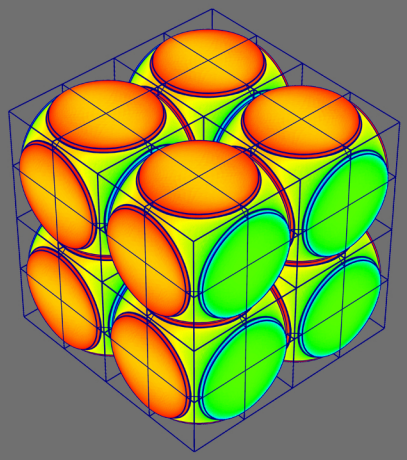
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Лазарев А.А. Исследование эффективности быстрого мультипольного метода граничных элементов для решения уравнения Пуассона. Математическое модели-рование и численные методы, 2018, № 4, с. 41–56.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/180/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.101
09.01.2026 15:24:31

УДК 517:519.6 DOI: 10.18698/2309-3684-2018-4-4156

Исследование эффективности быстрого мультипольного метода граничных элементов для решения уравнения Пуассона

© А.А. Лазарев[1, 2]

[1]ФГУП «ЦИАМ им. П.И. Баранова», Москва, 111116, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложены алгоритмы традиционного и быстрого мультипольного методов граничных элементов для решения двумерного уравнения Пуассона при наличии непотенциальных объемных источников. Выполнено численное исследование влияния параметров метода на скорость и точность решения, приведены рекомендации по совместному применению методов.

Ключевые слова: *метод граничных элементов, мультипольное разложение потенциала, объемные источники*

Введение. К наиболее распространенным численным методам решения уравнения Пуассона [1] относятся методы: конечных разностей (МКР), конечных объемов (МКО), конечных элементов (МКЭ) и граничных элементов (МГЭ) [2]. В отличие от остальных методов в МГЭ используют фундаментальные решения, а не их сеточные аппроксимации, что позволяет получить решение высокой гладкости и точности по сравнению с другими методами [3, 4]. Размерность задачи по пространству снижается за счет дискретизации неизвестных функций только на границе расчетной области, что дает выигрыш [5, 6] для линейных задач с потенциальными объемными источниками, задач с движущимися границами, а также позволяет непосредственно решать задачи в бесконечных областях. Для решения задачи МГЭ при наличии непотенциальных объемных источников можно использовать сетку внутри области для вычисления объемных интегралов и формирования правой части матрицы системы [5]. Если на границе имеется N узлов, внутри области в общем случае будет $O(N^2)$ узлов. В МГЭ при этом необходимо решать систему уравнений с полностью заполненной матрицей размером $N \times N$, что требует $O(N^3)$ операций при решении прямым методом и $O(N^2)$ операций — при решении итерационным методом. Затраты на учет объемных источников при формировании матрицы системы составляют $O(N^3)$, а для того чтобы получить результаты в области, необходимо $O(N^4)$ операций. Таким образом, МГЭ при наличии объемных источников представляет собой высокозатратный метод по сравнению с МКР, МКО и МКЭ, в кото-

рых суммарная сложность формирования матрицы составляет $O(N^2)$. Наряду с другими подходами для уменьшения сложности вычислений в МГЭ [6, 7] служит метод быстрого суммирования с использованием мультипольного разложения потенциала. Метод был впервые предложен в середине 1980-х годов для ускорения расчета взаимодействий в задаче N тел [8]. Он позволяет вместо $N \cdot N$ рассматривать порядка $N + N$ взаимодействий. В работе проведено сравнение традиционного (МГЭ) и быстрого мультипольного (МГЭМР) методов граничных элементов для решения задач с непотенциальными объемными источниками, исследовано влияние некоторых параметров методов на точность и скорость решения.

Интегральная постановка задачи. Уравнение Пуассона для неизвестной функции (потенциала) φ имеет вид

$$\Delta\varphi + f = 0, \ \ \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in V, \tag{1}$$

где в двумерном случае

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \tag{2}$$

а $f = f(\mathbf{x})$ — функция распределения плотности объемных источников.

На границе области $S = \partial V$ заданы условия вида

$$\alpha\varphi + \beta q = \gamma, \ \ q = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}, \tag{3}$$

где q — производная потенциала по нормали $\mathbf{n}$ к границе; α, β, γ — известные функции координаты $\mathbf{x}$.

Рассмотрим [5, 7] граничную интегральную постановку задачи (1, 3) в виде граничного интегрального уравнения (ГИУ):

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) = &\int_S [G(\mathbf{x},\mathbf{y})q(\mathbf{y}) - F(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})]dS(\mathbf{y}) + \\ &+ \int_V G(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}), \end{aligned} \tag{4}$$

где $c(\mathbf{x}) = 1/2$ для $\forall \mathbf{x} \in S$ и $c(\mathbf{x}) = 1$ для $\forall \mathbf{x} \in V$.

В уравнении (4) использовано фундаментальное решение двумерного уравнения Лапласа

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi}\ln(r), \tag{5}$$

а также его производная по нормали к границе $\mathbf{n}$:

$$F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} = -\frac{1}{2\pi} r_{,k} n_k(\mathbf{y}), \tag{6}$$

где $r = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ — расстояние между точкой источника $\mathbf{x}$ и точкой поля $\mathbf{y}$.

