



# Математическое моделирование и численные методы

Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Математическое моделирование режима вибрационного горения в распределенной камере горения воздухонагревателя в доменной печи. Математическое моделирование и численные методы, 2018, № 4, с. 25-40.

Источник: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/179/>

## Математическое моделирование режима вибрационного горения в распределенной камере горения воздухонагревателя доменной печи

© Б.И. Басок, В.В. Гоцуленко

Институт технической теплофизики НАН Украины, Киев, 03057, Украина

*В данной работе предпринята попытка построения квазитрехмерной математической модели, которая описывает режим вибрационного горения в вертикальной камере горения регенеративного воздухонагревателя доменной печи, рассматривая ее как распределенную динамическую систему.*

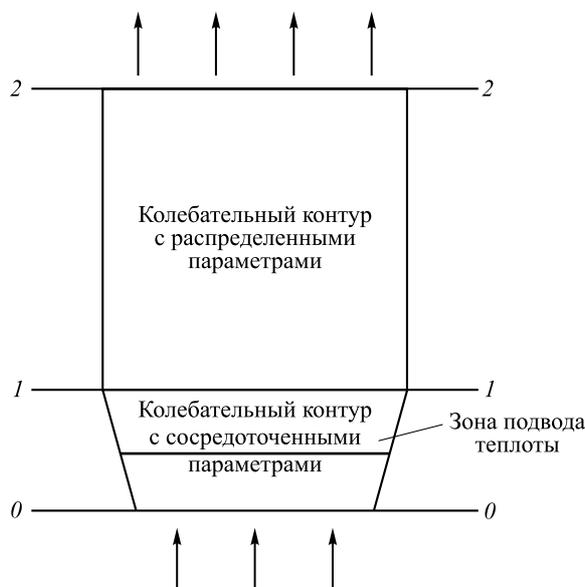
**Ключевые слова:** автоколебания, тепловое сопротивление, напорная характеристика теплоподвода, неустойчивость

**Введение.** Многие элементы теплоэнергетического оборудования являются потенциально неустойчивыми, и при изменении режимов их работы возникают автоколебания, создающие различные аварийные ситуации. В частности, в металлургическом производстве для нагрева доменного дутья используют регенеративные воздухонагреватели (кауперы). Известно, что с повышением их тепловой нагрузки создается значительный экономический эффект. Однако с повышением тепловой нагрузки возрастают колебания давления, из-за которых возникают усилия порядка 20 т, действующие на конструкцию 5–7 раз в секунду [1].

Введение феноменологического запаздывания процесса горения сыграло выдающуюся роль в теории вибрационного горения и обусловило механизм неустойчивости горения [2]. Решение проблемы возбуждения автоколебаний теплоподводом (конвективным или при сгорании топлива) в работе [2] свелось к обоснованию другого механизма, порождающего восходящую ветвь на напорной характеристике теплоподвода  $F(Q)$ . При теплоподводе к потоку в области перехода ламинарного режима в турбулентный на графике зависимости гидравлических потерь по длине  $h_\ell(Q)$  образуется нисходящая ветвь, где выполняется неравенство  $dh_\ell(Q)/dQ < 0$  [3]. В области теплоподвода из-за снижения плотности потока изменяется его скорость. Возникшее в результате этого местное тепловое сопротивление  $h_T(Q)$ , как обосновано [3], также имеет нисходящую ветвь. Таким образом, нисходящие ветви сопротивлений  $h_\ell(Q)$  и  $h_T(Q)$  порождают восходящую ветвь на напорной характеристике теплоподвода  $F(Q)$  и сос-

тавляют механизм возбуждения как термоакустических автоколебаний, так и вибрационного горения.

Механизм, обусловленный тепловым сопротивлением, действует локально в области теплоподвода, и при его описании можно использовать математические модели с сосредоточенными параметрами. Однако, так как каулер имеет значительную высоту (около 30–50 м), то в данной работе для изучения гидродинамики в камере горения каулера рассматривается ее дискретно-распределенная модель (рис. 1). В нижней части камеры горения в зоне теплоподвода расположен колебательный контур с сосредоточенными параметрами, где действуют механизмы запаздывания сгорания Л. Крокко и отрицательного теплового сопротивления, возбуждая автоколебания. Данные колебания через границу 1–1 передаются в верхнюю часть камеры горения — динамическую систему с распределенными параметрами.



**Рис. 1.** Схема условного разделения камеры горения:

0-1-1-0 — колебательный контур с сосредоточенными параметрами, внутри которого расположена зона теплоподвода; 1-2-2-1 — колебательный контур с распределенными параметрами

С появлением эффективных алгоритмов численного интегрирования [4] и методов CFD (computational fluid dynamics) моделирования стал возможным численный анализ многих задач гидродинамики. Однако расчет автоколебаний по прямым уравнениям гидродинамики даже в этом случае сопряжен со значительными

трудностями. При интегрировании уравнений гидродинамики и теплопереноса применительно к распределенной части камеры горения каупера мы используем метод расщепления [5] и его конечно-разностную реализацию, основываясь на результатах работ [6–7].

