathematical physics and mechanics, which is based on implicit transformations of integral type in combination using the split-ting principle. The effectiveness of this approach is illustrated on nonlinear diffusion equations that contain reaction and convective terms with variable coefficients. The focus is on equations of a fairly general form that depend on two or three arbitrary functions (such nonlinear equations are the most difficult to analyze). Many new exact solutions with functional separation of variables and generalized traveling wave type solutions are described. The obtained solutions can be used to test various numerical and approximate analytical methods of mathematical physics

Keywords: *nonlinear equations of mathematical physics, functional separation of variables, generalized separation of variables, exact solutions, nonlinear reaction-diffusion equations*

REFERENCES

[1] Grundland A.M., Infeld E. A family of non-linear Klein–Gordon equations and their solutions. *J. Math. Phys*., 1992, vol. 33, pp. 2498–2503.
[2] Miller W. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *J. Phys. A*, 1993, vol. 26, pp. 1901–1913.
[3] Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation. *J. Phys. A*, 1994, vol. 27, pp. L291–L297.
[4] Galaktionov V.A., Posashkov S.A., Svirshchevskii S.R. *Differencial'nye Uravneniya — Differential equation*, 1995, vol. 31, no. 2, pp. 253–261.
[5] Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, 1995, vol. 125, no. 2, pp. 225–246.
[6] Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A. *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*, Dordrecht, Kluwer, 1998, 396 p.
[7] Doyle Ph.W., Vassiliou P.J. Separation of variables for the 1-dimensional nonlinear diffusion equation. *Int. J. Non-Linear Mech*., 1998, vol. 33, no. 2, pp. 315–326.
[8] Pucci E., Saccomandi G. Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables. *Physica D*, 2000, vol. 139, pp. 28–47.
[9] Polyanin A.D. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with generalized separation of variables. *Doklady Physics*, 2001, vol. 46, no. 10, pp. 726–731.
[10] Estevez P.G., Qu C., Zhang S. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source. *J. Math. Anal. Appl*., 2002, vol. 275, pp. 44–59.
[11] Estevez P.G., Qu C.Z. Separation of variables in nonlinear wave equations with variable wave speed. *Theor. Math. Phys*., 2002, vol. 133, № 2, pp. 1490–1497.

[12] Polyanin A.D, Zaitsev V.F, Zhurov A.I. *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Solution methods for nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2005, 256 p.

[13] Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2007, 498 p.

[14] Hu J., Qu C. Functionally separable solutions to nonlinear wave equations by group foliation method. *J. Math. Anal. Appl*., 2007, vol. 330, pp. 298–311.

[15] Jia H., Zhao W.X.X., Li Z. Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with dependent convection and absorption. *J. Math. Anal. Appl*., 2008, vol. 339, pp. 982–995.

[16] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*. Boca Raton, CRC Press, 2012, 1912 p.

[17] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional and generalized separable solutions to unsteady Navier–Stokes equations. *Int. J. Non-Linear Mech*., 2016, vol. 79, pp. 88–98.

[18] Polyanin A.D. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech*., 2019, vol. 111, pp. 95–105.

[19] Polyanin A.D. Construction of functional separable solutions in implicit formfor non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech*., 2019, vol. 114, pp. 29–40.

[20] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional separable solutions of two classes of nonlinear mathematical physics equations. *Doklady Mathematics*, 2019, vol. 99, no. 3, pp. 321–324.

[21] Polyanin A.D. Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions. *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 5, 386.

[22] Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Applied Math. Comput*., 2019, vol. 347. pp. 282–292.

[23] Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear convection-diffusion equations with variable coefficients. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat*., 2019, vol. 73, pp. 379–390.

[24] Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation. *J. Math. Mech*., 1969, vol. 18, pp. 1025–1042.

[25] Levi D., Winternitz P. Nonclassical symmetry reduction: Example of the Boussinesq equation. *J. Phys. A*, 1989, vol. 22, pp. 2915–2924.

[26] Nucci M.C., Clarkson P.A. The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation. *Phys. Lett. A*, 1992, vol. 164, pp. 49–56.

[27] Clarkson P.A. Nonclassical symmetry reductions for the Boussinesq equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1995, vol. 5, pp. 2261–2301.

[28] Olver P.J., Vorob'ev E.M. Nonclassical and conditional symmetries. In: *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol. 3* (ed. N.H. Ibragimov), Boca Raton, CRC Press, 1996, pp. 291–328.

[29] Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J. The classical, direct and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations. *Methods Appl. Anal*., 1997, vol. 4, no. 2, pp. 173–195.

[30] Olver P.J. Direct reduction and differential constraints. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1994, vol. 444, pp. 509–523.

[31] Kaptsov O.V., Verevkin I.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations. *J. Phys. A: Math. Gen*., 2003, vol. 36, pp. 1401–1414.

[32] Dorodnitsyn V.A. On invariant solutions of the equation of non-linear heat conduction with a source. *USSR Comput. Math. & Math. Phys*., 1982, vol. 22, no. 6, pp. 115–122.
[33] Kudryashov N.A. On exact solutions of families of Fisher equations. *Theor. Math. Phys*., 1993, vol. 94, no. 2, pp. 211–218.
[34] Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions. *Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl*., 1994, vol. 23, pp. 1595–621.
[35] Gandarias M.L., Romero J.L., Diaz J.M. Nonclassical symmetry reductions of a porous medium equation with convection. *J. Phys. A: Math. Gen*., 1999, vol. 32, pp. 1461–1473.
[36] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations. *J. Physics A: Math. Gen*., 2004, vol. 37, pp. 7547–7565.
[37] Ivanova N.M., Sophocleous C. On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion-convection equations. J. *Comput. Appl. Math*., 2006, vol. 197, № 2, pp. 322–344.
[38] Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl*., 2007, vol. 330, no. 2, pp. 1363–1386.
[39] Ivanova N.M. Exact solutions of diffusion-convection equations. *Dynamics of PD*E, 2008, vol. 5, no. 2, pp. 139–171.
[40] Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source. *Acta Appl. Math*., 2009, vol. 106, no. 1, pp. 1–46.
[41] Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl*., 2012, vol. 396, pp. 225–242.
[42] Cherniha R.M., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of reaction-diffusion-convection equations with exponential nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl*., 2013, vol. 403, pp. 23–37.
[43] Bradshaw-Hajek B.H., Moitsheki R.J. Symmetry solutions for reaction-diffusion equations with spatially dependent diffusivity. *Appl. Math. Comput*., 2015, vol. 254, pp. 30–38.
[44] Cherniha R., Serov M., Pliukhin O. *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2018, 238 p.
[45] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Boca Raton, CRC Press, 2018, 1496 p.
[46] Ovsiannikov L.V. *Group Analysis of Differential Equations*. Boston, Academic Press, 1982, 432 p.

Polyanin A.D. – Dr. Sci. (Phys.& Math.), professor, principal researcher at Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, professor of the Departments of Applied Mathematics at Bauman Moscow State Technical University and National Research Nuclear University MEPhI. Author of more than 30 books published in Russia, USA, England, Germany and Bulgaria as well as over 240 research articles and three patents. Areas of expertise: differential and integral equations, mathematical physics, hydrodynamics, theory of heat and mass transfer, chemical engineering sciences. SPIN-code 4163-0687, Scopus Author ID: 7006010305, ORCID: 0000-0002-2610-0590, WoS Researcher ID: E-5121-2015. polyanin@ipmnet.ru.