Для вычисления производных искомой функции необходимо использовать гиперсингулярное уравнение [5, 7]

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x})\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \int_S \left[\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y})q(\mathbf{y}) - \mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\right] dS(\mathbf{y}) + \\ + \int_V \mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}); \end{aligned} \tag{7}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{2\pi r} r_{,k};$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\partial^2 F(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{2\pi r^2}[n_k(\mathbf{y}) - 2r_{,k}r_{,l}n_l(\mathbf{y})]. \tag{8}$$

Уравнения метода граничных элементов. Разобьем границу двумерной области на «постоянные» граничные элементы [5] — прямолинейные сегменты ΔS_j, на которых потенциал φ и его производная q по нормали к границе принимают постоянные значения

$$\varphi(\mathbf{y}) = \varphi_j,\ \ q(\mathbf{y}) = q_j,\ \ \mathbf{y} \in \Delta S_j,\ \ j = 1...N. \tag{9}$$

Для дискретизации уравнения (4) используем метод коллокаций [2]. В качестве точки коллокации выберем центр $\mathbf{x}_i$ i-го сегмента, в результате чего уравнение (4) примет вид

$$\frac{1}{2}\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Delta S_j} [G_i q_j - F_i \varphi_j] dS = \sum_{j=1}^{N} \left[\int_{\Delta S_j} G_i dS q_j - \int_{\Delta S_j} F_i dS \varphi_j \right], \tag{10}$$

где G_i, F_i — ядра, вычисленные в точке $\mathbf{x}_i$.

Уравнение (10) запишем в виде

$$\frac{1}{2}\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Delta S_j} [g_{ij} q_j - \hat{f}_{ij} \varphi_j],\ \ i = 1...N, \tag{11}$$

где интегралы

$$g_{ij} = \int_{\Delta S_j} G_i dS,\ \ \hat{f}_{ij} = \int_{\Delta S_j} F_i dS \tag{12}$$

можно вычислить аналитически [7]. Для того чтобы составить итоговую систему

$$\mathbf{Au} = \mathbf{b}, \tag{13}$$

учтем граничные условия (3) на каждом сегменте. Тогда

$$u_j = \varphi_j,\ A_{ij} = f_{ij} + g_{ij}\,\alpha/\beta,\ \tilde{b}_{ij} = g_{ij}\,\gamma/\beta,\ \text{при}\ \beta \neq 0,$$

$$u_j = q_j,\ A_{ij} = -g_{ij},\ \tilde{b}_{ij} = -f_{ij}\varphi_j\,\gamma/\beta,\ \text{при}\ \beta = 0,\ b_i = \sum_{j=1}^{N} \tilde{b}_{ij}, \tag{14}$$

где $f_{ij} = \hat{f}_{ij}$ при $i \neq j$ и $f_{ii} = \hat{f}_{ii} + 1/2$. Для учета объемных источников разобьем область V на N_e треугольных ячеек V_e, в правые части (10, 14) добавим

$$b_i = \int_V G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_k} G_i f dV = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{h=1}^{N_G} w_h G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_h) f(\mathbf{y}_h), \tag{15}$$

где w_h — вес; $\mathbf{y}_h$ — координата; N_G — число точек интегрирования квадратуры Гаусса [9].

После решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (15) для вычисления значений потенциала и его производных в точках внутри области используем зависимости (4, 7).

Метод быстрого мультипольного разложения потенциала. Рассмотрим способ вычисления интегралов из формул (4, 7) с помощью мультипольного разложения потенциала [7]. Мультипольное разложение уравнения (4) (SM-трансляция) получим, записав ряд Лорана для представления ядра G в комплексном виде [7]:

$$\int_S G(z_0, z) q(z) dS(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} M_k(z_c) O_k(z_0 - z_c); \tag{16}$$

$$M_k(z_c) = \int_S I_k(z - z_c) q(z) dS(z),\ k = 0, 1, 2, ..., \tag{17}$$

где $M_k(z_c)$ — моменты относительно точки z_c, не зависящие от положения точки коллокации z_0, а $I_k(z) = z^k / k!$, $k \geq 0$, $O_k(z) = (k-1)! / z^k$, $k \geq 1$, $O_0(z) = -\ln(z)$. Для постоянных граничных элементов моменты можно вычислить аналитически [7].

При переносе точки разложения из z_c в $z_{c'}$ моменты относительно нового положения вычислим, не прибегая к формуле (17). Выразим их через моменты относительно старого положения перегруппи-

ровкой слагаемых в (16) и, используя бином Ньютона, получим формулу трансляции моментов (MM)

$$M_k(z_{c'}) = \sum_{l=0}^{k} I_{k-l}(z_c - z_{c'}) M_l(z_c). \tag{18}$$

Запишем для (16) локальное разложение (LT-трансляцию) в виде ряда Тейлора относительно точки z_L, $|z_0 - z_L| << |z_L - z_c|$,

$$\int_S G(z_0, z) q(z) dS(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} L_l(z_L) I_l(z_0 - z_L), \tag{19}$$