**Динамика в сосредоточенной зоне теплоподвода камеры горения.** В области теплоподвода (см. рис. 1) возникает тепловое сопротивление, которое для произвольного политропного подвода теплоты с показателем политропы  $n$  можно описать следующей зависимостью [3]:

$$h_T = n \left( \frac{k-1}{1-n} \right) \rho_0 c_v (T_1 - T_0) + \frac{\rho_0 w_0^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{2}{n-1}} \left( \frac{s_0}{s_1} \right)^2 \right].$$

Система уравнений, определяющая движение в контуре с дискретными параметрами, имеет следующий вид [1–3]:

$$\begin{cases} L_a \frac{dQ}{dt} = F(Q) - P; \\ C_a \frac{dP}{dt} = Q(t - \tau) - \varphi(P), \end{cases} \quad (1)$$

где  $L_a$ ,  $C_a$  — акустические параметры колебательного контура;  $F(Q) = F_{\text{под}}(Q) + A(Q) - h_T(Q)$  — напорная характеристика теплоподвода;  $F_{\text{под}}(Q)$  — напорная характеристика нагнетателя, подающего воздух в камеру горения;  $Q = s_1 w_1$  — объемный расход продуктов сгорания на выходе из сосредоточенного колебательного контура;  $\varphi(P)$  — функция, определяющая характеристику сети  $h_c(Q) = k_{\text{др}} Q^2$ , подключенной к колебательному контуру;  $\tau$  — запаздывание сгорания топлива;  $t$  — переменная времени.

Приведем систему уравнений (1) к безразмерному виду, полагая параметры стационарного режима

$$Q^* = \xi \Rightarrow P^* = k_{\text{др}} \xi,$$

$$\text{где } k_{\text{др}} = \frac{F_{\text{под}}(\xi) + A(\xi) - h_T(\xi)}{\xi^2}.$$

Вводим безразмерные переменные:  $z_1 = Q/Q^* \equiv m_1 Q$ ,  $z_2 = P/P^* \equiv m_2 P$ ,  $t' = m_1 t$  и  $\tau' = m_1 \tau$ . В новых переменных система (1) будет иметь вид

$$\begin{cases} \left[ L_a \frac{m_t m_2}{m_1} \right] \frac{dz_1}{dt'} = m_2 F_{\text{под}}(z_1/m_1) + m_2 A(z_1/m_1) - m_2 h_T(z_1/m_1) - z_2; \\ \left[ C_a \frac{m_t m_1}{m_2} \right] \frac{dz_1}{dt'} = z_1(t' - \tau') - z_2^{1/2} (k_{\text{др}} m_2 m_1^{-2})^{-1/2}. \end{cases} \quad (2)$$

Под действием механизмов запаздывания сгорания топлива Л. Крокко и отрицательного теплового сопротивления [3] в контуре с сосредоточенными параметрами самовозбуждаются автоколебания. Обозначим через  $z_1^*(t)$  и  $z_2^*(t)$  — периодическое решение системы (2), описывающее эти колебания. Данные функции далее используют при формировании граничных условий для колебательного контура с распределенными параметрами (см. рис. 1).

**Динамика в распределенной части камеры горения.** В безразмерных переменных уравнения движения (Навье — Стокса), неразрывности и теплопереноса в приближении Буссинеска применительно к вертикальной камере горения имеют вид [6–7]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\text{grad}(p) + \nabla^2 \mathbf{V} + \text{Gr} \theta \mathbf{e}_r, \quad (3)$$

$$\text{div} \mathbf{V}(x, t) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div} [\theta \mathbf{V} - \text{Pr}^{-1} \text{grad}(\theta)] = \mathbf{V} \mathbf{e}_r, \quad (5)$$

где  $\text{Gr} = g\gamma[T_1 - T_2]l^3/\nu$  — число Грасгофа;  $\text{Pr} = \nu/a$  — число Прандтля.

Рассматриваемую задачу будем решать численно с помощью явной трехэтапной схемы расщепления, дискретизируя временную ось  $t_{n+1} = t_n + \Delta t(n+1)\Delta t$ :

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^n - \tau \left( -(\mathbf{V}^n \nabla) \mathbf{V} + \nabla^2 \mathbf{V}^n + \text{Gr} \theta \mathbf{e}_r \right); \quad (6)$$

$$\tilde{\theta} = \theta^n - \tau \text{div} \left\{ \theta^n \mathbf{V}^n - \text{Pr}^{-1} \text{grad}(\theta^n) \right\} + \tau \mathbf{V}^n \mathbf{e}_r; \quad (7)$$

$$\Delta p^n = \nabla \tilde{\mathbf{V}} / \tau;$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \tilde{\mathbf{V}} - \tau \text{grad}(p^n); \quad (8)$$

$$\theta^{n+1} = \tilde{\theta} - \tau \text{div} \left\{ \tilde{\theta} \mathbf{V}^n - \text{Pr}^{-1} \text{grad}(\tilde{\theta}) \right\} + \tau \mathbf{V}^n \mathbf{e}_r.$$

Данная схема представляет собой комбинацию схемы О.М. Белоцерковского расщепления по физическим факторам для уравнений гидродинамики [7] и пересчетной разностной схемы Н.И. Никитенко [8] для уравнения конвективного переноса концентрации газа и объединяет их преимущества. Турбулентный характер движения далее будет учитываться введением эффективного коэффициента вязкости  $\nu_{ef}$  [6].

