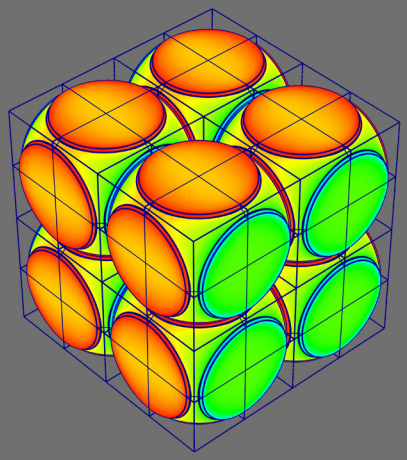
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Дубровин В.М., Семёнов К.С. Моделирование нагрузок на составную цилин-дрическую оболочку с упругим заполнителем. Математическое моделирование и численные методы, 2019, № 1, с. 27–42.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/186/

Параметры загрузки:
IP: 3.41.188.32
17.11.2026 06:53:49

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2019-1-2742

Моделирование нагрузок на составную цилиндрическую оболочку с упругим заполнителем

© В.М. Дубровин, К.С. Семенов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен метод расчёта нагрузок на составную цилиндрическую оболочку, состоящую из внешней и внутренней оболочек, соединенных системой упругих поперечных опор. Между оболочками находится упругий заполнитель. Метод учитывает геометрию и механические характеристики оболочек, упругие характеристики поперечных опор и физико-механические свойства материала упругого заполнителя. При решении задачи предполагается, что материал упругого заполнителя удовлетворяет основным соотношениям теории упругости, а упругие характеристики заполнителя при динамическом нагружении соответствуют характеристикам при статическом нагружении. Это позволяет использовать полученные результаты для решения задач как в статической, так и динамической постановке. Выбором различного сочетания характеристик оболочек и упругого заполнителя можно обеспечить наиболее благоприятные условия нагружения как внутренней, так и внешней оболочек в зависимости от постановки задачи. В качестве примера исследовались нагрузки на внутреннюю оболочку в зависимости от характеристик внешней оболочки и погонной жесткости упругого заполнителя. Аналогично могут быть получены оценки нагрузок, действующих на внешнюю оболочку

Ключевые слова: *внешняя оболочка, внутренняя оболочка, упругий заполнитель, составная оболочка, изгибающий момент, коэффициент упругой податливости, плоская задача теории упругости*

Введение. Рассматривается составная цилиндрическая оболочка, то есть конструкция, состоящая из внешней и внутренней оболочек, между которыми располагается упругий слой (упругий заполнитель). Кроме того, оболочки соединены системой упругих поперечных связей. Такие оболочки находят широкое применение в магистральных трубопроводах, железнодорожном транспорте, авиационной технике, ракетостроении. Конструктивная схема составной оболочки с заполнителем представлена на рис. 1. На внешнюю оболочку действует поперечная нагрузка. Посредством поперечных упругих опор и упругого заполнителя эти нагрузки передаются на внутреннюю оболочку. Уровень и динамика этого воздействия определяются как параметрами воздействия, так и характеристиками упругого основания. Чаще всего такая конструкция составной оболочки призвана обеспечить снижение нагрузок на внутреннюю оболочку за счёт их передачи на внешнюю оболочку. Поэтому в настоящей работе оценивается возможность снижения нагрузок на внутреннюю оболочку при заданном уровне воздействия на внешнюю оболочку.

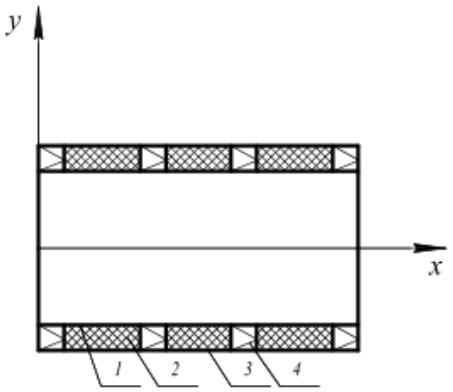


Рис. 1. Конструктивная схема составной оболочки с упругим заполнителем:
1 — внутренняя оболочка; 2 — внешняя оболочка; 3 — упругий заполнитель;
4 — опора

Математическая модель упругого заполнителя. При решении задачи предполагается, что упругий заполнитель есть слой упругого материала толщиной H. Как показано в работах [1–5] для определения поперечных нагрузок на внутреннюю и внешнюю оболочки, являющихся частями составной оболочки при использовании упругого заполнителя, необходимо знать упругие характеристики этого заполнителя. Этими характеристиками являются коэффициенты упругой податливости (коэффициент постели) заполнителя. В настоящей работе принята модель упругого заполнителя, предложенная в работах [6–8]. Эта модель способна распределять нагрузку, т.е. способна вследствие связности работать и за пределами приложения нагрузки. Схематически она может быть представлена как система упругих элементарных столбцов (пружин), между которыми существуют внутренние связи, вовлекающие в работу соседние пружины. Схема такого упругого заполнителя представлена на рис. 2. В основу модели положена гипотеза о том, что продольные перемещения в упругом заполнителе отсутствуют. В этом случае рассматривается модель с двумя упругими характеристиками, определяемую двумя коэффициентами упругой податливости заполнителя k, t: k — коэффициент определяет работу упругого заполнителя на сжатие; t — коэффициент определяет работу упругого заполнителя на сдвиг.