где коэффициенты

$$L_l(z_L) = (-1)^l \sum_{k=0}^{\infty} O_{l+k}(z_L - z_c) M_k(z_c) \tag{20}$$

дают формулы трансляции момента в точку локального разложения (ML-трансляции). Удержим в ряде (20) первые p членов и, используя бином Ньютона, запишем формулу локальной трансляции (LL-трансляции) при переносе центра локального разложения из z_L в $z_{L'}$:

$$L_l(z_{L'}) = \sum_{m=l}^{p} I_{m-l}(z_{L'} - z_L) L_m(z_L) = \sum_{m=0}^{p-l} I_m(z_{L'} - z_L) L_{l+m}(z_L). \tag{21}$$

Преобразования интегралов, содержащих ядро F, имеют вид

$$\int_{S_c} F(z_0, z) \varphi(z) dS(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) \tilde{M}_k(z_c); \tag{22}$$

$$\tilde{M}_k(z_c) = \int_{S_c} n(z) I_{k-1}(z - z_c) \varphi(z) dS(z), \;\; k = 1, 2, 3, \; ... \tag{23}$$

Выражения MM-, ML-, LL-, LT-трансляций для ядра F остаются такими же с учетом $\tilde{M}_0 = 0$. Таким образом, трансляции для ядра M_k непосредственно применяют к $\tilde{M}_k$, которые для постоянных граничных элементов можно вычислить аналитически.

Мультипольное разложение интегралов в уравнении (7) можно получить дифференцированием соответствующих разложений для уравнения (4), например:

$$\int_{S_c} K(z_0, z)dS(z) = \frac{\partial}{\partial z_0}\int_{S_c} G(z_0, z)q(z)dS(z) = \\ = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{\infty} L_l(z_L)I_{l-1}(z_0 - z_L). \tag{24}$$

Выражения для вычисления моментов и трансляций остаются точно такими же, как и для ядра G.

Для ускорения вычисления объемных интегралов применим к выражению (15) в виде квадратуры Гаусса разложение, аналогичное (16), коэффициенты которого рассчитывают по формулам

$$\hat{M}_k(z_c) = I_k(z_h - z_c)w_h f(z_h),\ \ k = 1, 2, 3, ...,\ \ h = 1...N_G, \tag{25}$$

где z_h — положение точек квадратуры. Выражения для остальных трансляций остаются такими же, как для ядра G.

В работе [7] приведены оценки ошибок при вычислении интегралов через ряды (16–24), позволяющие выбрать число членов разложения, необходимое для достижения заданной точности. Эти оценки опираются на значения интегралов $\int_{S_c}|q(z)|dS(z)$ и $\int_{S_c}|\varphi(z)|dS(z)$, которые априори неизвестны, и могут быть вычислены только после решения задачи. Сложность алгоритма в отсутствии объемных сил [7] составляет $O(p^2N)$ для N граничных элементов при одинаковом числе p членов мультипольного (16) и локального (19) разложений. При наличии N_S источников и N_T приемников сложность вычислений составит $O(p^2N_S + p^2N_T)$, что при $O(N^2)$ элементов и узлов внутри области даст сложность $O(p^2N^2)$ как на этапе учета объемных источников при составлении итоговой СЛАУ, так и на этапе расчетов внутри области. Хотя это и уравнивает МГЭ, МКЭ, МКР и МКО по сложности вычислений, в последних трех методах вычислений для каждого объемного элемента или узла, как правило, меньше, поэтому вопрос о соотношении скорости и точности расчета в каждом конкретном случае остается открытым.

Алгоритм МГЭМР. Для решения итоговой несимметричной системы линейных алгебраических уравнений в МГЭМР используем итерационный алгоритм обобщенного метода минимальных невязок с рестартом GMRES [10]. Каждое уравнение системы представляет собой сумму интегралов по всем элементам для источника, помещенного в какой-либо из узлов. Для вычисления интегралов по элементам, значительно удаленным от точки источника, используем мультипольное разложение потенциала по формулам (16–24), а для

вычисления интегралов по оставшимся элементам ближнего поля — стандартный подход МГЭ. Итоговую матрицу при быстром суммировании не формируют, вычисляют лишь ее произведение на текущее приближение к вектору решения. Рассмотрим решение задачи поэтапно.

1. Границу области разобъем на элементы, внутри области для учета объемных источников и представления результатов расчета построим сетку треугольных элементов. Если нет необходимости учитывать непотенциальные объемные источники, для представления решения внутри области можно обойтись только узлами без учета их связанности в элементы сетки.

2. Для описания взаимного положения источников — граничных элементов, точек квадратур объемных элементов, а также приемников — узлов внутри и на границе области, построим соответствующие квадрантные деревья [7]. Назовем квадрат, ограничивающий данную область S, клеткой нулевого уровня. Эту родительскую клетку поделим на четыре одинаковых дочерних клетки (квадранта) уровня 1. Далее будем рекурсивно делить клетки, если в них находится хотя бы один граничный элемент. Деление заканчиваем, если клетка содержит меньше граничных элементов, чем некоторое заданное их количество. Клетку, у которой нет дочерних клеток, назовем листом. Граничный элемент принадлежит клетке, если его центр расположен внутри нее. Положение объемных источников определяется центром соответствующего треугольного элемента.