Запишем векторное уравнение (3) в цилиндрической системе координат в предположении цилиндрической симметрии (т. е.  $\partial/\partial\phi = 0$ ). Компоненты скорости среды в этой системе имеют следующий вид:

$$\mathbf{V} = u\mathbf{e}_r + w\mathbf{e}_z.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \partial u/\partial t + (\mathbf{V}\nabla)u &= -\partial p/\partial r + \Delta u - u/t^2; \\ \partial w/\partial t + (\mathbf{V}\nabla)w &= -\partial p/\partial z + \Delta w + Gr\theta, \end{aligned}$$

где действия операторов  $\mathbf{V}\nabla$  и  $\nabla^2$  определяются формулами

$$(\mathbf{V}\nabla) = u\partial/\partial r + w\partial/\partial z;$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Уравнение (5) в цилиндрической системе координат будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(\theta u - Pr^{-1}\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\theta w - Pr^{-1}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right\} = w.$$

Таким образом, в цилиндрической системе координат схема расщепления (6)–(8) имеет вид

$$\tilde{u} = u + \tau \left[ -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru^2) - \frac{\partial(uw)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]; \quad (9)$$

$$\tilde{w} = w + \tau \left[ -\frac{\partial w^2}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ruw) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + Gr_{ef}\theta \right]; \quad (10)$$

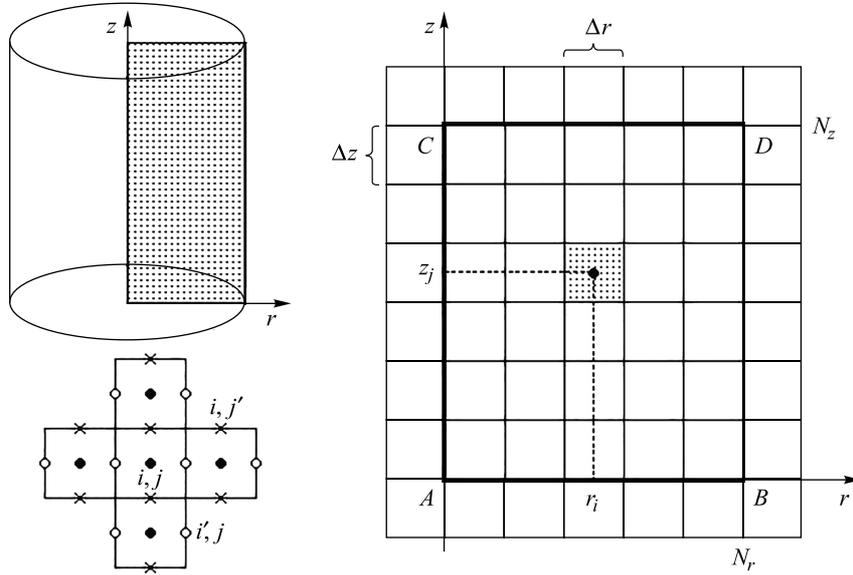
$$\frac{\tilde{\theta} - \theta^n}{\tau} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(\theta^n u^n - \frac{1}{Pr_{ef}^r}\frac{\partial\theta^n}{\partial r}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\theta^n w^n - \frac{1}{Pr_{ef}^z}\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\right\} = w^n; \quad (11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^n}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p^n}{\partial z^2} = \tau^{-1} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right\}; \quad (12)$$

$$u^{n+1} = \tilde{u} - \tau \partial p^n / \partial r, \quad w^{n+1} = \tilde{w} - \tau \partial p^n / \partial z; \quad (13)$$

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left( \tilde{\theta} u^n - \frac{1}{\text{Pr}_{ef}^r} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \tilde{\theta} w^n - \frac{1}{\text{Pr}_{ef}^z} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right\} = w^n. \quad (14)$$

Для получения конечно-разностного алгоритма на основе рассмотренного выше метода расщепления воспользуемся разнесенной (шахматной) сеткой [6], приведенной на рис. 2.



**Рис. 2.** Схема рассматриваемой расчетной области и шаблон для расчета скорости  $u_{i',j}$ , скорости  $w_{i,j'}$ , давления  $p_{i,j}$  и температуры  $\theta_{i,j}$

