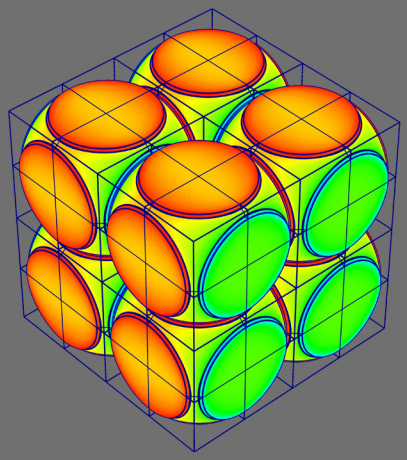
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Каримов С.Б., Кольжанова Д.Ю. Модели-рование эффективных характеристик трансверсально-изотропных несжимаемых композитов с конечными деформациями. Математическое моделирование и чис-ленные методы, 2018, № 4, с. 72–92.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/182/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 09:20:46

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2018-4-7292

Моделирование эффективных характеристик трансверсально-изотропных несжимаемых композитов с конечными деформациями

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева,
С.Б. Каримов, Д.Ю. Кольжанова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена модель эффективных определяющих соотношений трансверсально-изотропного несжимаемого композита с конечными деформациями. Модель относится к так называемому классу универсальных моделей, связывающих сразу несколько пар энергетических тензоров напряжений и деформаций. Предложен метод разделения связанных задач микро- и макроскопического деформирования композитов с конечными деформациями, которые возникают при использовании метода асимптотического осреднения (МАО) периодических структур. Метод основан на применении модели эффективных определяющих соотношений в качестве аппроксимационной зависимости результатов численного моделирования диаграмм деформирования композитов, полученных с помощью точного метода МАО. Для нахождения упругих констант модели трансверсально-изотропного композита применяется метод минимизации отклонения аппроксимационных диаграмм деформирования от диаграмм, полученных методом МАО, для серии стандартных задач деформирования при конечных деформациях. Задачи минимизации решались с помощью метода Нелдера—Мида. Представлены результаты численного моделирования предложенным методом для нелинейно-упругих слоистых композитов, показавших хорошую точность аппроксимации, которая достигается благодаря предложенному методу разделения связанных задач микро- и макроскопического деформирования.

Ключевые слова: *слоистые композиты, несжимаемые среды, трансверсально-изотропная среда, конечные деформации, метод асимптотического осреднения, универсальные модели упругих сред, энергетические пары тензоров*

Введение. В настоящее время существует много работ, посвященных моделированию эффективных механических характеристик композиционных материалов [1–11]. Для практических целей большое значение имеет задача определения эффективных упругих характеристик композитов на основе информации о микроструктуре и свойствах, входящих в него фаз. Методов решения этой задачи существует довольно много [5, 12–13], однако большинство из них неприменимо для композитов с конечными деформациями, поскольку в этом случае задача обладает существенной нелинейностью.

Для расчета эффективных характеристик композитов наиболее перспективен метод гомогенизации (метод асимптотического осреднения), предложенный Н.С. Бахваловым, Г.П. Панасенко, A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicalaou [2], Э. Санчес-Паленсия [4]. Метод асимпто-

тического осреднения достаточно хорошо развит в настоящее время и успешно численно реализован для разных задач механики, но главным образом для линейных задач.

В работах [14–16] этот метод был применен для расчета нелинейно-упругих свойств слоистых композитов с конечными деформациями. Был предложен метод расчета диаграмм деформирования слоистых композитов с конечными деформациями на основе асимптотической теории осреднения нелинейно-упругих композитов с периодической структурой для случая конечных деформаций, а также с учетом несжимаемости материалов слоев.

Несжимаемыми средами с конечными деформациями являются практически все резиноподобные материалы [17–21]. Несжимаемые материалы некорректно рассматривать как предельный случай слабой сжимаемости, поэтому для таких материалов используются специальные модели и особая постановка задачи теории упругости с дополнительным условием несжимаемости. Полученные задачи требуют специальных методов решения.

Для решения задач макроскопического деформирования элементов конструкций из композитов с конечными деформациями необходимо применять определяющие соотношения для композитов с учетом возможной анизотропии. Непосредственное использование метода асимптотического осреднения для построения определяющих соотношениий затруднительно, поскольку он основан на решении специальных задач микроскопического деформирования на ячейках периодичности (ЯП). В линейном случае задачи микро- и макроскопического деформирования разделяются, но для конечных деформаций эти задачи связаны. Расчеты макроскопического деформирования, например, методом конечных элементов, когда в каждом узле сетки приходится решать задачу на ячейке периодичности, приводят к очень большим объемам вычислений.

Цель настоящей работы — разработать метод, который позволит разъединить задачи макро- и микроскопического деформирования нелинейно-упругих композитов и значительно уменьшить количество вычислений.

Модель трансверсально-изотропных несжимаемых сред с конечными деформациями. Поскольку решение локальных задач на ЯП, особенно для случая композитов с конечными деформациями, требует больших объемов вычислений, перейдем от точного решения этих задач в каждом конкретном случае нагружения ЯП системой осредненных напряжений к построению аналитически эффективных определяющих соотношений для композита в целом. Константы, входящие в эти определяющие соотношения, будем находить с помощью аппроксимации диаграмм деформирования композитов для частных задач деформирования, при этом сами диаграммы деформи-

рования рассчитываются при ограниченном числе вариантов решений задач на ЯП композита.

Предлагаемый метод фактически представляет собой численный эксперимент, в котором вместо нахождения диаграмм деформирования экспериментальным путем используется численное решение задач на ЯП. В дальнейшем как в численном, так и в реальном физическом эксперименте подбирают наиболее удачный аналитический вариант определяющих соотношений, которые наилучшим образом описывают максимальное число диаграмм деформирования в стандартном верификационном наборе экспериментов.

Рассмотрим нелинейно-упругий слоистый композиционный материал (НСКМ), который в отсчетной конфигурации $\overset{0}{K}$, характеризуемой декартовым базисом $\mathbf{e}_\alpha$, представляет собой систему периодически повторяющихся слоев, ортогональных оси $O\mathbf{e}_3$. Введем в качестве лагранжевых координат X^i декартовы координаты $\overset{0}{x}{}^k$ в базисе $\mathbf{e}_\alpha$, т. е. $X^i = \overset{0}{x}{}^i$, и зададим закон движения композита в виде $x^k = x^k(X^i)$, где x^k — декартовы координаты материальных точек в актуальной конфигурации K. Введем $\mathbf{r}_\alpha = Q^k{}_\alpha \mathbf{e}_k$ (локальные векторы базиса в K), где $Q^k_\alpha = \partial x^k / \partial X^\alpha$ — якобиевая матрица, а также $\mathbf{F} = \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{e}^k$ (градиент деформации), где $\otimes$ — знак тензорного произведения. Для градиента деформации имеет место полярное разложение [22] $\mathbf{F} = \mathbf{UO}$, где $\mathbf{U}$ — левый тензор искажений, а $\mathbf{O}$ — тензор поворота. Введем энергетические меры деформации [22]:

$$\overset{(n)}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n - \mathrm{III}} \mathbf{U}^{n-\mathrm{III}}, \quad n = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}. \tag{1}$$

Этим мерам соответствуют энергетические тензоры напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}} = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}{}^{-1} \cdot\cdot \mathbf{T}$, где ${}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}$ — тензоры энергетической эквивалентности [22], зависящие только от $\mathbf{F}$, а $\mathbf{T}$ — тензор истинных напряжений Коши.