На рис. 1 показано покрытие кольцевой области квадрантным деревом для граничных элементов, в листе содержится один элемент.

3. Обходя уровни снизу вверх, вычислим моменты для всех клеток дерева, удерживая p членов ряда в разложении. На листе определим моменты (17, 23), здесь s_c — множество элементов, попавших в лист, z_c — центр клетки. Для каждой родительской клетки моменты вычислим суммированием моментов четырех ее дочерних клеток по формуле ММ-трансляции (18), где $z_{c'}$ — центр родительской клетки, z_c — центр дочерней клетки (рис. 2). Моменты необходимо вычислять на каждой итерации решения СЛАУ, так как в их выражения входят интегралы от ядер и значения потенциала и его производных с текущей итерацией.

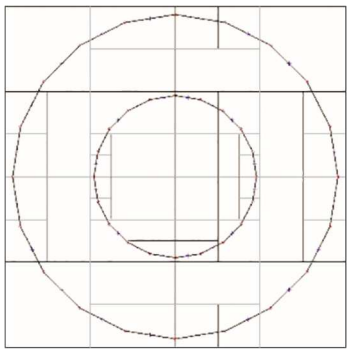


Рис. 1. Квадрантное дерево для граничных элементов, кольцевая область

4. В нисходящем проходе по структуре дерева вычислим коэффициенты локаль-

ного разложения для всех клеток. Две клетки будем считать соседними (смежными) на уровне l, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Два листа из разных уровней также будут соседними, если родительская клетка одного из них имеет общую вершину с другим. Клетки, не смежные на уровне l, родительские клетки которых соседи на уровне $l-1$, будем называть хорошо отстоящими на уровне l. Множество хорошо отстоящих клеток на уровне l для заданной клетки C образуют список взаимодействия. Клетки, родители которых не соседствуют с родителем клетки C, назовем отдаленными. Локальное разложение, связанное с клеткой C, — это сумма вкладов от клеток из списка взаимодействия и от всех отдаленных клеток (рис. 3). Первые клетки рассчитаем как ML-трансляцию (20) моментов клеток из списка взаимодействия, вторые — как LL-трансляцию (21) для родителя клетки C, где точка разложения сдвигается из центра родителя C в центр самой клетки C.

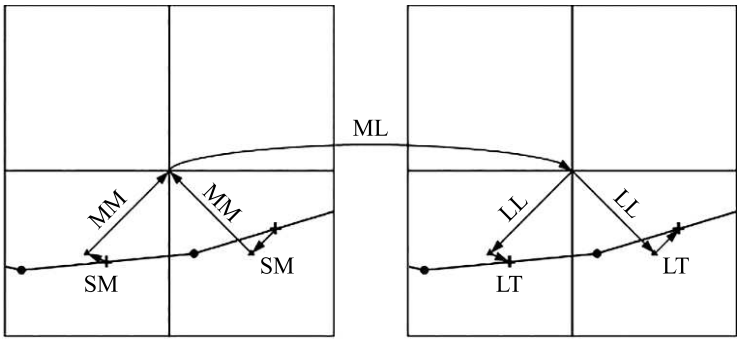


Рис. 2. Схема счета в восходящем и нисходящем проходах

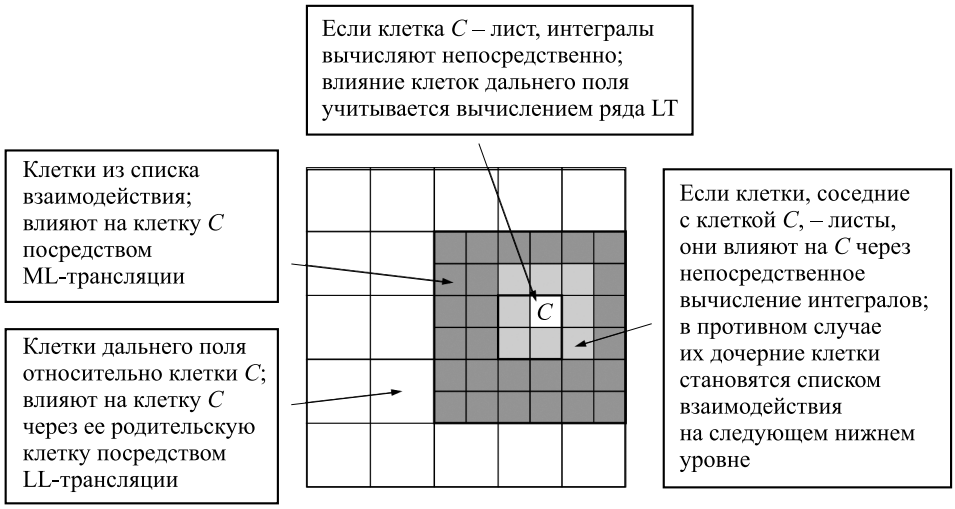


Рис. 3. Виды клеток в относительном расположении

5. Для вычисления интегралов контур интегрирования поделим на зону близко- и дальнодействия

$$\int_S G(z_0, z)q(z)dS(z) = \int_{S_{Near}} G(z_0, z)q(z)dS(z) + \\ + \int_{S_{Far}} G(z_0, z)q(z)dS(z). \tag{26}$$

Здесь интеграл по S_{Near} (клетка C и ее соседи) вычислим по формулам (12, 15), а интеграл по S_{Far} — с помощью мультипольного разложения с использованием ML- и LL-трансляций для сдвига точки разложения из центра клетки C в точку коллокации z_0 (см. рис. 3) и LT-трансляцию (19) для вычисления значения ряда в точке коллокации.