Получаем следующие конечно-разностные уравнения:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i',j} = & u_{i',j} + \tau \left[ -\frac{1}{\Delta r} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2i} \right) u_{i'+1,j}^2 - \left( 1 - \frac{1}{2i} \right) u_{i'-1,j}^2 \right] - \right. \\ & - \frac{1}{\Delta z} \left[ (uw)_{i',j'} - (uw) \right] + \frac{1}{(i+3/2)\Delta r^2} \left( (i+3/2)u_{i'+1,j} - (i+1/2)u_{i',j} \right) - \\ & - \frac{1}{(i+1/2)\Delta r^2} \left( (i+1/2)u_{i',j} - (i-1/2)u_{i'-1,j} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{\Delta z^2} \left( u_{i',j+1} - 2u_{i',j} + u_{i',j-1} \right) \right]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}_{i,j'} &= w_{i,j'} - \frac{\tau}{2\Delta z} (w_{i,j'+1}^2 - w_{i,j'-1}^2) - \\
 &- \frac{\tau}{(i+1/2)\Delta r} \left[ (i+1/2)(uw)_{i',j'} - (i-1/2)(uw)_{i'-1,j'} \right] + \\
 + \tau &\left\{ \frac{1}{(i+1/2)\Delta r^2} \left[ (i+3/2)(w_{i+1,j'} - w_{i,j'}) - (i+1/2)(w_{i,j'} - w_{i-1,j'}) \right] + \right. \\
 &\left. + \frac{1}{\Delta z^2} [w_{i,j'+1} - 2w_{i,j'} + w_{i,j'-1}] + \frac{\theta_{i,j'+1}^n + \theta_{i,j}^n}{2} \text{Gr}_{ef,i',j'} \right\}; \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$(uw)_{i',j'} = \frac{1}{4} (u_{i',j} + u_{i',j+1}) (w_{i,j'} + w_{i+1,j}); \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{i,j} &= \theta_{i,j}^n + \tau w_{i,j'}^n - \frac{\tau}{(i+1/2)\Delta r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left( \theta^n u^n - \frac{1}{\text{Pr}_{ef}^r} \frac{\partial \theta^n}{\partial r} \right) \right\} \Big|_{i',j} - \\
 &- \tau \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \theta^n w^n - \frac{1}{\text{Pr}_{ef}^z} \frac{\partial \theta^n}{\partial z} \right\} \Big|_{i,j'} \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{(i-1,5)\Delta r^2} \left[ (i-1)(\tilde{p}_{i+1,j}^n - \tilde{p}_{i,j}^n) - (i-2)(\tilde{p}_{i,j}^n - \tilde{p}_{i-1,j}^n) \right] + \\
 &+ \frac{1}{\Delta z^2} (\tilde{p}_{i,j'+1}^n - 2\tilde{p}_{i,j}^n + \tilde{p}_{i,j'-1}^n) = \quad (19) \\
 = \frac{1}{\tau} &\left\{ \frac{1}{(i-1,5)\Delta r} \left[ (i-1)\tilde{u}_{i',j} - (i-2)\tilde{u}_{i'-1,j} \right] + \frac{1}{\Delta z} [\tilde{w}_{i,j'} - \tilde{w}_{i,j'-1}] \right\};
 \end{aligned}$$

$$u_{i',j}^{n+1} = \tilde{u}_{i',j} - \frac{\tau}{\Delta r} (\tilde{p}_{i+1,j}^n - \tilde{p}_{i,j}^n); \quad w_{i,j'}^{n+1} = \tilde{w}_{i,j'} - \frac{\tau}{\Delta z} (\tilde{p}_{i,j'+1}^n - \tilde{p}_{i,j}^n); \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 \theta_{i,j}^{n+1} &= \theta_{i,j}^n + \tau w_{i,j'}^n - \frac{\tau}{(i+1/2)\Delta r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left( \tilde{\theta} u^n - \frac{1}{\text{Pr}_{ef}^r} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} \right) \right\} \Big|_{i',j} - \\
 &- \tau \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \tilde{\theta} w^n - \frac{1}{\text{Pr}_{ef}^z} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right\} \Big|_{i,j'}, \quad (21)
 \end{aligned}$$

где  $i' = i+1/2$ ;  $j' = j+1/2$ .

**Численное моделирование турбулентного характера движения.** При моделировании учета турбулентного режима движения в уравнениях движения воспользуемся результатами работы [6]. Кинематическая вязкость газа и нагретого воздуха сравнительно невелика. Движение в камере горения имеет турбулентный характер, так как число Рейнольдса  $Re \sim 1/\nu$  довольно значительно, а именно оно в первую очередь определяет режимы течения (ламинарный или турбулентный) и динамику перехода между ними.

Таким образом, адекватность математической модели в значительной степени зависит от правильного учета в данных условиях эффектов турбулентности. Как зарождение [6] турбулентности, так и неустойчивость решения разностного уравнения имеют одну и ту же природу. Слагаемые, вводимые в разностные уравнения для обеспечения их устойчивости или автоматически появляющиеся при некоторых способах аппроксимации, определенным образом моделируют влияние усредненных в масштабах ячейки расчетной сетки флуктуации физических величин, т. е. турбулентность.

С возникновением турбулентности благодаря зарождению микровихрей резко усиливается перемешивание жидкости, и эффективная вязкость  $\mu_{ef}$ , рассчитываемая как коэффициент пропорциональности между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций для усредненного макродвижения, возрастает. В этом случае она имеет две составляющие ( $\mu_{ef} = \mu + \mu_t$ ), обладающие разной физической природой: первая обеспечивает молекулярный перенос импульса, вторая — конвективный перенос импульса микровихрями. Ясно, что в случае ламинарного движения эффективный коэффициент динамической вязкости совпадает с коэффициентом молекулярной вязкости  $\mu$ . Широкий круг моделей турбулентности основывается на моделировании коэффициента турбулентной вязкости. Простейшими моделями являются алгебраические, когда коэффициент  $\mu_t$  моделируется некоторым алгебраическим выражением, связанным с разными (усредненными) характеристиками движения среды.

Для учета турбулентности в разностные уравнения необходимо вводить дополнительные параметры. При реальном движении такие параметры «появляются» автоматически с образованием турбулентности. В расчет их необходимо закладывать заранее, а отсутствие этих параметров как раз и приводит к расходимости численного метода. «Физическая» причина такого рода расходимости и даже ее необходимость становится очевидной, если учесть, что мелкомасштабные турбулентные вихри отбирают энергию у крупномасштабного (по отношению к вихрям) движения. Если же эту убыль энергии не учитывать, потоки разгоняются до бесконечных скоростей, что и становится

проявлением расходимости расчетной схемы. Приведенные рассуждения указывают также на то, что турбулентность необходимо учитывать именно в диссипативном члене, описывающем убыль энергии макродвижения (например, моделируя коэффициент вязкости).