Поскольку в отсчетной конфигурации свойства НСКМ не изменяются при поворотах в плоскости, ортогональной к $O\mathbf{e}_3$, то НСКМ можно считать трансверсально-изотропной средой. Более точное определение анизотропных сред с конечными деформациями дано в работе [22].

Все фазы НСКМ (слои) будем считать несжимаемыми, тогда сам композит также является несжимаемой средой [16]. Применим для

построения аналитических определяющих соотношений НСКМ универсальные модели несжимаемых трансверсально-изотропных сред, общая теория которых сформулирована в работе [22]. Наиболее общая форма записи этих универсальных моделей в тензорной форме для так называмых моделей класса B_n имеет следущий вид [22]:

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \overset{\circ}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \overset{(n)}{\mathbf{G}}};\ \ n = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \tag{2}$$

здесь $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ — энергетический тензор напряжений; n — номер модели в классе B_n; p — гидростатическое давление; $\overset{\circ}{\rho}$ — осредненная плотность композита (константа); $\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1}$ — тензор, обратный к тензору 2-го ранга; $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$ — энергетическая мера деформации (тензор 2-го ранга); ψ — свободная энергия Гельмгольца, являющаяся функцией инвариантов тензора $\overset{(n)}{\mathbf{G}}$ относительно группы симметрий трансверсально-изотропной среды,

$$\psi = \psi(I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}}), ..., I_4(\overset{(n)}{\mathbf{G}})). \tag{3}$$

Для трансверсально-изотропной среды симметричные тензоры 2-го ранга имеют пять инвариантов, однако в силу условия несжимаемости

$$\det \mathbf{F} = 1. \tag{4}$$

Один из инвариантов $I_k(\overset{(n)}{\mathbf{G}})$ может быть выражен через четыре других варианта, поэтому для несжимаемой трансверсально-изотропной среды имеет место представление (3). В качестве инвариантов $I_k(\overset{(n)}{\mathbf{G}})$ выберем следующие [22]:

$$I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) = (\mathbf{E} - \mathbf{e}_3^2)\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{G}},\ \ I_2(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) = \mathbf{e}_3^2\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{G}},$$

$$I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) = \left((\mathbf{E} - \mathbf{e}_3^2)\overset{(n)}{\mathbf{G}}\right)\cdot\cdot\left(\mathbf{e}_3^2\overset{(n)}{\mathbf{G}}\right),\ \ I_4(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) = \overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^2\cdot\cdot\mathbf{E} - I_2^2 - 2I_3^2. \tag{5}$$

Подставляя эти выражения в (2), получаем

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\mathrm{III}}\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \sum_{\gamma=1}^{4}\varphi_\gamma \mathbf{I}_{\gamma\mathbf{G}}, \tag{6}$$

где $\varphi_\gamma = \partial\psi / \partial I_\gamma(\overset{(n)}{\mathbf{G}})$; $\mathbf{I}_{\gamma\mathbf{G}} = \partial I_\gamma(\overset{(n)}{\mathbf{G}}) / \partial \overset{(n)}{\mathbf{G}}$ — тензоры производной [19], которые имеют вид

$$\mathbf{I}_{1G} = \mathbf{E} - \mathbf{e}_3^2;\ \mathbf{I}_{2G} = \mathbf{e}_3^2;\ \mathbf{I}_{3G} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2\right) \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{G}}; \tag{7}$$

$$\mathbf{I}_{4\mathbf{G}} = \left(2\boldsymbol{\Delta} - \left(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2\right) - 2\mathbf{e}_3^2 \otimes \mathbf{e}_3^2\right) \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{G}},$$

где $\mathbf{O}_1 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2$; $\mathbf{O}_2 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1$; $\boldsymbol{\Delta}$ — единичный тензор 4-го ранга.

После нахождения энергетического тензора напряжений определяют тензоры напряжений Коши $\mathbf{T}$ и Пиолы — Кирхгофа $\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}$.

Определяющее соотношение (3) для свободной энергии Гельмгольца зададим в аналитической форме в виде

$$\overset{\circ}{\rho}\psi = \overset{\circ}{\rho}\psi_0 + \frac{1}{2}\left(l_{11}\left(I_1 - s_1\right)^{2n_1} + 2l_{12}\left(I_1 - s_1\right)^{n_1}\left(I_2 - s_2\right)^{n_2} + l_{22}\left(I_2 - s_2\right)^{2n_2}\right) +$$

$$+ l_{33}\left(I_3 - s_3\right)^{n_3} + l_{44}\left(I_4 - s_4\right)^{2n_4}, \tag{8}$$

где ψ_0 — начальное значение (константа) потенциала ψ; $l_{11}\ l_{12}\ l_{22}\ l_{33}\ l_{44}$ и $n_1\ n_2\ n_3\ n_4$ — упругие константы; s_γ — начальные значения инвариантов

$$s_\gamma = I_\gamma\left(\frac{1}{n - \mathrm{III}}\mathbf{E}\right),\ \ \gamma = 1, ..., 4. \tag{9}$$

Производные $\varphi_\gamma = \partial\psi / \partial I_\gamma(\overset{(n)}{\mathbf{G}})$ для потенциала (8) имеют вид

$$\varphi_1 = n_1 l_{11}\left(I_1 - s_1\right)^{2n_1 - 1} + n_1 l_{12}\left(I_1 - s_1\right)^{n_1 - 1}\left(I_2 - s_2\right)^{n_2},$$

$$\varphi_2 = n_2 l_{22}\left(I_2 - s_2\right)^{2n_2 - 1} + n_2 l_{12}\left(I_1 - s_1\right)^{n_1}\left(I_2 - s_2\right)^{n_2 - 1}, \tag{10}$$

$$\varphi_3 = n_3 l_{33}\left(I_3 - s_3\right)^{n_3 - 1},\ \ \varphi_4 = n_4 l_{44}\left(I_4 - s_4\right)^{n_4 - 1}.$$

Методика нахождения параметров модели трансверсально-изотропной среды. С помощью метода асимптотического осреднения для НСКМ удается построить определяющие соотношения (2), исходя из таковых для отдельных слоев. Однако эти соотношения не имеют явного аналитического выражения, их рассчитывают в виде численного алгоритма решения локальной задачи на ЯП. Такой способ является очень точным с математической точки зрения, но при-

водит к большим затратам на вычисление напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ по градиенту деформации $\mathbf{F}$.