6. Перед решением СЛАУ итерационным методом при наличии объемных источников определим их вклад в правую часть системы, выполнив один раз восходящий проход по дереву объемных источников и нисходящий проход по дереву граничных элементов. На этапе итерационного алгоритма решения итоговой системы $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ вычисляем новое приближение вектора неизвестных $\mathbf{u}$ и матрично-векторное произведение $\mathbf{Au}$ (согласно пункту 3) до тех пор, пока норма невязки системы $r = \|\mathbf{Au} - \mathbf{b}\|$ не станет меньше заданного значения.

7. В результате решения на границе известны значения потенциала и его производной по нормали к границе. Используя формулы конечных разностей, вычислим производную по касательной к каждому граничному элементу. Преобразуем производные в глобальную декартову систему координат. Для вычисления потенциала и его производных в точках внутри области один раз выполним восходящие проходы по деревьям граничных элементов и объемных элементов и нисходящий проход по дереву узлов внутри области.

Тестирование алгоритмов. Рассмотрим задачу о распределении потенциала в кольце (см. рис. 1) с внутренним радиусом a и внешним радиусом b

$$\Delta\varphi = 0, \;\; \varphi\big|_{r=a} = \varphi_a, \;\; \varphi\big|_{r=b} = \varphi_b, \tag{27}$$

аналитическое решение которой [11] в полярных координатах имеет вид

$$\varphi(r) = \varphi_a \ln(r/b) + \varphi_b \ln(r/a), \;\; r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{28}$$

В вычислениях принято $a = 1$, $b = 2$, $\varphi_a = 50$, $\varphi_b = 90$ без привязки к какой-либо системе единиц. Внешняя и внутренняя границы

кольца разбиты на одинаковое количество элементов. Параметры используемых в расчетах сеток приведены в табл. 1. Параметры максимальной по числу элементов сетки обусловлены внутренними ограничениями использованной программы для построения сетки.

Таблица 1

Параметры использованных в расчете сеток

N_{mesh}	1	2	3	4	5	6	7	8
h	0,1811	0,0942	0,0471	0,0314	0,0235	0,0188	0,0094	0,0047
N_{bound}	104	200	400	600	800	1000	2000	4000
N_{trias}	680	2 480	9 880	22 368	39 552	61 962	247 164	986 862
N_{nodes}	392	1 340	5 140	11 484	20 176	31 481	124 582	495 431

Примечание. N_{mesh} — номер сетки; h — характерный размер элементов сетки; N_{bound} — число граничных элементов сетки; N_{trias} — число элементов объемной сетки; N_{nodes} — число узлов в сетке (граничных и внутренних).

На каждой сетке была проведена серия расчетов для следующих вариантов метода: МГЭ с решением системы путем LU-разложения с полным выбором ведущего элемента [9], МГЭ с методом GMRES, МГЭМР с числом членов ряда p = 8, 16, 32, одинакового для мультипольного и локального разложений. Максимальное количество элементов в листах граничного дерева и дерева внутренних точек было принято равным 20. В решателе GMRES использовали 70 векторов для построения базиса (в некоторых случаях требовался рестарт алгоритма), СЛАУ решали до получения невязки меньшей, чем $\varepsilon = 10^{-2}..10^{-14}$ с шагом степени 2. Зависимость времени решения системы от числа граничных элементов для некоторых вариантов показана на рис. 4. Относительная погрешность по сравнению с аналитическим решением приведена на рис. 5. Время вычисления результатов внутри области и время одного умножения быстрым методом для граничных узлов приведены на рис. 6.

Чтобы продемонстрировать возможности метода для решения задач с большим числом граничных элементов и изучить влияние параметров метода на скорость расчета при отсутствии объемных источников, были проведены расчеты для большого числа граничных элементов при фиксированном числе и расположении точек внутри области, не связанных в сетку. Вычисления проводили в 32-битной системе, в которой можно адресовать 4 Гбайт памяти, что соответствует полностью заполненной матрице размером $\approx 23000 \times 23000$ из чисел двойной точности. Тем не менее на практике весь этот объем недоступен для пользователя как по системным причинам, так и из-за особенностей реализации и необходимости хранения дополнительной информации.