Для определения этих коэффициентов используется метод перемещений. Для этого рассматривается равновесие элемента упругого заполнителя шириной δ и единичной длины. Это позволяет свести задачу к плоской задаче теории упругости. Причем для рассматриваемого элемента продольные смещения $u(x,y)$, поперечные перемещения $\vartheta(x,y)$. Перемещения считаются положительными, если их

направления совпадают с направлениями координатных осей.

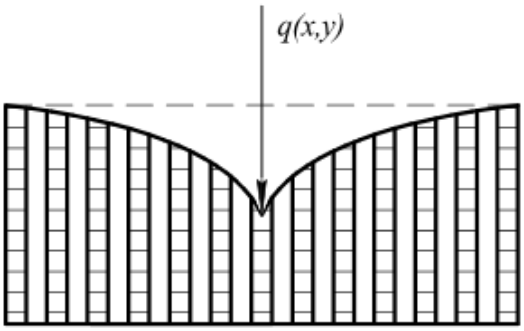


Рис. 2. Схема работы упругого заполнителя

В общем случае плоской задачи теории упругости напряжения связаны с деформацией следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2\right),\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1\right),\\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{E}{2\left(1+\mu\right)}\gamma,\end{aligned} \tag{1}$$

где $\sigma_x.$, σ_y — нормальные направления по осям x и y; τ_{xy}, τ_{yx} — касательные напряжения; E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала заполнителя; ε_1, ε_2 — относительные деформации по осям x и y; γ — деформация сдвига.

В свою очередь деформации упругого тела определяются в виде

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}.$$

Для определения напряженно-деформированного состояния выделенного элемента перемещения $u\left(x,y\right)$ и $\vartheta\left(x,y\right)$ представляются в виде конечных разложений

$$\begin{aligned}u\left(x,y\right) &= \sum_{i=1}^{m} U_i\left(x\right)\varphi_i\left(y\right),\ i=1,2,\ldots m,\\ \vartheta\left(x,y\right) &= \sum_{k=1}^{m} V_k\left(x\right)\psi_k\left(y\right),\ i=1,2,\ldots m.\end{aligned} \tag{2}$$

В соотношениях (2) функции $U_i(x)$, $V_k(x)$ считаются неизвестными, функции $\varphi_i(y)$, $\psi_k(y)$ определяются из физических соображений. Причем размерность функций $U_i(x)$, $V_k(x)$ принимаются равной размерности исходных функций $u(x,y)$, $\vartheta(x,y)$, в то время как функции $\varphi_i(y)$, $\psi_k(y)$ являются безразмерными. общем случае уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} u(x,y) dF &= -\int \tau_{xy}\gamma dF + \int p(x,y)u(x,y)dy = 0;\\ \int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \vartheta(x,y) dF &= -\int \sigma_{xy}\varepsilon_2 dF + \int q(x,y)\vartheta(x,y)dy = 0,\end{aligned} \tag{3}$$

где $dF = \delta dy$ — дифференциал площади поперечного сечения выделенного элемента; $p(x,y)$, $q(x,y)$ — компоненты нагрузки в направлении осей x и y.

Напряжения в соответствии с формулами (1) при представлении перемещений в виде (2) запишутся следующим образом

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[\sum_{i=1}^{m} U_i'\phi_i + \mu\sum_{k=1}^{n} V_k'\psi_k\right],\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[\sum_{k=1}^{n} V_k\psi_k' + \mu\sum_{i=1}^{m} U_i'\phi_i\right],\\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\sum_{i=1}^{m} U_i\phi_i' + \sum_{k=1}^{n} V_k'\psi_k\right].\end{aligned} \tag{4}$$

Учитывая соотношения (4), из уравнений равновесия (3) можно получить $m+n$ обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $U_i(x)$, $V_k(x)$ вида

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} a_{ij}U_i'' - \frac{1-\mu}{2}\sum_{i=1}^{m} b_{ij}U_i + \sum_{k=1}^{n}\left(\mu t_{ik} - \frac{1-\mu}{2}c_{jk}\right)V_k' + \frac{1-\mu^2}{E}p_j = 0,\\ &-\sum_{i=1}^{m}\left(\mu t_{hi} - \frac{1-\mu}{2}c_{hi}\right)U_i' + \frac{1-\mu}{2}\sum_{k=1}^{n} r_{hk}V_k'' - \sum_{k=1}^{n} s_{hk}V + \frac{1-\mu}{E}q_n = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

В формулах (5) обозначены:

$$\begin{aligned}a_{ij} = a_{ji} = \int \phi_i\phi_j dF,\ b_{ij} = b_{ji} = \int \phi_j'\phi_i' dF,\ c_{jk} = \int \phi_j'\psi_k dF,\\ c_{hi} = \int \psi_k'\phi_i' dF,\ t_{jk} = \int \phi_i\psi_k' dF,\ t_{hk} = \int \psi_h'\phi_k dF,\\ r_{hk} = \int \psi_h\psi_k dF,\ s_{hk} = \int \psi_h'\psi_k' dF,\end{aligned} \tag{6}$$

Физический смысл этих коэффициентов может быть интерпретирован как своего рода обобщенные моменты инерции.