Рассмотрим иной метод построения диаграмм деформирования, когда соотношения (2) заданы в виде явных аналитических соотношений (5), (8), а входящие в эти соотношения константы НСКМ $l_{11}\, l_{12}\, l_{22}\, l_{33}\, l_{44}$ и $n_1\, n_2\, n_3\, n_4$ находим из условия наилучшей аппроксимации кривых деформирования $\mathbf{T} = \boldsymbol{\mathcal{T}}(\mathbf{F})$, полученных с помощью прямого численного решения задачи на ЯП для некоторых стандартных задач макроскопического деформирования, в которых реализуется однородное напряженно-деформированное состояние с $\mathbf{T}$ и $\mathbf{F}$, не зависящими от координат. Численный метод решения локальной задачи на ЯП для несжимаемого НСКМ, предложенный в работе [16], был использован в данной работе.

В качестве стандартных задач макроскопического деформирования рассмотрим класс задач трехосновного растяжения-сжатия пластины в форме параллелепипеда, грани которого параллельны осям координат $O\mathbf{e}_\alpha$. Закон движения пластины при таких движениях имеет вид

$$x^\alpha = k_\alpha X^\alpha, \quad \overset{\circ}{x}{}^\alpha = X^\alpha, \tag{11}$$

где $k_\alpha(t)$ — неизвестные функции времени.

Градиент деформации для движения (10) имеет вид $\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha \mathbf{e}_\alpha^2 = \mathbf{U}$, а условие несжимаемости (4) — $k_1 k_2 k_3 = 1$.

Энергетические меры деформаций и обратные к ним тензоры можно выразить явно

$$\overset{(n)}{\mathbf{G}} = \frac{1}{n-\text{III}}\mathbf{U}^{n-\text{III}} = \frac{1}{n-\text{III}}\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha{}^{n-\text{III}}\mathbf{e}_\alpha{}^2; \tag{12}$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1} = (n-\text{III})\,\mathbf{U}^{-(n-\text{III})} = (n-\text{III})\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{k_\alpha{}^{n-\text{III}}}\mathbf{e}_\alpha{}^2. \tag{13}$$

Заметим, что ненулевыми будут только диагональные компоненты меры деформаций. Подставляя (13) в (7), находим выражения для инвариантов

$$I_1 = \overset{(n)}{G}{}_{11} + \overset{(n)}{G}{}_{22} = \frac{1}{n-\text{III}}\left(k_1{}^{n-\text{III}} + k_2{}^{n-\text{III}}\right);\ I_2 = \overset{(n)}{G}{}_{33} = \frac{1}{n-\text{III}}k_3{}^{n-\text{III}};\ I_3 = 0;$$

$$I_4 = \overset{(n)}{G}_{11}{}^2 + \overset{(n)}{G}_{22}{}^2 = \frac{1}{n-\text{III}}\left(k_1{}^{2(n-\text{III})} + k_2{}^{2(n-\text{III})}\right).$$

Подставляя (4) и (5) в (6) и (7), находим, что энергетические тензоры напряжений также будут иметь диагональный вид

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{(n)}{T}_{\alpha\alpha}\mathbf{e}_\alpha{}^2; \tag{14}$$

$$\overset{(n)}{T}_{\alpha\alpha} = -pk_\alpha^{-(n-\text{III})} + \varphi_1\left(\delta_{1\alpha} + \delta_{2\alpha}\right) + \varphi_2\delta_{3\alpha} + \frac{\varphi_4}{n-\text{III}}\left(k_1^{n-\text{III}}\delta_{1\alpha} + k_2^{n-\text{III}}\delta_{2\alpha}\right). \tag{15}$$

Тензор напряжений Коши будет диагонален:

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^{3} T_{\alpha\alpha}\mathbf{e}_\alpha{}^2; \tag{16}$$

$$T_{\alpha\alpha} = k_\alpha{}^{n-\text{III}}\overset{(n)}{T}_{\alpha\alpha}; \tag{17}$$

$$T_{\alpha\alpha} = -p + k_\alpha{}^{n-\text{III}}\left(\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4 k_1^{n-\text{III}}}{n-\text{III}}\right)\delta_{1\alpha} + \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4 k_2^{n-\text{III}}}{n-\text{III}}\right)\delta_{2\alpha} + \varphi_2\delta_{3\alpha}\right). \tag{18}$$

Одноосное растяжение композита перпендикулярно оси трансверсальной изотропии. Рассмотрим случай растяжения пластины перпендикулярно оси $O\mathbf{e}_3$. Для определенности положим, что растяжение осуществляется вдоль оси $O\mathbf{e}_1$. При таком нагружении $T_{11} \neq 0$, $T_{22} = 0,\ T_{33} = 0.$ Тогда уравнения (18) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} T_{11} = -p + k_1{}^{(n-\text{III})}\left(\varphi_1 + \dfrac{\varphi_4}{n-\text{III}}k_1{}^{n-\text{III}}\right); \\ 0 = -p + k_2{}^{(n-\text{III})}\left(\varphi_1 + \dfrac{\varphi_4}{n-\text{III}}k_2{}^{n-\text{III}}\right); \\ 0 = -p + k_3{}^{(n-\text{III})}\varphi_2; \\ k_1k_2k_3 = 1. \end{cases} \tag{19}$$

Исключая из этой системы p и выражая k_3 из условий несжимаемости, получим

$$p = k_3{}^{n-\text{III}}\varphi_2;$$

$$\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)^{n-\text{III}}\varphi_2 = k_2{}^{n-\text{III}}\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4 k_2{}^{n-\text{III}}}{n-\text{III}}\right). \tag{20}$$

Последнее соотношение позволяет выразить $k_2 = k_2(k_1)$ и $k_3 = k_3(k_1)$, что дает возможность построить зависимость напряжения $T_{11}(k_1)$ от k_1:

$$T_{11}(k_1) = -k_3(k_1)^{n-\text{III}}\varphi_2 + k_1^{(n-\text{III})}\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-\text{III}}k_1^{n-\text{III}}\right). \qquad (21)$$

В этой зависимости присутствуют семь неизвестных констант: l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{44}, n_1, n_2, n_4. Их поиск осуществляем путем сравнения аппроксимационной диаграммы деформирования (21) и экспериментальной диаграммы $T^{(э)}_{11}(k_1)$, полученной в результате решения локальных задач МАО, возникающих при одноосном растяжении СКМ, соответствующем рассматриваемому. Методика решения этой задачи изложена в [16]. Однако поскольку число упругих констант слишком велико, для наилучшего описания диаграмм деформирования при разных видах нагружения используем одновременно несколько экспериментов для нахождения этих констант.