Граница устойчивости расчетной схемы движения жидкости на сетке с характерным размером расчетной ячейки  $\Delta$  [6] соответствует началу зарождения турбулентных вихрей масштабом меньше  $\Delta$  (которые невозможно описать на данной сетке). Начиная с этого момента микровихри, отбирая энергию у макродвижения, выражаются в увеличении эффективной вязкости жидкости. Ее величина соответствует границе устойчивости расчетной схемы.

Таким образом, параметры эффективной вязкости необходимо подбирать таким образом, чтобы расчетная схема с такой вязкостью находилась на границе устойчивости. Это соответствует учету при данных параметрах движения (скорости и размерах области, в которых оно происходит) вихрей, имеющих размеры меньше размеров ячейки расчетной сетки.

Предположение о равномерной турбулизации жидкости по всему объему, выдвигаемое в модели с постоянной эффективной вязкостью, во многих случаях является чересчур грубым. Рассмотрим модель турбулентности, ассоциированную с сеточным числом Рейнольдса  $Re_\Delta = V_\Delta \Delta v_T^{-1}$ . Здесь  $V_\Delta$  — скорость в пределах данной ячейки,  $v_T = \mu_T / \rho$  — турбулентная составляющая кинематической вязкости. Поскольку именно число Рейнольдса определяет переход в турбулентный режим движения жидкости, можно предположить, что сеточное число Рейнольдса во всем объеме жидкости постоянно. Это приводит к следующей модели турбулентной вязкости, линейно зависящей от скорости [6]:

$$v_T = V_\Delta \Delta / Re_\Delta. \quad (22)$$

С учетом (22) эффективные кинематическая вязкость, числа Грасгофа и Прандтля определяются формулами

$$\begin{aligned} v_{ef} &= v + V_\Delta \Delta / Re_\Delta; \\ Gr_{ef} &= g \gamma (T_1 - T_2) \ell^3 (v + V_\Delta \Delta / Re_\Delta)^{-1}; \\ Pr_{ef} &= \frac{1}{a} (v + V_\Delta \Delta / Re_\Delta). \end{aligned} \quad (23)$$

В модель турбулентности (23) входят три параметра:  $Re_\Delta$ ,  $v$  и  $\Delta$ . При фиксированной сетке ( $\Delta = \text{const}$ ) в области, где  $V_\Delta \rightarrow 0$ , эффективная вязкость совпадает с молекулярной, т. е.  $v_{ef} \rightarrow v$ . В расчетных

ячейках, в которых велико значение сеточной скорости  $V_\Delta$ , турбулентная вязкость может во много раз превышать молекулярную [7].

При записи разностных уравнений гидродинамики на разнесенной сетке необходимо на гранях расчетной ячейки задавать значения вязкости  $\nu_{i,j}^r$  и  $\nu_{i,j}^z$ , числа Грасгофа  $Gr_{ef_{i,j}} = 2g\gamma(T_1 - T_2) \times \ell^3 (\nu_{i,j}^r + \nu_{i,j}^z)^{-1}$  и Прандтля  $Pr_{ef_{i,j}}^r = \nu_{i,j}^r / a$ . Значения коэффициентов вязкости в углах расчетной сетки  $\nu_{i,j}^r$  и  $\nu_{i,j}^z$  определяют как средние арифметические из соседних коэффициентов  $\nu_{i,j}^r$  и  $\nu_{i,j}^z$ :  $\nu_{i,j}^r = (\nu_{i,j}^r + \nu_{i,j+1}^r) / 2$ ,  $\nu_{i,j}^z = (\nu_{i,j}^z + \nu_{i+1,j}^z) / 2$ . Сеточное число Рейнольдса выбирают с помощью численных экспериментов. Число  $Re_\Delta$  (при фиксированной расчетной ячейке  $\Delta$ ) подбирают таким образом, чтобы обеспечить расчетный процесс на границе устойчивости. Большое количество численных экспериментов, проведенных для разных течений и сеток (с разными значениями  $\Delta$ ), позволяет сделать вывод, что при  $Re_\Delta \approx 2$  обеспечивается устойчивость расчета гидродинамических характеристик и это значение находится в области срыва устойчивости [6].

Рассмотренная выше модель отвечает перенесению вихря масштаба  $\Delta$  в направлении скорости  $\mathbf{V}$ . Однако эта модель не предусматривает условий зарождения вихря. Выражение для турбулентной вязкости, которое учитывает условия зарождения турбулентных вихрей, было предложено Л. Прандтлем:

$$\nu_T = \ell^2 |\partial \mathbf{V} / \partial y|, \quad (24)$$

где  $\ell$  — длина перемешивания;  $y$  — переменная, параметризирующая ось, перпендикулярную направлению потока.

Запись на сетке выражения для эффективной вязкости должна учитывать ее тензорный характер, т. е. тот факт, что в горизонтальном и вертикальном направлениях вязкости задаются в разных точках:

$$\begin{aligned} \nu_{i,j}^r &= \nu + \ell_r^2 |w_{i,j} - w_{i,j-1}| / \Delta r; \\ \nu_{i,j}^z &= \nu + \ell_z^2 |u_{i,j} - u_{i-1,j}| / \Delta z, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $w_{i,j} = (w_{i,j} + w_{i+1,j}) / 2$ ;  $u_{i,j} = (u_{i,j} + w_{i,j+1}) / 2$ .