При заданных компонентах нагрузки $p(x,y)$, $q(x,y)$ p_j и q_h определяется как обобщенные продольные и поперечные (отнесенные к единице длины) силы по формулам

$$p_j = \int p(x,y)\phi_j dy,\ q_h = \int q(x,y)\psi_h dy.$$

Система дифференциальных уравнений (5) позволяет определить напряженно-деформированное состояние заполнителя. При ограниченном числе членов в разложении (2) решение системы (5) можно рассматривать как приближенное к точному решению. Выбирая для функций φ_i, ψ_k различные выражения, можно получить ряд моделей упругого заполнителя, приближенных с точки зрения теории упругости, но достаточно точных с точки зрения практических задач, кроме того, увеличивая количество членов в разложении (2) можно увеличить точность решения задачи.

В рассматриваемом случае задача может быть значительно упрощена в связи с тем, что основную роль в работе заполнителя играют поперечные перемещения. Поэтому продольными перемещениями можно пренебречь по сравнению с поперечными, кроме того из условия задачи следует, что можно пренебречь продольными усилиями по сравнению с поперечными. Тогда будем иметь

$$u(x,y) = 0,\ \vartheta(x,y) = \sum_{k=1}^{n} V_k(x)\psi_k(y),\ \ p(x,y) = 0.$$

С учетом последних соотношений получим

$$\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = \sum_{k=1}^{n} V_k(x)\psi_k'(y),\ \ \gamma = \sum_{k=1}^{n} V_k'(x)\psi_k(y).$$

Уравнения равновесия (3) будут иметь вид

$$\frac{1-\mu}{2}\sum_{k=1}^{n} r_{hk}V_k'' - \sum_{k=1}^{n} s_{hk}V_k + \frac{1-\mu^2}{E}q_h = 0,\ \ h = 1,2,..,n. \qquad (7)$$

В том случае, если упругий заполнитель представляет собой слой небольшой мощности $(H << R)$, а поперечные перемещения по подошве этого слоя отсутствуют, можно предположить

$$\vartheta(x,y) = V_1(x)\psi_1(y),\ \ \psi_1(y) = \frac{H-y}{H}. \qquad (8)$$

В этом случае система (7) сведется к уравнению

$$\frac{1-\mu}{2} r_{11} V_1' - s_{11} V_1 + \frac{1-\mu^2}{E} q_1 = 0, \tag{9}$$

где $r_{11} = \int_0^H \psi_1^2 dF = \frac{\delta H}{3}$, $s_{11} = \int_0^H \psi_1^2 dF = \frac{\delta}{H}$.

Модель упругого заполнителя, описывается уравнением (9) есть модель с двумя упругими характеристиками. Если рассматривать случай $H << R$, то уравнение (9) может быть представлено в виде

$$2tV_1'' - kV_1 + q = 0, \tag{10}$$

где $k = \frac{Es_{11}}{1-\mu^2}$ — коэффициент, определяющий работу упругого заполнителя на сжатие; $t = \frac{Er_{11}}{4(1+\mu)}$ — коэффициент, определяющий работу упруго заполнителя на сдвиг.

Полученные зависимости для коэффициентов упругой податливости заполнителя применительно к выделенному элементу могут быть преобразованы для случая составной цилиндрической оболочки. Для получения этих коэффициентов рассмотрим кольцо единичной ширины, выделенное сечениями, перпендикулярными оси оболочки. Схема нагружения кольца при поступательном движении в его плоскости представлена на рис. 3. Перемещение центра кольца обозначим a. Тогда деформация элементарного элемента, выделенного из упругого заполнителя и расположенного под углом α к направлению движения центра кольца, может быть записано в виде

$$a_\alpha = a\cos\alpha.$$

Проекция этого перемещения на направление центра кольца равна

Таким образом, если привести рассматриваемое кольцо к эквивалентной ему с точки зрения площади опирания плоской пластинки шириной δ_0, то необходимо потребовать выполнения условия

$$\delta_0 a = 2\int_0^{\pi/2} a\cos^2\alpha R d\alpha, \text{ т.е. } \delta_0 = \frac{\pi R}{2}.$$

Тогда, согласно (9), для коэффициентов упругой податливости заполнителя будут справедливы формулы:

$$k = \frac{E}{1-\mu^2}\frac{\pi R}{2}\int_0^H \psi_1'^2(y)dy,\ t = \frac{E}{4(1+\mu)}\frac{\pi R}{2}\int_0^H \psi_1^2(y)dy.$$

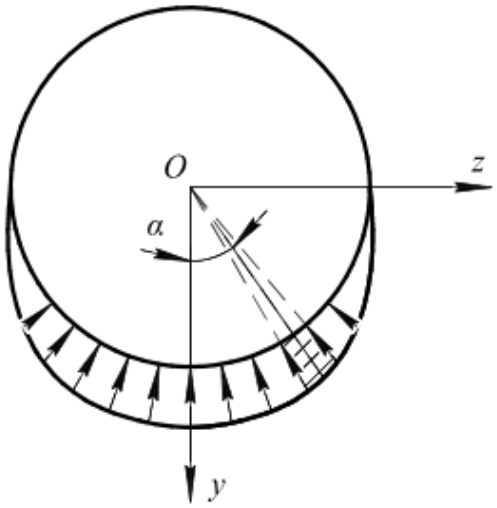


Рис. 3. Схема нагружения сечения внутренней оболочки

Рассматривая случай малой толщины упругого заполнителя $H << R$ и принимая функцию $\psi_1(y)$ в виде (8), коэффициенты упругой податливости будут равны

$$k = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{\pi R}{2H},\ t = \frac{E}{24(1+\mu)} \pi RH. \qquad (11)$$