Одноосное растяжение композита вдоль оси трансверсальной изотропии. Рассмотрим случай растяжения вдоль оси $O\mathbf{e}_3$. При таком нагружении $T_{11} = 0,\ T_{22} = 0,\ T_{33} \neq 0$. Тогда уравнения (18) приводят к

$$\begin{cases} 0 = -p + k_1^{(n-\text{III})}\left(\varphi_1 + \dfrac{\varphi_4}{n-\text{III}}k_1^{n-\text{III}}\right); \\ 0 = -p + k_2^{(n-\text{III})}\left(\varphi_1 + \dfrac{\varphi_4}{n-\text{III}}k_2^{n-\text{III}}\right); \\ T_{33} = -p + k_3^{(n-\text{III})}\varphi_2; \\ k_1k_2k_3 = 1. \end{cases} \qquad (22)$$

Исключая из этой системы p и выражая k_2 из условий несжимаемости, получим

$$p = k_1^{(n-\text{III})}\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-\text{III}}k_1^{n-\text{III}}\right); \qquad (23)$$

$$k_1^{(n-\text{III})}\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-\text{III}}k_1^{n-\text{III}}\right) = (1/k_1k_3)^{n-\text{III}}\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4(1/k_1k_3)^{n-\text{III}}}{n-\text{III}}\right). \qquad (24)$$

Последнее соотношение позволяет выразить $k_1 = k_1(k_3)$ и $k_2 = k_2(k_3)$, тогда получаем зависимость $T_{33}(k_3)$, т. е. диаграмму поперечного деформирования НСКМ

$$T_{33}(k_3) = -k_1^{n-\text{III}}\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_4}{n-\text{III}}k_1^{n-\text{III}}\right) + k_3^{n-\text{III}}\varphi_2. \qquad (25)$$

В этой зависимости также присутствуют семь неизвестных констант: $l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{44}, n_1, n_2, n_4$. Их поиск осуществляем путем сравнения с экспериментальной диаграммой деформирования $T^{(э)}_{33}(k_1)$, полученной в результате решения локальных задач МАО, возникающих при поперечном одноосном растяжении НСКМ.

Двухосное растяжение вдоль направлений, перпендикулярных оси трансверсальной изотропии. Задача формулируется аналогично одноосному растяжению. Отличие заключается в том, что условие свободного края будет выполняться только на одной грани НСКМ $T_{11} \neq 0,\ T_{22} \neq 0,\ T_{33} = 0$. Тогда уравнения (18) приводят к

$$\begin{cases} T_{11} = -p + k_1^{(n-\text{III})}\left(\varphi_1 + \dfrac{\varphi_4}{n-\text{III}}k_1^{n-\text{III}}\right); \\ T_{22} = -p + k_2^{(n-\text{III})}\left(\varphi_1 + \dfrac{\varphi_4}{n-\text{III}}k_2^{n-\text{III}}\right); \\ 0 = -p + k_3^{(n-\text{III})}\varphi_2; \\ k_1k_2k_3 = 1. \end{cases} \qquad (26)$$

Исключив p из этой системы, получим

$$\begin{cases} T_{11} = -k_3^{(n-\text{III})}\varphi_2 + k_1^{(n-\text{III})}\left(\varphi_1 + \dfrac{\varphi_4}{n-\text{III}}k_1^{n-\text{III}}\right); \\ T_{22} = -k_3^{(n-\text{III})}\varphi_2 + k_2^{(n-\text{III})}\left(\varphi_1 + \dfrac{\varphi_4}{n-\text{III}}k_2^{n-\text{III}}\right). \end{cases} \qquad (27)$$

Поскольку k_3 зависит от k_1 и k_2 (из условий несжимаемости), то $T_{11},\ T_{22}$ тоже будут функциями k_1 и k_2. В результате численного решения системы уравнений (27) находим $T_{11} = T_{11}(k_1, k_2),\ T_{22} = T_{22}(k_1, k_2)$.

Аналогично решается задача о двухосном растяжении по направлениям $O\mathbf{e}_1$ и $O\mathbf{e}_3$, в результате которой находим две функции

$$T_{11} = T_{11}(k_1, k_2),\ T_{33} = T_{33}(k_1, k_2). \qquad (28)$$

Формулировка задачи поиска параметров модели. Объединим теперь полученные решения четырех задач: (21), (25), (27) и (28). Из решения соотвествующих локальных задач МАО имеем четыре серии кривых, соответствующих одноосному и двухосному растяжению:

$$T_{11} = T^{(э)}{}_{11}(k_1);$$

$$T_{33} = T^{(э)}{}_{33}(k_3);$$

$$\begin{cases} T_{11} = T^{(э)}{}_{11}(k_1, k_2); \\ T_{22} = T^{(э)}{}_{22}(k_1, k_2); \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} T_{11} = T^{(э)}{}_{11}(k_1, k_3); \\ T_{33} = T^{(э)}{}_{33}(k_1, k_3). \end{cases}$$

Для каждого конкретного набора l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{44}, n_1, n_2, n_4 могут быть построены кривые для трансверсально-изотропного материала, которые назовем теоретическими.

Задачу нахождения параметров l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{44}, n_1, n_2, n_4 сформулируем как задачу минимизации некоторой метрики, характеризующей ошибку — отклонение теоретической диаграммы для конкретного набора упругих констант от соответствующей экспериментальной диаграммы деформирования:

$$\underset{l_{11},l_{12},l_{22},l_{44},n_1,n_2,n_4}{R\left(\mathbf{T}, \mathbf{T}^{(Э)}\right)} \to \min. \tag{30}$$

Используем две метрики вычисления ошибки:

$$R_1\left(\mathbf{T}, \mathbf{T}^{(Э)}\right) = \sum_{\omega=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta} \left(T_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta}^{(Э)}\right)_{\omega}^{2}; \tag{31}$$

$$R_2\left(\mathbf{T}, \mathbf{T}^{(Э)}\right) = \sum_{\omega=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta} \left(1 - \frac{T_{\alpha\beta}}{T_{\alpha\beta}^{(Э)}}\right)_{\omega}^{2}, \tag{32}$$

здесь ω — номера точек на диаграмме деформирования.

С помощью метрики (31) можно получить классический МНК и минимизировать среднеквадратичное отклонение теоретических значений компонент тензора напряжений Коши от экспериментальных в конечном числе контрольных точек. Достоинства этой метрики — простота вычислений и наличие большого количества методов решения МНК. Недостаток — относительная погрешность для малых

напряжений получается больше, чем для больших значений напряжений.

Использование метрики (32) позволяет минимизировать относительную погрешность, однако слагаемые с $T_{\alpha\beta}^{(Э)} = 0$ необходимо исключать. На практике следует исключать слагаемые $\left|T_{\alpha\beta}^{(Э)}\right| < \varepsilon$ при некотором заданном малом числе $\varepsilon > 0$. Это обстоятельство не позволяет контролировать соответствующие величины $T_{\alpha\beta}$.

Для решения задач минимизации (30) применен метод Нелдера—Мида.