Длины перемешивания полагают пропорциональными сторонам расчетной ячейки:  $\ell_r = \beta_r \Delta r$  и  $\ell_z = \beta_z \Delta z$ , где  $\beta_r$ ,  $\beta_z$  — параметры модели.

Следовательно, окончательно получаем:

$$v_{i,j}^r = v + \beta_r^2 \Delta r |w_{i+1,j'} + w_{i+1,j'-1} - w_{i,j'} - w_{i,j'-1}|/2; \quad (26)$$

$$v_{i,j}^z = v + \beta_z^2 \Delta z |u_{i',j+1} + u_{i'-1,j+1} - u_{i',j} - u_{i'-1,j}|/2. \quad (27)$$

Данная модель турбулентной вязкости — двухпараметрическая. Параметры  $\beta_r$  и  $\beta_z$  подбирают из условия приближения к порогу неустойчивости расчетной схемы.

Объединяя рассмотренные выше модели турбулентности, получим трехпараметрическую модель, которая учитывает как перенос вихря вдоль потока, так и условия его зарождения. В этом случае выражение для эффективной вязкости имеет вид

$$v_{ef} = v + V_\Delta \Delta / \text{Re}_\Delta + \ell^2 |\partial \mathbf{V} / \partial y|. \quad (28)$$

**Расстановка начальных и краевых условий** (см. рис. 2). На границе  $AB$  имеем следующие граничные условия ( $i = \overline{0; N_r}$ ):

$$u_{i',0} = 0, \quad w_{i,0'} = \frac{z_1^*(t_i)}{s_1}, \quad p_{i,0} = z_2^*(t_i), \quad \theta_{i,0} = \theta^*;$$

на границе  $BD$  ( $j = \overline{0; N_z}$ ):

$$u_{N_r,j'} = 0, \quad w_{N_r,j'} = 0 \text{ (условие прилипания);}$$

на границе  $AC$  ( $j = \overline{0; N_z}$ ):

$$u_{0',j} = 0 \text{ (условие непротекания),}$$

$$w_{0,j'} = w_{1,j'} \text{ (условие свободного скольжения);}$$

на границе  $CD$  ( $i = \overline{0; N_r}$ ):

$$u_{i',N_z} = 0, \quad w_{i,N_z'} - w_{i,N_z'-1} = 0.$$

Граничные условия для давления в узлах, расположенных на границе  $\Gamma = [BD] \cup [CD] \cup [AC]$ , определяют с помощью уравнений движения в комбинации с граничными условиями для скорости и температуры. Они представляют собой условия Неймана  $\partial p / \partial \vec{n}|_\Gamma = \psi$ , где  $\vec{n}$  — нормаль к границе  $\Gamma$ , а  $\psi$  — известная величина, получаемая проектированием уравнений движения на границу  $\Gamma$ . Для температу-

ры  $\theta$  на границе  $\Gamma' = [BD] \cup [AC]$  применяем условие полной теплоизоляции  $\partial\theta/\partial\bar{n}|_{\Gamma'} = 0$ .

Начальные условия предполагаем однородными и определяемыми стационарным режимом в первом колебательном контуре с сосредоточенными параметрами ( $i = \overline{0; N_r}, j = \overline{0; N_z}$ ):

$$\text{при } n = 0 \quad u_{i,j}^n = 0, \quad w_{i,j}^n = \xi/s_1, \quad \theta_{i,j}^n = 0, \quad p_{i,j}^n = F(\xi).$$

**Решение уравнения Пуассона для давления.** В рассматриваемой явной схеме расщепления (9)–(14) основная трудность заключена в решении уравнения Пуассона (12) на каждом временном слое  $t_n$ . При записи схемы расщепления на разнесенной сетке это приводит к решению системы конечно-разностных алгебраических уравнений (19). Существует достаточно большое число методов, как точных, так и приближенных, решения этой системы [9, 10]. Рассмотрим метод последовательной верхней релаксации (ПВР), предварительно записав уравнение (19) в виде

$$\begin{aligned} p_{ij}^n &= A_{ij}^n p_{i+1,j}^n + B_{ij}^n p_{i-1,j}^n + C_{ij}^n p_{i,j+1}^n + D_{ij}^n p_{i,j-1}^n + \Omega_{ij}^n; \\ \Omega_{ij}^n &= -\frac{1}{\tau} \left[ \frac{2i-3}{(i-1,5)\Delta r^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right]^{-1} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{(i-1,5)\Delta r} [(i-1)\tilde{u}_{i,j} - (i-2)\tilde{u}_{i-1,j}] + \frac{1}{\Delta z} [\tilde{w}_{i,j} - \tilde{w}_{i,j-1}] \right\}; \\ A_{ij}^n &= \frac{i-1}{(i-1,5)\Delta r^2} \left[ \frac{2i-3}{(i-1,5)\Delta r^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right]^{-1}; \\ B_{ij}^n &= \frac{i-2}{(i-1,5)\Delta r^2} \left[ \frac{2i-3}{(i-1,5)\Delta r^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right]^{-1}; \\ C_{ij}^n &= D_{ij}^n = \frac{1}{\Delta z^2} \left[ \frac{2i-3}{(i-1,5)\Delta r^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Метод ПВР [10] определяется следующей итерационной схемой ( $s = \overline{1; s^*}$ ):

$$p_{ij}^{n,s} = (1 - q_p) p_{ij}^{n,s-1} + q_p \left\{ A_{ij}^n p_{i+1,j}^{n,s-1} + B_{ij}^n p_{i-1,j}^{n,s} + C_{ij}^n p_{i,j+1}^{n,s-1} + D_{ij}^n p_{i,j-1}^{n,s} + \Omega_{ij}^n \right\},$$