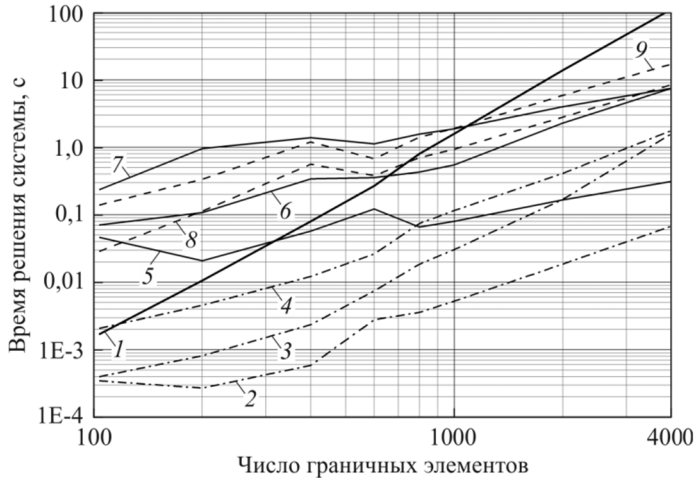


Рис. 4. Время решения СЛАУ в зависимости от числа граничных элементов:

МГЭ: *1* — LU-разложение; *2* — GMRES, $\varepsilon = 10^{-8}$; *3* — GMRES, $\varepsilon = 10^{-12}$; *4* — GMRES, $\varepsilon = 10^{-14}$; МГЭМР и GMRES: *5* — $p = 32$, $\varepsilon = 10^{-8}$; *6* — $p = 32$, $\varepsilon = 10^{-12}$; *7* — $p = 32$, $\varepsilon = 10^{-14}$; *8* — $p = 8$, $\varepsilon = 10^{-8}$; *9* — $p = 8$, $\varepsilon = 10^{-14}$

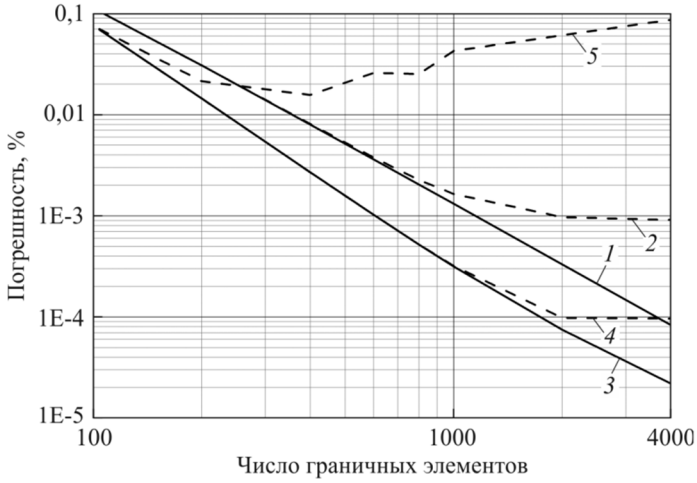


Рис. 5. Относительная погрешность в задаче без объемных источников:

расчет потенциала: *1* — МГЭ и МГЭМР, $p = 16, 32$; *2* — МГЭМР, $p = 8$; расчет производных потенциала: *3* — МГЭ и МГЭМР, $p = 32$; *4* — МГЭМР, $p = 16$; *5* — МГЭМР, $p = 8$

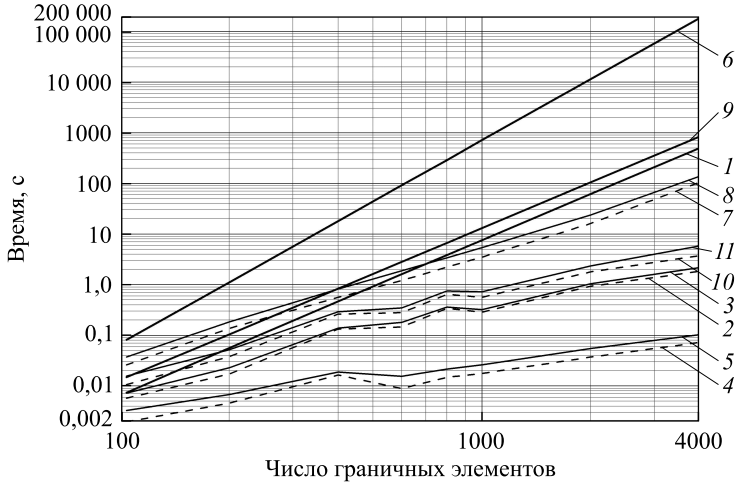


Рис. 6. Время расчета результатов в области без объемных источников (*1–5*) и с объемными источниками (*6–11*):
1 — МГЭ; МГЭМР: *2* — p = 8; *3* — p = 32; правая часть МГЭМР: *4* — p = 8; *5* — p = 32; *6* — МГЭ; МГЭМР: *7* — p = 8; *8* — p = 32; правая часть: *9* — МГЭ; МГЭМР: *10* — p = 8; *11* — p = 32

Используя стандартные средства распределения памяти, удалось разместить в памяти систему размером 6 000, тогда как разместить систему размером 7 000 уже не удалось. Дальнейший анализ выполнен для МГЭМР, в котором хранить матрицу не требуется. Относительная погрешность расчета указана на рис. 7.