Результаты численного моделирования диаграммы деформирования НСКМ при одноосном растяжении. Для численного расчета диаграмм деформирования НСКМ по методу МАО для каждого изотропного слоя композита применяли модели класса B_n, в которых определяющие соотношения имели вид

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = -\frac{p}{n-\text{III}}\overset{(n)}{\mathbf{G}}{}^{-1} + \mu(n-\text{III})^2\left(\left(\frac{1+\beta}{n-\text{III}} + (1-\beta)I_1(\overset{(n)}{\mathbf{G}})\right)\mathbf{E} - (1-\beta)\overset{(n)}{\mathbf{G}}\right),$$

$$n = \text{I, II, IV, V},$$

где μ и β — упругие константы модели, различные для каждого слоя композита.

Для модели материала B_V были проведены численные расчеты согласно разработанному методу. Построены графики диаграмм деформирования $P^{11}(F^{11})$ с тремя различными наборами констант:

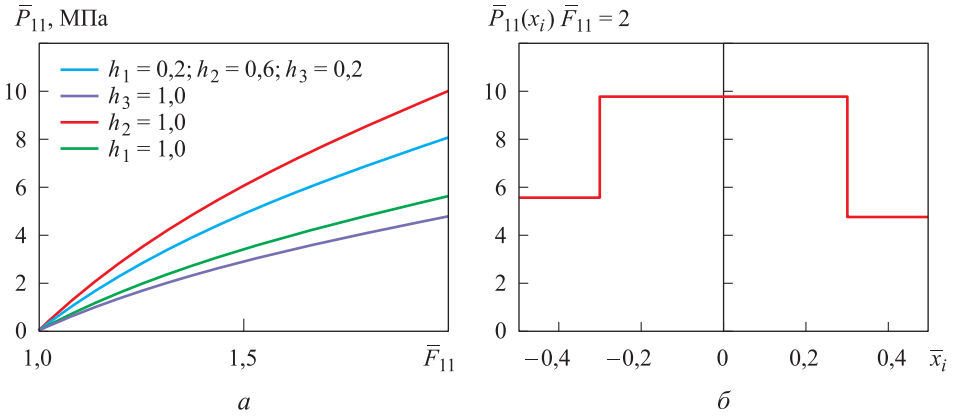
слой 1 — $\mu = 0{,}8$ МПа, $\beta = 1$;

слой 2 — $\mu = 1{,}4$ МПа, $\beta = 1$;

слой 3 — $\mu = 0{,}7$ МПа, $\beta = 0{,}9$.

Относительные толщины слоев $h_1 = 0{,}2$, $h_2 = 0{,}6$, $h_3 = 1 - h_1 - h_2 = 0{,}2$.

На рис. 1 показаны графики функций $P_{11}(F_{11})$ для компоненты осредненного тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа $\overline{P}^{11}$ в зависимости от компоненты $\overline{F}^{11}$ осредненного градиента деформаций, которая изменялась в диапазоне от 1 до 2. Для остальных компонент осредненного градиента принимались значения: $\overline{F}_{22} = \overline{F}_{33} = (\sqrt{\overline{F}_{11}})^{-1}$, $\overline{F}_{ij} = 0$, $i \neq j$. Последние равенства соответствуют выполнению условий несжимаемости $\det F = 1$. Такие значения характеризуют одноосное деформирование слоистого композита в направлении, параллельном плоскости слоев.



а *б*

Рис. 1. Диаграммы деформирования $\bar{P}_{11}(\bar{F}_{11})$ для слоистого композита, состоящего из трех слоев с разными толщинами слоев (*а*) и диаграмма распределения $\bar{P}_{11}(\bar{F}_{11})$ в ЯП композита (*б*)

Расчеты проводили для четырех значений соотношения слоев:

1) $h_1 = 0,2, \quad h_2 = 0,6, \quad h_3 = 1 - h_1 - h_2 = 0,2;$
2) $h_1 = 1, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = 0;$
3) $h_1 = 0, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 0;$
4) $h_1 = 0, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = 1.$

Случаи 2–4 соответствуют гомогенным материалам с характеристиками 1, 2 и 3-го слоев.

Для значения $\bar{F}_{11} = 2$ была рассчитана зависимость компоненты $P_{11}(\xi)$ от локальной координаты ЯП композита $-0,5 \le \xi \le 0,5$.

Численное моделирование диаграмм деформирования для других моделей B_n. Кроме модели B_V для расчетов диаграмм деформирования при одноосном растяжении были также использованы модели B_I и B_{II} (рис. 2), B_{IV} (рис. 3). Значения констант μ, β и толщины слоев были выбраны те же, что и при расчете по модели B_V. Из рис. 3 видно, что значения констант по-разному влияют на характеристики материала в различных моделях.

Численный расчет диаграмм деформирования для двухслойного композита, состоящего из реальных материалов. Для дальнейших расчетов были взяты реальные значения констант μ, β для резины (табл. 1) и полиуретана (табл. 2).

Толщина слоев двухслойного композита из резины и полиуретана составляет соответственно $h_p = 2/3, \ h_n = 1/3$. В результате расчетов были получены данные, на основании которых были построены диаграммы деформирования композитов. Они совпали для пары моделей B_I, B_V (рис. 4, *а*) и для пары B_{II}, B_{IV} (рис. 4, *б*).

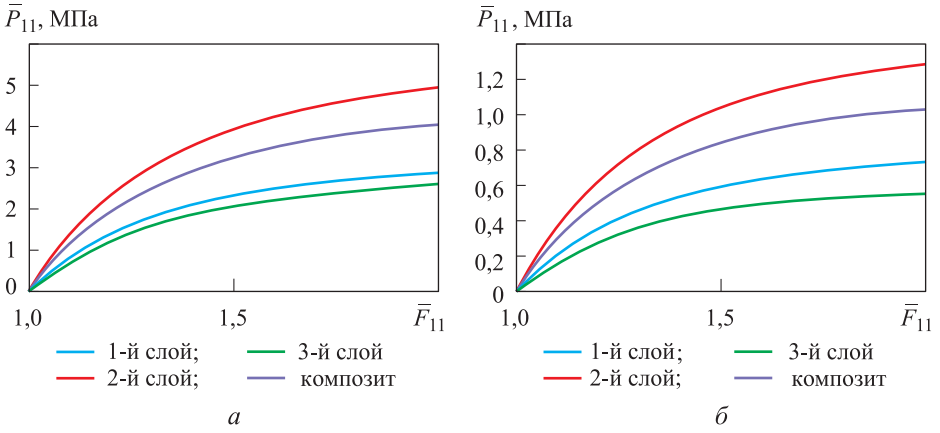


Рис. 2. Диаграммы деформирования композита согласно моделям B_{I} (*а*) и B_{II} (*б*)