где  $q_p$  — параметр релаксации, обуславливающий скорость сходимости итерационного процесса;  $s^*$  — номер остановки вычислений. Параметр  $s^*$  находят из условия

$$\max_{i,j} \left\| \tilde{p}_{ij}^{n,s^*} - \tilde{p}_{ij}^{n,s^*-1} \right\| \leq \epsilon,$$

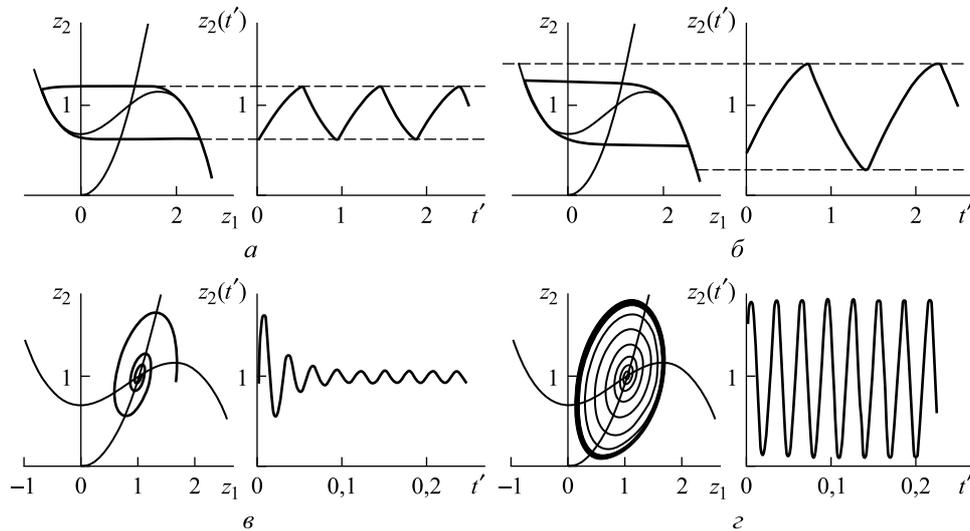
где  $\epsilon$  — заданная точность.

Полагая  $q_p = 1$ , метод ПВР превращается в метод Зейделя [10]. При реализации вычислений на ПЭВМ, учитывая их современные вычислительные возможности, для численного решения уравнения Пуассона (12) более простым в применении является метод простой итерации, дающий удовлетворительные решения при существенно большем числе итераций ( $s = \overline{1; s^*}$ ):

$$p_{ij}^{n,s} = p_{ij}^{n,s-1} + \omega_p \left\{ A_{ij}^n p_{i+1,j}^{n,s-1} + B_{ij}^n p_{i-1,j}^{n,s-1} + C_{ij}^n p_{i,j+1}^{n,s-1} + D_{ij}^n p_{i,j-1}^{n,s-1} + \Omega_{ij}^n \right\},$$

где  $\omega_p$  — параметр сходимости метода простой итерации.

**Результаты численного моделирования.** В рассматриваемой дискретно-распределенной модели камеры горения (см. рис. 1) имеются два связанных между собой колебательных контура. В зоне теплоподвода из-за отрицательного сопротивления и под действием



**Рис. 3.** Характер деформации предельных циклов и соответствующих им автоколебаний с ростом  $\tau$  запаздывания сгорания топлива:

$a$  —  $\tau' = 0$ ;  $b$  —  $\tau' = 0,25$  — релаксационные колебания;  $v$  —  $\tau' = 0$ ;  
 $z$  —  $\tau' = 0,002$  — колебания, близкие к гармоническим

других механизмов неустойчивости, например запаздывания сгорания топлива, самовозбуждаются автоколебания, моделируемые сосредоточенной динамической системой. На рис. 3 приведены формы автоколебаний вибрационного горения и соответствующие им предельные циклы, самовозбуждающиеся в зоне теплоподвода (в колебательном контуре с сосредоточенными параметрами).

Через соответствующее граничное условие Дирихле нестационарности передаются в колебательный контур с распределенными параметрами (рис. 4), где динамика описывается уравнениями Навье — Стокса (3–5).

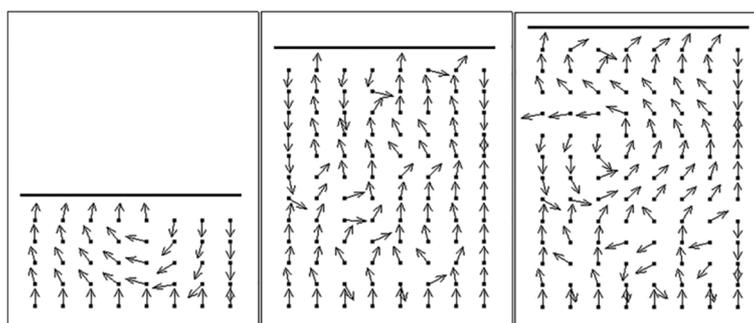


Рис. 4. Поле скоростей движения продуктов сгорания в распределенной части камеры горения на этапе ее заполнения