В соответствии с формулой (11) оценивались коэффициенты k и t для различных сочетаний радиуса внутренней оболочки и толщины упругого заполнителя. Расчёты проводились для некоторых материалов, которые согласно [9–11] которые могут быть использованы в качестве возможного упругого заполнителя. Результаты расчёта представлены в табл. 1.

Таблица 1

Значения коэффициентов упругой податливости различных типов заполнителя

Тип упругого заполнителя	E $кг/см^2$	$R=150см$, $H=5см$		$R=112,5см$, $H=5см$		$R=125см$, $H=10см$	
		k	t	k	t	k	t
		$T/м^2$	T	$T/м^2$	T	$T/м^2$	T
Пенопласт на основе поливинилхлорида	$8\cdot10^3$ $4{,}5\cdot10^4$	$1{,}5\cdot10^5$ 10^6	$9{,}9\cdot10$ $1{,}95\cdot10^2$	$2{,}8\cdot10^5$ $1{,}89\cdot10^6$	$2{,}9\cdot10$ $1{,}95\cdot10^2$	$1{,}57\cdot10^5$ $1{,}05\cdot10^6$	$6{,}55\cdot10$ $4{,}35\cdot10^2$
Пенопласт на основе полистирола	$4\cdot10^3$ $4\cdot10^4$	$0{,}75\cdot10^5$ $0{,}85\cdot10^6$	$4{,}95\cdot10$ $5{,}75\cdot10^2$	$1{,}42\cdot10^5$ $1{,}59\cdot10^6$	$1{,}47\cdot10$ $1{,}71\cdot10^2$	$0{,}78\cdot10^5$ $0{,}88\cdot10^6$	$3{,}28\cdot10$ $3{,}8\cdot10^2$
Пенопласт на основе фенольно-формальдегидной смолы	$2{,}6\cdot10^3$ $4\cdot10^4$	$0{,}49\cdot10^5$ $0{,}85\cdot10^6$	$3{,}28\cdot10$ $5{,}78\cdot10^2$	$0{,}92\cdot10^5$ $1{,}59\cdot10^6$	$1\cdot10$ $1{,}77\cdot10^2$	$0{,}57\cdot10^5$ $0{,}88\cdot10^6$	$2{,}18\cdot10$ $3{,}8\cdot10^2$
Пенопласт типа полиуретана	$5{,}3\cdot10^3$ $2{,}8\cdot10^4$	$0{,}88\cdot10^5$ $0{,}62\cdot10^6$	$6{,}6\cdot10$ $4{,}1\cdot10^2$	$1{,}87\cdot10^5$ $1{,}17\cdot10^6$	$1{,}95\cdot10$ $1{,}22\cdot10^2$	$1{,}04\cdot10^5$ $0{,}65\cdot10^6$	$4{,}35\cdot10$ $2{,}72\cdot10^2$

Как следует из таблицы значения коэффициентов упругой податливости заполнителя могут меняться в достаточно широком диапазоне, что позволяет в каждом конкретном случае выбрать u_x оптимальное с точки зрения нагружения оболочки значения.

Математическая модель нагрузок на составную оболочку с упругим заполнителем. В основу модели положены метод начальных параметров [12–15]. Для этого оболочка разбивается на участки с постоянным по длине массовыми и жесткостными характеристиками. Выделяются участки малой длины, на которых имеет место сосредоточенные нагрузки-реакции упругих связей между оболочками. Величина жесткости упругой связи между оболочками определяется как произведение полной жесткости заполнителя, характеризующейся коэффициентами k и t, на длину участка. В этом случае, если полная жесткость заполнителя меняется по длине оболочки, жесткость упругой опоры, приведенная к сечению, расположенному на стыке $(i-1)$-го и i-го участка будет равна

$$c_{y_i} = \frac{1}{2}\left(k_{i-1}\Delta l_{i-1} + k_i \Delta l_i\right),$$

$$c_{\phi_i} = \frac{1}{2}\left(t_{i-1}\Delta l_{i-1} + t_i \Delta l_i\right),$$

где c_{y_i}, c_{φ_i} — линейна угловая жесткость упругой связи между оболочками; Δl_i — длина участков, на которые разбивается оболочка.

Если рассматривать заполнитель с постоянными физико-механическими свойствами, то коэффициенты упругой податливости k, t являются постоянными величинами и тогда

$$c_{y_i} = \frac{k}{2}\left(\Delta l_{i-1} + \Delta l_i\right),$$

$$c_{\phi_i} = \frac{l}{2}\left(\Delta l_{i-1} + \Delta l_i\right).$$

На участке расположения дискретных упругих связей между оболочками жесткость этих связей суммируется c_{y_i} и c_{φ_i}.