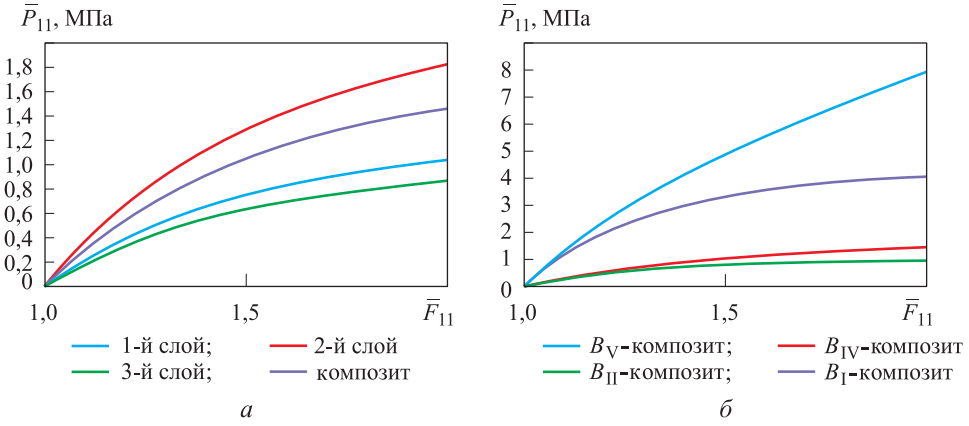


Рис. 3. Диаграммы деформирования композита в модели B_{IV} (*а*) и сравнение диаграмм деформирования $\bar{P}_{11}\left(\bar{F}_1^1\right)$ в разных моделях (*б*)

Таблица 1

Упругие характеристики резины в моделях B_n

n	μ, МПа	β
I	5,145	0,13
II	19,11	1
IV	19,11	–1
V	5,145	–0,13
V*	4,41	1

Таблица 2

Упругие характеристики полиуретана в моделях B_n

n	μ, МПа	β
I	3,15	0,616
II	11,56	–0,45
IV	11,45	0,45
V	3,15	–0,616

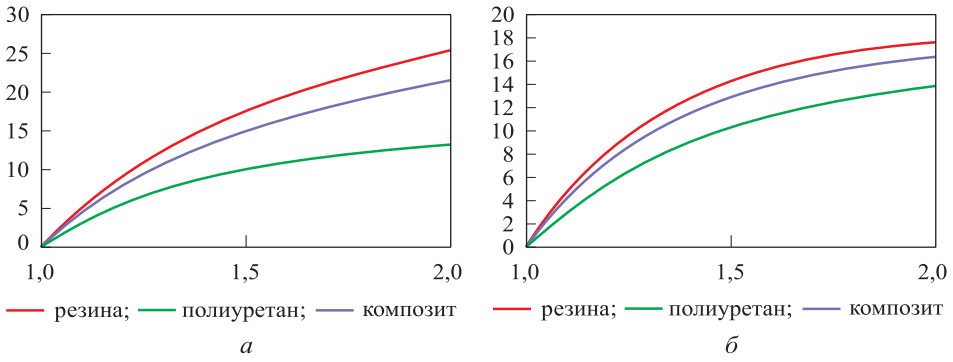


Рис. 4. Диаграммы деформирования композита из резины и полиуретана в моделях $B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{V}}$ (*а*) и $B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{IV}}$ (*б*)

Был выполнен расчет для модели B_{V} при другом соотношении слоев ($h_p = 1/3, \quad h_n = 2/3$) и показано сравнение полученных эффективных диаграмм деформирования в разных моделях (рис. 5).

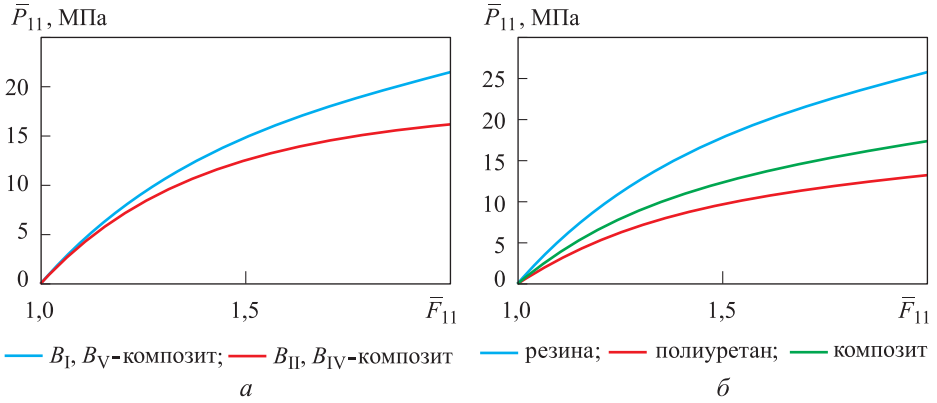


Рис. 5. Диаграмма деформирования в модели B_{V} для композита из резины и полиуретана при отношении толщин слоев 1:2 (*а*) и сравнение эффективных диаграмм деформирования композита в разных моделях (*б*)

Численный расчет диаграмм для трехслойного композита. Результаты расчета для НСКМ с тремя слоями полиуретан–резина–полиуретан в соотношении 1:4:1 в моделях B_{I}, B_{II}, B_{IV} и B_{V} приведены на рис. 6.

Программа двухосного растяжения НСКМ показана на рис. 7.

$$F(k) = \begin{pmatrix} k^{1/8} & 0 & 0 \\ 0 & k^{3/8} & 0 \\ 0 & 0 & k^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad 1 \le k \le 2.$$

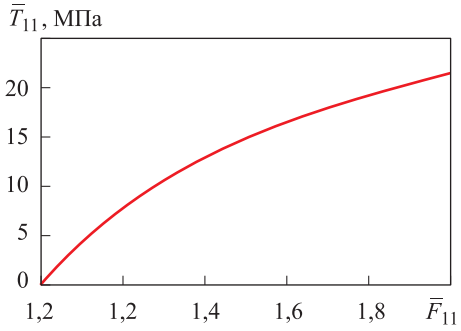


Рис. 6. Диаграмма деформирования композита в соотношении 1:4:1 в модели B_{I} при одноосном растяжении

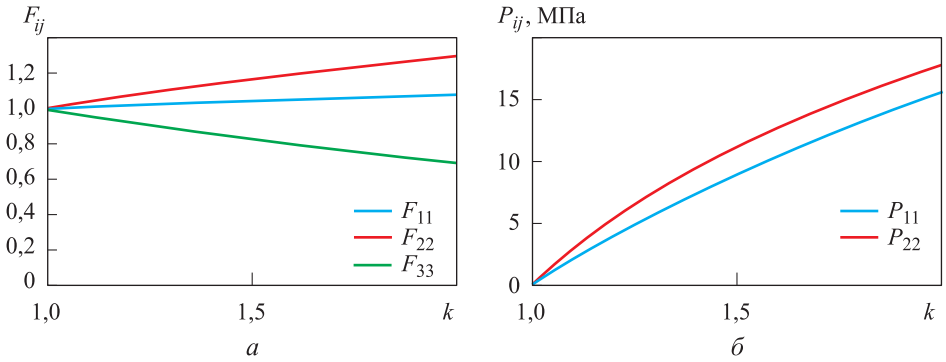


Рис. 7. Программа двухосного деформирования НСКМ (*а*) и диаграмма в моделях B_{I} и B_{V} (*б*)

Результат расчета для НСКМ с тремя слоями полиуретан–резина–полиуретан в соотношении 1:4:1 в моделях B_{II} и B_{IV} при двухосном нагружении представлен на рис. 8.