**Заключение.** Разработана квазитрехмерная дискретно-распределенная математическая модель, которая позволяет выполнить численные расчеты гидродинамических процессов, протекающих в камере горения регенеративного воздухонагревателя доменных печей. Численные эксперименты, проведенные на основе полученной математической модели, позволяют моделировать режим вибрационного горения в камере горения воздухонагревателя как динамической системе с распределенными параметрами.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Расчет параметров автоколебаний в вертикальной камере горения воздухонагревателя доменной печи при неустойчивом горении. *Теплоэнергетика*, 2015, № 1, с. 59–64.
- [2] Гоцуленко В.В. Математическое моделирование особенностей феномена Рийке. *Математическое моделирование*, 2004, т. 16, № 9, с. 23–28.
- [3] Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Термогидродинамическая неустойчивость потока теплоносителя. Киев, ТОВ ВД «КАЛИТА», 2015, 412 с.
- [4] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А. Применение метода RKDG для численного решения уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 4, с. 75–91.
- [5] Марчук Г.И. Методы расщепления. Москва, Наука, 1988, 264 с.

- [6] Самохвалов С.Е. Теплофизические процессы в многофазных средах: теоретические основы компьютерного моделирования. Киев, Изд-во Института системных исследований. Мин. обр. Украины, 1994, 172 с.
- [7] Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. Москва, Наука, 1984, 520 с.
- [8] Никитенко Н.И. Сопряженные и обратные задачи тепломассопереноса. Киев, Наукова думка, 1988, 240 с.
- [9] Роч П. Вычислительная гидродинамика. Москва, Мир, 1980, 616 с.
- [10] Поттер Д. Вычислительные методы в физике. Москва, Мир, 1975, 392 с.

Статья поступила в редакцию 10.10.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Математическое моделирование режима вибрационного горения в распределенной камере горения воздухонагревателя в доменной печи. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 4, с. 25–40.

**Басок Борис Иванович** — д-р техн. наук, проф., чл.-кор. НАН Украины, заведующий отделом теплофизических основ энергосберегающих технологий института технической теплофизики НАН Украины. e-mail: basok@itf.kiev.ua

**Гоцуленко Владимир Владимирович** — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник отдела теплофизических основ энергосберегающих технологий Института технической теплофизики НАН Украины. e-mail: gosul@ukr.net

## **Mathematical modeling of vibrating combustion mode in a distributed combustion chamber of a blast furnace air heater**

© B.I. Basok, V.V. Gotsulenko

Institute of Engineering Thermophysics of National Academy of Sciences of Ukraine,  
Kyiv, 03057, Ukraine, 03057

*This work attempts the construction of a quasi-three-dimensional mathematical model which describes the vibrating combustion mode in a vertical combustion chamber of a regenerative air heater in a blast furnace, considering it as a distributed dynamic system.*

**Keywords:** *self-oscillations, thermal resistance, pressure characteristic of heat supply, instability*

### REFERENCES

- [1] Basok B.I., Gotsulenko V.V. *Teploenergetika - Thermal Engineering*, 2015, vol. 62, no. 1, pp. 58–63.
- [2] Gotsulenko V.V. *Matematicheskoe modelirovanie - Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 16, no. 9, 2004, pp. 23–28.
- [3] Basok B.I., Gotsulenko V.V. *Termogidrodinamicheskaya neustoychivost potoka teplonositelya* [Thermohydrodynamic instability of coolant flow]. Kiev, TOV VD KALITA Publ., 2015, 412 p.

- [4] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, no. 4(8), 2015, pp. 75–91.
- [5] Marchuk G. I. *Metody rasshchepleniya [Methods of splitting]*. Moscow, Nauka Publ., 1988, 264 p.
- [6] Samokhvalov S.E. *Teplofizicheskiye protsessy v mnogofaznykh sredakh: teoreticheskiye osnovy kompyuternogo modelirovaniya [Thermophysical processes in multiphase media: theoretical foundations of computer simulation]*. Kiyev, Institut sistemnykh issledovaniy Publ., Min. obr. Ukraine, 1994, 172 p.
- [7] Belotserkovskiy O.M. *Chislennoye modelirovaniye v mekhanike sploshnykh sred [Numerical modeling in continuum mechanics]*. Moscow, Nauka Publ., 1984, 520 p.
- [8] Nikitenko N.I. *Sopryazhennyye i obratnyye zadachi teplomassoperenosa [Conjugate and inverse problems of heat and mass transfer]*. Kiev, Naukova dumka Publ., 1988, 240 p.
- [9] Rouche P.J. *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa, 1972. [In Russ.: Rouche P.J. *Vychislitel'naya gidrodinamik*. Moscow, Nauka Publ., 1980, 616 p.].
- [10] Potter D. *Computational Physics*. John Wiley, 1973. [In Russ.: Potter D. *Vychislitel'nyye metody v fizike*. Moscow, Nauka, 1975, 392 p.].

**Basok B.I.**, Dr. Sc. (Eng.), Professor, corresponding member of National Academy of Sciences of Ukraine, Head of Department of Thermophysical Bases of Energy-Saving Technologies, Institute of Engineering Thermal Physics of National Academy of Sciences of Ukraine. e-mail: basok@itf.kiev.ua

**Gotsulenko V.V.**, Dr. Sc. (Eng.), Senior Research Fellow, Department of Thermophysical Bases of Energy-Saving Technologies, Institute of Engineering Thermal Physics of National Academy of Sciences of Ukraine. e-mail: gosul@ukr.net