Для принятой расчетной схемы управления равновесия элемента оболочки, выделенного сечения перпендикулярными оси оболочки имеют вид

$$y_{iH} = y_i + l_i\theta_i + \frac{l_i^2}{2E_iI_i}M_i + \frac{l_i^3}{6E_iI_i}Q_i + \Delta y_i,$$

$$\theta_{iH} = \theta_i + \frac{l_i}{E_i I_i} M_i + \frac{l_i^2}{2E_i I_i} Q_i + \Delta\theta_i,$$

$$M_{i+1} = M_i + l_i Q_i + \Delta M_i,$$

$$Q_{i+1} = Q_i + \Delta Q,$$

$$\Delta y_i = \left(n_{y_i} \frac{l_i^3}{4!} + n_{\phi_i} \frac{l_i^4}{5!} \right) \frac{\Delta G_i}{E_i J_i}, \tag{12}$$

$$\Delta\Theta_i = -\left(n_{y_i} \frac{l_i^2}{3!} + n_{\phi_i} \frac{l_i^3}{4!} \right) \frac{\Delta G \tau i}{E_i I_i},$$

$$\Delta M_i = -\left(n_{y_i} \frac{l_i}{2!} + n_{\phi_i} \frac{l_i^2}{4!} \right) \Delta G \tau i,$$

$$\Delta Q_i = -\left(n_{y_i} + n_{\phi_i} \frac{l_i}{2!} \right) \Delta G \tau i,$$

$$n_{y_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta G_{\tau i}}, \quad n_{\phi_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i^* + \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \left(x_i - x_0 \right)}{I_0 g}.$$

Здесь y_i, Θ_i, M_i, Q_i — прогиб, угол поворота, изгибающий момент и перерезывающая сила в i-ом сечении оболочки; n_{y_i} — поперечная перегрузка в i-ом сечении; n_{φ_i} — угловая перегрузка в i-ом сечении; M_i^*, Q_i^* — изгибающий момент и перерезывающая сила, действующие на внешнюю оболочку; l_i, ΔG_i — длина и масса i-ого участка; $E_i I_i$ — изгибающая жесткость i-ого участка; I_0 — момент инерции составной оболочки; x_i, x_0 — координаты i-ого сечения и центра масс составной оболочки.

Уравнения (12) справедливы как для внутренней, так и внешней оболочек.

В векторно-матричной форме уравнения (12) имеют вид

$$\eta_{i+1} = A\eta_i,$$

где $\eta_i = \left(y_{pi} \Theta_{pi} M_{pi} Q_{pi} 1 y_{ki} \Theta_{ki} M_{ki} Q_{ki} 1 \right)$ — матрица параметров в i-м сечении; $\eta_{i+1} = \left(y_{p(i+1)} \Theta_{p(i+1)} M_{p(i+1)} Q_{p(i+1)} 1 y_{k(i+1)} \Theta_{k(i+1)} M_{k(i+1)} Q_{k(i+1)} 1 \right)$ — матрица параметров в $(i+1)$-м сечении; A_i — передаточная матрица i-ого сечения, имеющая вид

$$A_i = \left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & \Delta l_i & \dfrac{\Delta l_i^2}{2(EI)_{pi}} & \dfrac{\Delta l_i^3}{6(EI)_{pi}} & \Delta y_i & & & & & \\ 0 & 1 & \dfrac{\Delta l_i}{(EI)_{pi}} & \dfrac{\Delta l_i^2}{2(EI)_{pi}} & \Delta\Theta_i & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \Delta l_i & \Delta M_i & & & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta Q_i & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ \hdashline & & & & & 1 & \Delta l_i & \dfrac{\Delta l_i^2}{2(EI)_{pi}} & \dfrac{\Delta l_i^3}{6(EI)_{pi}} & \Delta y_i \\ & & & & & 0 & 1 & \dfrac{\Delta l_i}{(EI)_{pi}} & \dfrac{\Delta l_i^2}{2(EI)_{pi}} & \Delta\Theta_i \\ & & 0 & & & 0 & 0 & 1 & \Delta l_i & \Delta M_i \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta Q_i \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

При этом индексы p и k относятся соответственно к внутренней и внешней оболочке.

С учетом коэффициентов упругой податливости заполнителя и наличия упругих связей между оболочками будем иметь

$$\begin{aligned} Q_{pi} &= \overline{Q}_{pi} + C_{yi}\left(y_{pi} - y_{ki}\right) - Q_{pi}^{*}, \\ Q_{ki} &= \overline{Q}_{ki} + C_{yi}\left(y_{ki} - y_{pi}\right) - Q_{ki}^{*}, \\ M_{pi} &= \overline{M}_{pi} + C_{\phi i}\left(\Theta_{pi} - \Theta_{ki}\right) - M_{pi}^{*}, \\ M_{ki} &= \overline{M}_{ki} + C_{\phi i}\left(\Theta_{ki} - \Theta_{pi}\right) - M_{ki}^{*}, \end{aligned} \qquad (13)$$

где Q_{pi}^{*}, Q_{ki}^{*}, M_{pi}^{*}, M_{ki}^{*} — внешние сосредоточенные силы и моменты, действующие на внутреннюю и внешнюю оболочки.