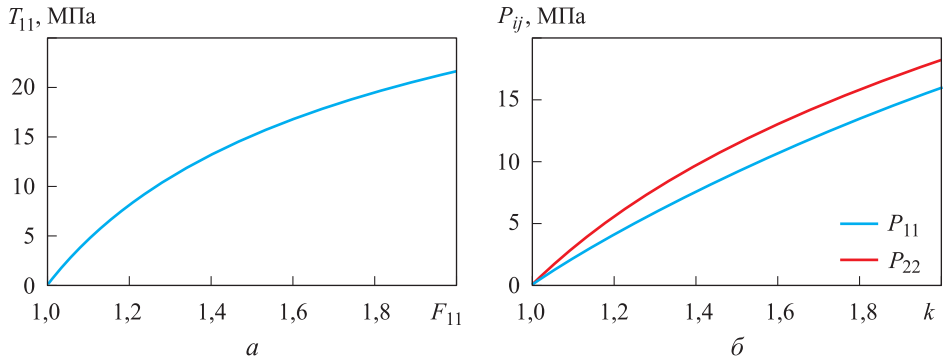
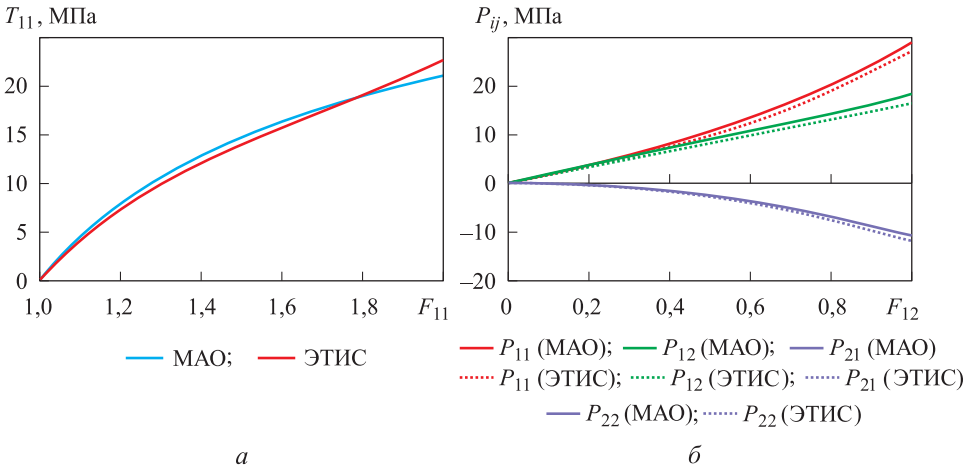


Рис. 8. Диаграммы одноосного деформирования НСКМ (*а*) и двухосного деформирования НСКМ (*б*) в моделях B_{II} и B_{IV}

Численный расчет эффективных упругих констант модели НСКМ как трансверсально-изотропной среды. На основании полученных диаграмм был выполнен поиск эффективных параметров модели НСКМ из трех слоев как трансверсально-изотропной среды. По найденным параметрам модели были построены диаграммы деформирования. Сравнительные диаграммы деформирования НСКМ при одноосном растяжении и при простом сдвиге, полученные прямым расчетом с помощью метода МАО и с помощью аппроксимации на основе модели эффективной трансверсально-изотропной среды (ЭТИС), приведены на рис. 9.



а *б*

Рис. 9. Сравнительные диаграммы одноосного (*а*) и сдвигового (*б*) деформирований, полученных с помощью МАО и модели ЭТИС

Максимальные относительные погрешности в полученных диаграммах составляют соответственно 11 и 13 %, что говорит о вполне удовлетворительном качестве модели эффективной трансверсально-изотропной среды (2), (8).

Выводы. Предложена модель эффективной трансверсально-изотропной нелинейно-упругой несжимаемой среды с конечными деформациями, которая относится к классу универсальных моделей, формулируемых в терминах одновременно четырех классов энергетических пар тензоров напряжений — деформаций. Модель применена для диаграмм деформирования слоистых несжимаемых упругих композитов с конечными деформациями и периодической структурой и с использованием универсального представления определяющих соотношений для слоев композита.

Предложен метод нахождения упругих эффективных констант модели композита путем решения задачи минимизации отклонения диаграмм деформирования композита, полученных для набора стандартных задач с помощью прямого численного решения задач на ЯП и с помощью аппроксимационной диаграммы по модели ЭТИС.

Выполнено численное моделирование диаграмм деформирования несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями с помощью методов МАО и ЭТИС. Показано, что метод ЭТИС позволяет получать диаграммы дефомирования с приемлемой инженерной точностью. Использование метода ЭТИС дает возможность развязать решение задач микро- и макроскопического деформирования нелинейно-упругих композитов с конечными деформациями и существенно уменьшить вычислительные затраты при решении задач расчета напряженно-деформированного состояния конструкций из нелинейно-упругих композитов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984, 352 с.

[2] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicalaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. Amsterdam, New York, North-Holland Pub, 1978, 396 p.

[3] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 324 с.

[4] Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984, 472 с.

[5] Christensen R.M. *Mechanics of composite materials. John Wiley&Sons*. New York, 1979, 324 p.

[6] Dimitrienko Yu.I. A Structural thermomechanics model of textile composite materials at high temperatures. *Composites Science and Technology*, 1999, т. 59. № 7, с. 1041–1053.

[7] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 28–48.

[8] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций. *Наука и образование. Электронное научно-техническое издание*, 2014, № 10.
DOI: 10.7463/1014.0730105

[9] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным заполнителем. *Композиты и наноструктуры,* 2014, т. 6, № 1, с. 32–48.

[10] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.

[11] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.

[12] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечного элемента. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 2, с. 95–108.

[13] Димитриенко Ю.И., Дроголюб А.Н., Губарева Е.А. Оптимизация многокомпонентных дисперсно-армированных композитов на основе сплайн-аппроксимации. *Наука и образование.* 2015, № 2.
DOI: 10.7463/0215.0757079

[14] Димитриенко Ю.И. Моделирование нелинейно-упругих характеристик композитов с конечными деформациями методом асимптотического осреднения. *Известия высших учебных заведений. Сер. Машиностроение*, 2015, № 11, с. 68–77.