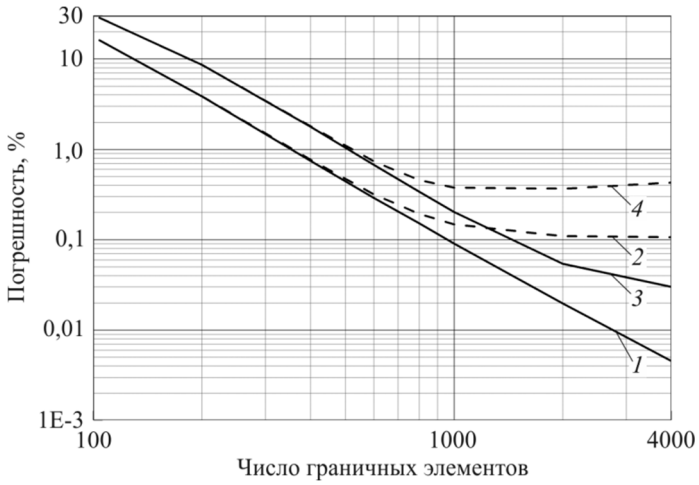


Рис. 7. Относительная погрешность в задаче с объемными источниками расчета потенциала (*1* — МГЭ, МГЭМР p = 8…32; *2* — МГЭМР p = 4) и расчета производных потенциала (*3* — МГЭ, МГЭМР p = 8…32; *4* — МГЭМР p = 4)

Время расчета в зависимости от размера подпространства GMRES и точности для сеток разного размера приведено в табл. 2 (выделены минимальные времена счета). Расчеты проведены для p = 32 членов ряда мультипольного и локального разложений. Максимальное число элементов в листах граничного дерева и дерева внутренних точек было принято равным 20.

Таблица 2

Время расчета в зависимости от размера подпространства GMRES и точности

N_{bound}		12000			24000			48000			96000			192000		
h		0,0015708			7,85398E-4			3,92699E-4			1,9635E-4			9,81748E-5		
ε[φ]		9,374E-6			2,28976E-6			5,48135E-7			1,26885E-7			2,7969E-8		
ε[dφ]		2,26557E-6			7,80863E-7			2,63266E-7			8,56403E-8			8,23266E-7		
ε \ m		50	100	200	50	100	200	50	100	200	100	200	300	200	300	400
10^{-8}	N_{iter}	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	77	77	77
	t	1	1	1	2	2	2	5	5	5	11	11	11	721	721	721
10^{-12}	N_{iter}	99	102	202	185	124	202	356	194	202	351	237	365	366	332	609
	t	33	34	68	130	88	144	626	343	359	1283	870	1345	3448	3141	5768
10^{-14}	N_{iter}	191	135	265	324	202	246	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	t	64	46	89	228	143	174	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Для тестирования алгоритма при наличии объемных источников рассмотрим задачу о распределении потенциала в кольце (см. рис. 1) с внутренним радиусом a и внешним радиусом b:

$$\Delta\varphi = AW^2 \sin(Wx_1x_2)\left(x_1^2 + x_2^2\right);$$

$$\varphi\big|_{r=a} = A\sin(Wa^2\cos(\theta)\sin(\theta));$$

$$\varphi\big|_{r=b} = A\sin(Wb^2\cos(\theta)\sin(\theta)); \qquad (29)$$

$$\cos(\theta) = x_1 / r,\ \ \sin(\theta) = x_2 / r,\ \ \theta \in [0; 2\pi).$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решением задачи (27) в кольце является функция

$$\varphi(x_1, x_2) = A\sin(W x_1 x_2). \qquad (30)$$

В вычислениях приняты безразмерные значения $a = 1$, $b = 2$, $A = 50$, $W = 5$. Расчеты проведены на сетках, параметры которых даны в табл. 1, но треугольные элементы были использованы для интегрирования объемных источников теплоты. Все деревья, используе-

мые в расчете, содержали не более 20 элементов в листе. Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы.

1. Изменение числа членов разложения в диапазоне $p = 8...32$ не приводит к существенному изменению скорости счета (см. рис. 6), что, по-видимому, связано с архитектурой современных вычислительных машин, и предоставляет возможности для дальнейшей программной оптимизации метода.

2. Выбор количества членов ряда разложения в первую очередь определяется характерным размером элементов сетки (см. рис. 5 и 7). Снижение характерного размера элемента сетки должно сопровождаться увеличением числа членов разложения. Если количество членов ряда недостаточно для достижимой стандартным МГЭ точности или даже таково, что МГЭМР дает менее точное решение, чем МГЭ, в той же ситуации, то число итераций решения СЛАУ и время счета значительно возрастают (см. рис. 4, табл. 2). На рис. 5 и 7 видно, что существует размер сетки, при котором МГЭ и МГЭМР теряют точность счета производных, для сохранения которой необходимо увеличить разрядность машинного числа (вычисления проводились в двойной точности). Увеличение числа членов разложения больше $p = 32$ также приводит к переполнению при счете и требует использования более высокой разрядности.

3. Не имеет смысла пытаться получить решение СЛАУ с большим запасом точности, так как все представленные уровни погрешности решения СЛАУ обеспечивают одинаковую точность решения задачи по сравнению с аналитическим. Когда точность, решения МГЭ и МГЭМР одинакова, изменение времени счета качественно одинаково для двух методов. Увеличение точности итерационного метода приводит к увеличению времени счета, в том числе непропроциональному (см. рис. 5).

4. Для получения высокой скорости счета необходимо выбирать оптимальный размер подпространства GMRES (см. табл. 2).