Черта сверху обозначает параметры слева от сосредоточенной нагрузки (отсчёт идет от сечения $x = 0$).

В векторно-матричной форме уравнения (13) имеют вид

$$\eta_i = B_i \overline{\eta}_i,$$

где B_i — матрица сосредоточенных нагрузок, определяемая по формуле

$$B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{yi} & 1 & 0 & M^*_{pi} & 0 & 0 & -C_{yi} & 0 & 0 \\ C_{yi} & 0 & 0 & 1 & -Q^*_{pi} & -C_{yi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\phi i} & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{\phi i} & 1 & 0 & M^*_{ki} \\ -C_{yi} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{yi} & 0 & 0 & 1 & -Q^*_{ki} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью передаточных матриц и матриц сосредоточенных нагрузок может быть получено векторно-матричное уравнение, связывающее параметры нагрузок конечного и начального сечений составной оболочки.

$$\eta_n = B_1 A_1 B_2 A_2 \ldots B_n A_n \eta_0 = \prod_{i=1}^{n} B_i A_i \eta_0. \qquad (14)$$

Матрица начальных параметров определяется на основании граничных условий на концах оболочки, исходя из условий их закрепления. Таким образом, уравнение (14) позволяет определить изгибающие моменты и перерезывающие силы в любом сечении составной оболочки.

Алгоритм реализации предложенного метода расчета нагрузок. Предложенный метод расчета нагрузок на составную оболочку с упругим заполнителем включает в себя следующие этапы: представление оболочки в виде набора конечного числа участков с постоянными по длине упругими и массовыми характеристиками; вычисление коэффициентов упругой податливости заполнителя; вычисление линейных и угловых связей между оболочками, приведенных к сечениям, расположенным на стыке участков; вычисление передаточных матриц на границах участков; вычисление матриц сосредоточенных нагрузок на границах участков; вычисление нагрузок (перерезывающих сил и изгибающих моментов), действующих как на внутреннюю, так и на внешнюю оболочки.

В качестве примера реализации предложенного алгоритма на рис. 4 представлены результаты расчёта изгибающих моментов, действующих на внутреннюю оболочку для различных значений упругих связей между оболочками и различных значений изгибных жёсткостей внешней оболочки.