[15] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Кольжанова Д.Ю. Моделирование слоистых композитов с конечными деформациями методом асимптотической гомогенизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 5 (29). DOI: 10.18698/2308-6033-2015-5-1405

[16] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Кольжанова Д.Ю., Каримов С.Б. Моделирование несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями на основе метода асимптотического осреднения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, вып. 1 (13), с. 32–54.
DOI: 10.18698/2309-3684-2017-1-3254

[17] Qingsheng Yang, Fang Xu. Numerical modeling of nonlinear deformation of polymer composites based on hyperelastic constitutive law. *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, 2009, vol. 4, pp. 284–288.

[18] Aboudi J. Finite strain micromechanical modeling of multiphase composites. Int. J. *Multiscale Comput*, 2008, vol. 6 (2008), pp. 411–434.

[19] Bin Zhang, Xiaoming Yu, Boqin Gu. Micromechanical modeling of large deformation in sepiolite reinforced rubber sealing composites under transverse tension. *Polym Compos*, 2015. DOI: 10.1002/pc.23596

[20] Qi Ge, Xiaofan Luo, Christian B. Iversen, Hossein Birjandi Nejad, Patrick T. Mather, Martin L. Dunn, H. Jerry Qi. A finite deformation thermomechanical constitutive model for triple shape polymeric composites based on dual thermal transitions. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, pp. 2777–2790.

[21] Димитриенко Ю.И., Даштиев И.З. Модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2001, № 1, с. 21–41.

[22] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 2: Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.

Статья поступила в редакцию 19.04.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Каримов С.Б., Кольжанова Д.Ю. Моделирование эффективных характеристик трансверсально-изотропных несжимаемых композитов с конечными деформациями. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 4, с. 72–92.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и раз-

работка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Автор более 400 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики.
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Каримов Суннат Бахтиярович — ассистент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, автор нескольких работ по механике композитов. e-mail: sunnat49@yandex.ru

Кольжанова Дарья Юрьевна — ассистент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, автор нескольких работ по механике композитов. e-mail: darya.kolzhanova@yandex.ru

Modeling the effective characteristics of transversely isotropic incompressible composites with finite strains

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, S.B. Karimov, D.Yu. Kolzhanova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

The paper considers a model of effective constitutive relations for a transversal-isotropic incompressible composite with finite strains. The model belongs to the so-called class of universal models that connect several pairs of energy stress and strain tensors simultaneously. A method is proposed for separating coupled problems of micro- and macroscopic deforming composites with finite strains that arise when the method of asymptotic homogenization (AH) of periodic structures is used. The method is based on the application of the effective constitutive relation model as an approximation dependence of the results of numerical simulation of the composite deformation curves obtained using the exact AH method. To find the elastic constants of the transversely isotropic composite model the method of minimizing the deviation of the approximation of deformation diagrams from the AH diagrams is used for a series of problems of standard deforming at finite strains. To solve minimization problems, the Nelder—Mead method is used. The results of numerical simulation by the proposed method for nonlinear elastic layered composites are presented, which showed good approximation accuracy, achieved due to application of the proposed method for the separation of coupled problems of micro- and macroscopic deforming.

Keywords: *layered composites, incompressible media, transversely isotropic medium, finite strains, asymptotic homogenization method, universal models of elastic media, energy tensor pairs*

REFERENCES

[1] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging processes in periodic media]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.

[2] Bensoussan A., Lions JL., Papanicalaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures.* Amsterdam, New York, North-Holland Co. Publ., 1978, 396 p.

[3] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1984, 324 p.

[4] Sanchez-Palencia E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. New York, Springer Publ., 1980.

[5] Christensen, R.M. *Mechanics of composite materials.* New York, John Wiley & Sons Publ., 1979. 324 p.

[6] Dimitrienko Yu.I. *Composites Science and Technology*, 1999, vol. 59, no. 7, pp. 1041–1053.

[7] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 28–48.

[8] Dimitrienko Yu.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sbornikov S.V., Prozorovsky A.A. *Nauka i obrazovanie: electronnyy nauchno-tekhnicheskiy zhurnal — Science and Education: Electronic Scientific and technical Journal*, 2014, no. 10. DOI: 10.7463 / 1014.0730105

[9] Dimitrienko Iu.I., Yakovlev N.O., Erasov V.S., Fedonuk N.N., Sborshchikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigoryev M.M., Prozorovsky A.A. *Kompozity i nanostruktury – Composites and Nanostructures*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 32–48.

[10] Dimitrienko Iu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.

[11] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy – Mechanics of Composite Materials and Structures*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 260–282.

[12] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–108.

[13] Dimitrienko Yu.I., Drogolub A.N., Gubareva E.A. *Nauka i obrazovanie: electronnyy nauchno-tekhnicheskiy zhurnal – Science and Education: Electronic Scientific and technical Journal*, 2015, no. 2.
DOI: 10.7463/0215.0757079 http://technomag.bmstu.ru/doc/757079.html

[14] Dimitrienko Yu.I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2015, no. 11, pp. 68–77. DOI: 10.18698/0536-1044-2015-11-68-77

[15] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Kolzhanova D.Yu. *Inzhenernyy zhurnal: Nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, no. 5 (29). DOI: 10.18698/2308-6033-2015-5-1405

[16] Dimitrienko Yu.I, Gubareva E.A., Kolzhanova D.Yu., Karimov S.B. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 1, pp. 32–54.
DOI: 10.18698/2309-3684-2017-1-3254

[17] Qingsheng Yang, Fang Xu. *Frontiers of Mechanical Engineering in China.* 2009, vol. 4, no. 3, pp. 284–288.

[18] Aboudi J., *International Journal of Multiscale Computational Engineering*, 2008, no. 6, pp. 411–434.

[19] Bin Zhang, Xiaoming Yu and Boqin Gu. *Polymer Composites*, 2015. DOI: 10.1002/pc.23596

[20] Ge Q., Luo X., Iversen C.B., Nejad H.B., Mather P.T., Dunn M.L., Qi H.J. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, pp. 2777–2790.

[21] Dimitrienko Yu.I., Dashtiev I.Z. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2001, no. 1, pp. 21–41.

[22] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. T. 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnykh sred* [Continuum Mechanics. In 4 vols. Vol. 2. Universal lows of continuum mechanics and electrodynamics]. Moscow. BMSTU Publ., 2011, 560 p.

Dimitrienko Yu.I., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Scientific and Educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Development of Software Packeges, Bauman Moscow State Technical University, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 400 research publications in the field of continuum mechanics, computational mechanics, mechanics and thermomechanics of composites, mathematical modeling in material science, computational gasdynamics.
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Gubareva E.A., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Deputy Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 50 research publications in the field of continuum mechanics, mechanics of contact interaction, mathematical modeling, mechanics of composites. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Karimov S.B., Assist. Lecturer, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of several research publications in the field of mechanics of composites. e-mail: sunnat49@yandex.ru

Kolzhanova D.Yu., Assist. Lecturer, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of several research publications in the field of mechanics of composites.
e-mail: darya.kolzhanova@yandex.ru