5. Если допустимо хранить матрицу системы, быстрее всего будет решать задачу традиционным МГЭ в сочетании с итерационным методом решения СЛАУ (см. рис. 6). Прямой метод решения СЛАУ в традиционном МГЭ дает выигрыш по сравнению с МГЭМР на сетках до 1000 граничных элементов (это число, в первую очередь, зависит от архитектуры вычислительной машины и точности решения СЛАУ) и может быть использован как более надежный, чем итерационный, в том числе при решении нелинейных задач. Объемные интегралы и решение задачи всегда выгоднее вычислять быстрым методом.

Заключение. В статье выполнен сравнительный анализ традиционного и быстрого мультипольного методов граничных элементов для решения уравнений Лапласа и Пуассона. Комбинируя представ-

ленные методы, можно достичь существенного (на порядок при отсутствии объемных источников и на два порядка при их наличии) ускорения расчета без потери точности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды, т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[2] Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Приближенные методы математической физики.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001, 699 с.

[3] Hartmann F., Katz C. *Structural Analysis with Finite Elements*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007, 597 p.

[4] Плюснин А.В. Моделирование внутреннего и внешнего нестационарного взаимодействия корпуса летательного аппарата с жидкостью методом граничных элементов. *Математическое моделирование и численные методы*. 2014, № 2 (2), с. 77–100.

[5] Бреббия К., Теллис Ж., Вроубелл Л. *Методы граничных элементов*. Москва, Мир, 1987, 524 с.

[6] Liu Y.J., Mukherjee S. et al. Recent advances and emerging applications of the boundary element method. *ASME*, 2011, vol. 64.

[7] Liu Y.J. Fast multipole boundary element method: theory and applications in engineering. *Cambridge University Press*, 2009, 235 p.

[8] Beatson R., Greengard L. *A short course on fast multipole methods. Wavelets, multilevel methods and elliptic PDEs*. Oxford University Press, 1997, pp. 1–37.

[9] Галанин М.П., Савенков Е.Б. *Методы численного анализа математических моделей*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010, 590 с.

[10] Баландин М.Ю., Шурина Э.П. *Методы решения СЛАУ большой размерности*. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2000, 70 с.

[11] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. *Дифференциальные уравнения математической физики: учебник для втузов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002, 368 с.

Статья поступила в редакцию 17.08.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Лазарев А.А. Исследование эффективности быстрого мультипольного метода граничных элементов для решения уравнения Пуассона. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 4, с. 41–56.

Лазарев Алексей Александрович — научный сотрудник отдела математического моделирования ФГУП «ЦИАМ им. П.И. Баранова», преподаватель кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов — численные методы решения краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных, модели долговечности, пластичности, ползучести, модели накопления повреждений, многодисциплинарное математическое моделирование ГТД.
e-mail: lazarevaa@yandex.ru

Study of fast multipole boundary element method efficiency for solving Poisson equation

© A.A. Lazarev[1,2]

[1]Baranov Central Institute of Aviation Motor Development (CIAM), Moscow, 111116, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The study introduces the algorithms for traditional and fast multipole boundary element methods for solving two-dimensional Poisson equation with non-potential volume sources. The influence of the method parameters on the speed and accuracy of the solution is numerically studied; recommendations are given on the joint application of the methods.

Keywords: *boundary element method, fast multipole method, volume sources*

REFERENCES

[1] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdykh sred* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of solids mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[2] Vlasova E.A., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Priblizhennye metody matematicheskoy fiziki: uchebnik dlya vtuzov* [Approximate methods of mathematical physics: textbook for universities]. Moscow, BMSTU Publ., 2001, 699 p.

[3] Hartmann F., Katz C. *Structural Analysis with Finite Elements*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007, 597 p.

[4] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational methods*, 2014, no. 2 (2), pp. 77–100.

[5] Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984, 464 p. [In Russ.: Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. *Metody granichnykh ehlementov*. Moscow, Mir Publ., 524 p.].

[6] Liu Y.J., Mukherjee S. et al. Recent advances and emerging applications of the boundary element method. *ASME*, 2011, vol. 64.

[7] Liu Y.J. Fast multipole boundary element method: theory and applications in engineering. *Cambridge University Press*, 2009, 235 p.

[8] Beatson R., Greengard L. *A short course on fast multipole methods. Wavelets, multilevel methods and elliptic PDEs*. Oxford University Press, 1997, pp. 1–37.

[9] Galanin M.P., Savenkov E.B. *Metody chislennogo analiza matematicheskikh modeley* [Methods of numerical analysis of mathematical models]. Moscow, BMSTU Publ., 2010, 590 p.

[10] Balandin M.Yu., Shurina E.P. *Metody resheniya SLAU bolshoy razmernosti* [Methods of solving systems of linear equations of large dimension]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2000, 70 p.

[11] Martinson L.K., Malov Yu.I. *Differencialnye uravneniya matematicheskoy fiziki: uchebnik dlya vtuzov* [Differential equations of mathematical physics: textbook for universities]. Moscow, BMSTU Publ., 2002, 368 p.

Lazarev A. A., Research Fellow, Department of Mathematical Modeling, Baranov Central Institute of Aviation Motor Development (CIAM), teacher, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: numerical methods for solving non-linear partial differential equations problems, durability models, plasticity models, creep models, damage accumulation models, multidisciplinary mathematical modeling of gas turbine engines. e-mail: lazarevaa@yandex.ru