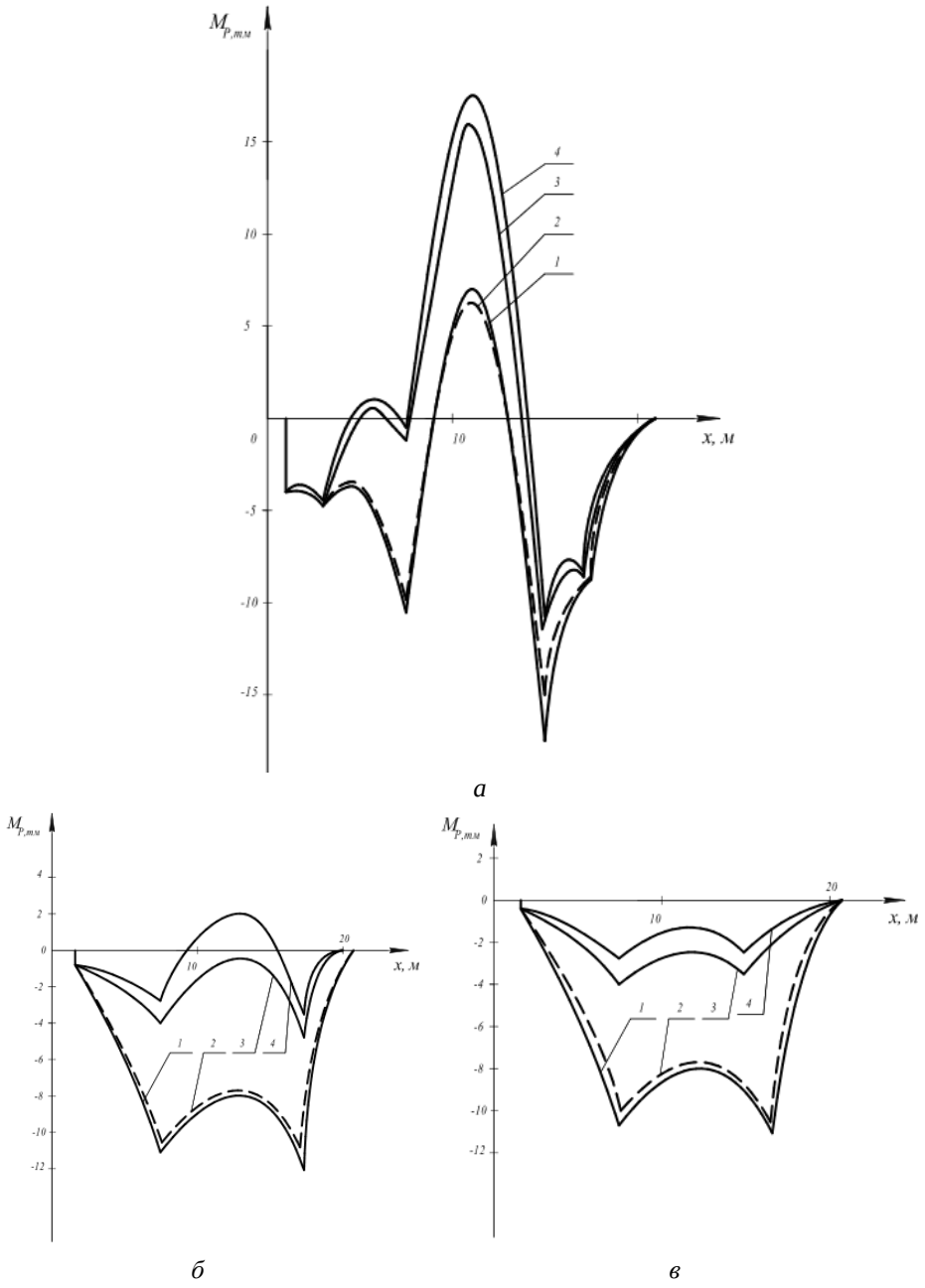


Рис. 4. Изменение изгибающего момента по длине внутренней оболочки для различных значений изгибной жесткости внешней оболочки при погонной жесткости упругого заполнителя (*а*, *б*, *в*):

1 — $C_\phi = 0,\ I_k = I_k^0$; 2 — $C_\phi = 10^2 T,\ I_k = I_k^0$; 3 — $C_\phi = 0,\ I_k = 5I_k^0$; 4 — $C_\phi = 0,\ I_k = 10I_k^0$;

а — $10^4\, T/м^2$; *б* — $10^5\, T/м^2$; *в* — $2 \cdot 10^5\, T/м^2$

На рис.5 представлены результаты расчёта максимального значения изгибающего момента в сечениях внутренней оболочки в зависимости от изгибной жёсткости внешней оболочки для некоторых значений погонной жёсткости упругого заполнителя.

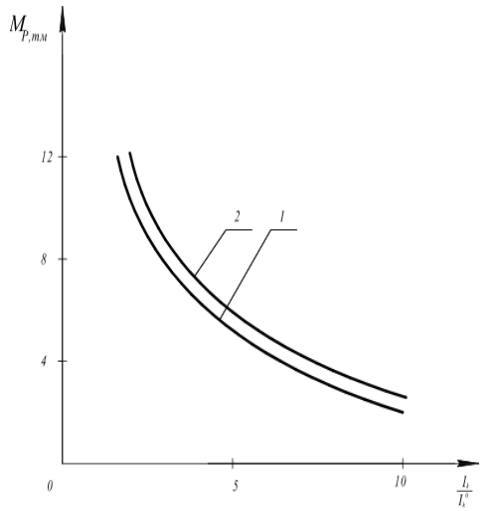


Рис. 5. Зависимость максимального изгибающего момента внутренней оболочки от изгибной жесткости внешней оболочки для различных значений погонной жесткости упругого заполнителя:

$1 — C_y = 10^2\, T/м$; $2 —\ C_y = 2{,}5 \cdot 10^5\, T/м$

Как видно из представленных графиков соответствующим выборам характеристик упругого заполнителя и изгибной жёсткости внешней оболочки можно значительно снизить изгибающий момент на внутреннюю оболочку. Кроме того, расчёты показали, что влияние угловой жесткости на изгибающий момент для реальных физико-механических характеристик упругого заполнителя незначительно и ею можно пренебречь. Это означает, что при практических расчётах учитывать только коэффициент упругой податливости, определяющий работу упругого заполнителя на сжатие.

Выводы. 1. Предложенный метод расчёта нагрузок на составную цилиндрическую оболочку позволяет учитывать влияние упругого заполнителя на величину нагрузок, действующих как на внутреннюю, так и на внешнюю оболочку. 2. Упругий заполнитель не только влияет на величину действующей нагрузки, но и одновременно перераспределяет её по длине оболочки, что даёт возможность выбором характеристик заполнителя обеспечить равнопрочность оболочки по всей её длине. 3. Изгибная жёсткость внешней оболочки существенно влияет на величину нагрузок, действующих на внутреннюю оболочку. Это

значит выбором параметров внешней оболочки можно обеспечить оптимальные условия работы внутренней оболочки. 4. Выбором характеристик элементов составной оболочки можно существенно снизить нагрузки, действующие как на внутреннюю, так и на внешнюю оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сухинин С.Н. *Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2010, 248 с.

[2] Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. *Методы расчета цилиндрических оболочек из композиционных материалов*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2009, 264 с.

[3] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физматлит, 2009, 624 с.

[4] Димитриенко Ю.И. *Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды*. *Т. 2.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 559 с.

[5] Окопный Ю.А., Родин В.П., Чарков И.П. *Механика материалов и конструкций*. Москва, Машиностроение, 2001, 407 с.

[6] Бутина Т.А., Дубровин В.М. Моделирование упруго-пластического поведения материала при импульсном нагружении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 3 (27).
URL: http://www.engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/1231.html

[7] Бакулин В.Н. *Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек*. Москва, Наука, 1998, 462 с.

[8] Бушуев А.Ю., Яковлев Д.О. О подходе к оптимизации упругих конструкций по частотным характеристикам. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011. Спец. выпуск «Математическое моделирование», с. 66–69.

[9] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование напряжений в тонких композитных цилиндрических оболочках на основе асимптотической теории. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 3 (19), с. 109–126.

[10] Дубровин В.М., Семёнов К.С. Моделирование несущей способности гладкой цилиндрической оболочки в условиях ползучести материала. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 3 (15), с. 38–48.

[11] Жилин П.А. *Основы теории оболочек*. Санкт-Петербург, Изд-во политехнического университета, 2006, 306 с.

[12] Фролов К.В. *Избранные труды. В 2 т. Т. 2. Машиноведение и машиностроение*. Москва, Наука, 2007, 522 с.

[13] Голушко С.К., Немировский Ю.В. *Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2008, 432 с.

[14] Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при воздействии ударной сосредоточенной нагрузки. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 9 (21). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-9-957

[15] Бутина Т.А., Дубровин В.М. Устойчивость цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, спец. вып. № 3 «Математическое моделирование», с. 127–133.

Статья поступила в редакцию 06.05.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Дубровин В.М., Семёнов К.С. Моделирование нагрузок на составную цилиндрическую оболочку с упругим заполнителем. *Математическое моделирование и численные методы*, 2019, № 1, с. 27–42.

Дубровин Виктор Митрофанович — канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. e-mail: dubrovinvm1934@yandex.ru

Семёнов Кирилл Сергеевич — инженер I категории Центра Управления Полетами РКК «Энергия», специалист в области управления сложными техническими системами. e-mail: semyonof@gmail.com

Modeling of loads on a composite cylindrical shell with an elastic filler

© V.M. Dubrovin, K.S. Semenov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

A method for calculating the loads on a composite cylindrical shell, consisting of external and internal shells connected by a system of elastic transverse supports, is proposed. Between the shells is an elastic filler. The method takes into account the geometry and mechanical characteristics of the shells, the elastic characteristics of the transverse supports and the physico-mechanical properties of the material of the elastic aggregate. In solving the problem, it is assumed that the material of the elastic aggregate satisfies the basic relations of the theory of elasticity, and the elastic characteristics of the aggregate under dynamic loading correspond to the characteristics under static loading. This allows you to use the results to solve problems in both static and dynamic formulations. By choosing a different combination of characteristics of the shells and the elastic filler, it is possible to provide the most favorable loading conditions for both the inner and outer shells, depending on the statement of the problem. As an example, the loads on the inner shell were studied depending on the characteristics of the outer shell and the specific stiffness of the elastic filler. Similarly, estimates of the loads acting on the outer shell can be obtained.

Keywords: *shell, elastic filler, composite shell, bending moment, coefficient of elastic compliance, plane problem of the theory of elasticity*

REFERENCES

[1] Sukhinin S.N. *Prikladnye zadachi ustoychivosti mnogosloynykh kompozitnykh obolochek* [Applied stability problems of multilayer composite shells]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2010, 248 p.

[2] Solomonov Yu.S., Georgievskiy V.P., Nedbay A.Ya., Andryushin V.A. *Metody rascheta tsilindricheskikh obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Methods for calculating cylindrical shells of composite materials]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2009, 264 p.

[3] Dimitrienko Yu.I. *Nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy* [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 624 p.

[4] Dimitrienko Yu.I. *Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuum]. Vol. 2. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 559 p.

[5] Okopnyy Yu.A., Rodin V.P., Charkov I.P. *Mekhanika materialov i konstruktsiy* [Mechanics of materials and structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2001, 407 p.

[6] Butina T.A., Dubrovin V.M. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations*, 2014, no. 3 (27). Available at: http://www.engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/1231.html

[7] Bakulin V.N. *Dinamicheskie zadachi nelineynoy teorii mnogosloynykh obolochek* [Dynamic problems of non-linear theory of multilayered shells]. Moscow, Nauka Publ., 1998, 462 p.

[8] Bushuev A.Yu., Yakovlev D.O. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser Estestvennye nauki. Spets. vyp. "Matematicheskoe modelirovanie" — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. Special edition on mathematical modelling*, 2011, pp. 66–69.

[9] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Pichugina A.E. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 3, pp. 109–126.

[10] Dubrovin V.M., Semenov K.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 3, pp. 38–48.

[11] Zhilin P.A. *Osnovy teorii obolochek* [Foundations of shell theory]. St. Petersburg, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University Publ., 2006, 306 p.

[12] Frolov K.V. *Izbrannye trudy. V 2 tomakh. Tom 2. Mashinovedenie i mashinostroenie* [Selected works. In 2 vol. Vol. 2. Engineering and machine building]. Moscow, Nauka Publ., 2007, 522 p.

[13] Golushko S.K., Nemirovskiy Yu.V. *Pryamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugikh kompozitnykh plastin i obolochek vrashcheniya* [Direct and inverse problems of mechanics of elastic composite plates and rotary shells]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2008, 432 p.

[14] Dubrovin V.M., Butina T.A. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 9 (21). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-9-957

[15] Butina T.A., Dubrovin V.M. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana, Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences*, 2012, special iss., no. 3 "Mathematical modeling", pp. 127–133.

Dubrovin V.M., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Bauman Moscow State Technical University; a specialist in the field of strength and stability of deformable systems.
e-mail: dubrovinvm1934@yandex.ru

Semenov K.S., 1st category engineer, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia; a specialist in complex technical systems control. e-mail: semyonof@gmail.com