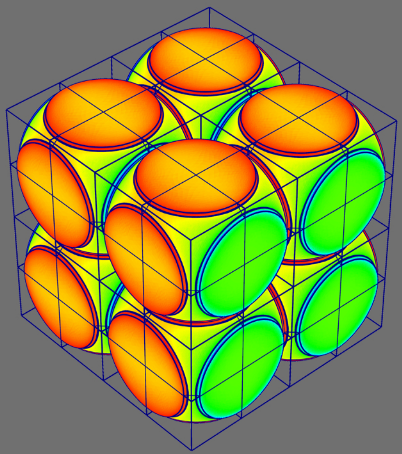
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Математическое моделирование режима вибра- ционного горения в распределенной камере горения воздухонагревателя в доменной печи. Математическое моделирование и численные методы, 2018, № 4, с. 25–40.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/179/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.60
21.02.2026 20:46:18

УДК 669.162.23 DOI: 10.18698/2309-3684-2018-4-2540

Математическое моделирование режима вибрационного горения в распределенной камере горения воздухонагревателя доменной печи

© Б.И. Басок, В.В. Гоцуленко

Институт технической теплофизики НАН Украины, Киев, 03057, Украина

В данной работе предпринята попытка построения квазитрехмерной математической модели, которая описывает режим вибрационного горения в вертикальной камере горения регенеративного воздухонагревателя доменной печи, рассматривая ее как распределенную динамическую систему.

Ключевые слова: *автоколебания, тепловое сопротивление, напорная характеристика теплоподвода, неустойчивость*

Введение. Многие элементы теплоэнергетического оборудования являются потенциально неустойчивыми, и при изменении режимов их работы возникают автоколебания, создающие различные аварийные ситуации. В частности, в металлургическом производстве для нагрева доменного дутья используют регенеративные воздухонагреватели (кауперы). Известно, что с повышением их тепловой нагрузки создается значительный экономический эффект. Однако с повышением тепловой нагрузки возрастают колебания давления, из-за которых возникают усилия порядка 20 т, действующие на конструкцию 5–7 раз в секунду [1].

Введение феноменологического запаздывания процесса горения сыграло выдающуюся роль в теории вибрационного горения и обусловило механизм неустойчивости горения [2]. Решение проблемы возбуждения автоколебаний теплоподводом (конвективным или при сгорании топлива) в работе [2] свелось к обоснованию другого механизма, порождающего восходящую ветвь на напорной характеристике теплоподвода $F(Q)$. При теплоподводе к потоку в области перехода ламинарного режима в турбулентный на графике зависимости гидравлических потерь по длине $h_\ell(Q)$ образуется нисходящая ветвь, где выполняется неравенство $dh_\ell(Q)/dQ<0$ [3]. В области теплоподвода из-за снижения плотности потока изменяется его скорость. Возникшее в результате этого местное тепловое сопротивление $h_{\text{т}}(Q)$, как обосновано [3], также имеет нисходящую ветвь. Таким образом, нисходящие ветви сопротивлений $h_\ell(Q)$ и $h_{\text{т}}(Q)$ порождают восходящую ветвь на напорной характеристике теплоподвода $F(Q)$ и составляют механизм возбуждения как термоакустических автоколебаний, так и вибрационного горения.

Механизм, обусловленный тепловым сопротивлением, действует локально в области теплоподвода, и при его описании можно использовать математические модели с сосредоточенными параметрами. Однако, так как каупер имеет значительную высоту (около 30–50 м), то в данной работе для изучения гидродинамики в камере горения каупера рассматривается ее дискретно-распределенная модель (рис. 1). В нижней части камеры горения в зоне теплоподвода расположен колебательный контур с сосредоточенными параметрами, где действуют механизмы запаздывания сгорания Л. Крокко и отрицательного теплового сопротивления, возбуждая автоколебания. Данные колебания через границу *1–1* передаются в верхнюю часть камеры горения — динамическую систему с распределенными параметрами.

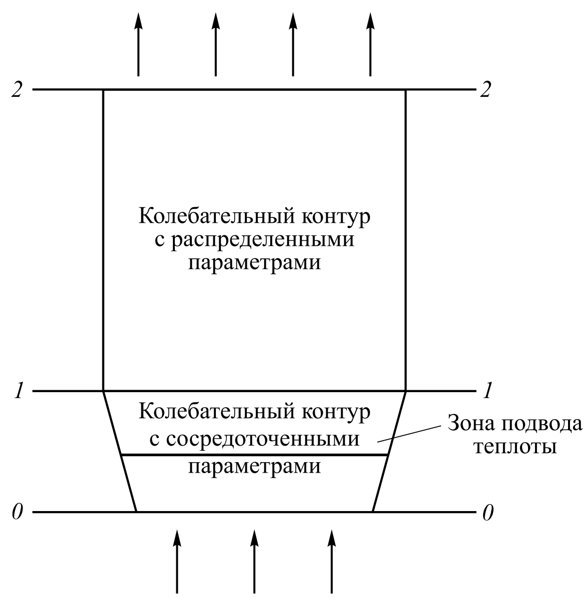


Рис. 1. Схема условного разделения камеры горения:

0-1-1-0 — колебательный контур с сосредоточенными параметрами, внутри которого расположена зона теплоподвода; *1-2-2-1* — колебательный контур с распределенными параметрами

С появлением эффективных алгоритмов численного интегрирования [4] и методов CFD (computational fluid dynamics) моделирования стал возможным численный анализ многих задач гидрогазодинамики. Однако расчет автоколебаний по прямым уравнениям гидрогазодинамики даже в этом случае сопряжен со значительными трудностями. При интегрировании уравнений гидродинамики и тепломассопереноса применительно к распределенной части камеры горения каупера мы используем метод расщепления [5] и его конечно-разностную реализацию, основываясь на результатах работ [6–7].

Динамика в сосредоточенной зоне теплоподвода камеры горения. В области теплоподвода (см. рис. 1) возникает тепловое сопротивление, которое для произвольного политропного подвода теплоты с показателем политропы n можно описать следующей зависимостью [3]:

$$h_{\text{т}} = n\left(\frac{k-1}{1-n}\right)\rho_0 c_v (T_1 - T_0) + \frac{\rho_0 w_0^2}{2}\left[1 - \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{2}{n-1}}\left(\frac{s_0}{s_1}\right)^2\right].$$

Система уравнений, определяющая движение в контуре с дискретными параметрами, имеет следующий вид [1–3]:

$$\begin{cases} L_a \dfrac{dQ}{dt} = F(Q) - P; \\ C_a \dfrac{dP}{dt} = Q(t-\tau) - \varphi(P), \end{cases} \tag{1}$$

где L_a, C_a — акустические параметры колебательного контура; $F(Q) = F_{\text{под}}(Q) + A(Q) - h_{\text{т}}(Q)$ — напорная характеристика теплоподвода; $F_{\text{под}}(Q)$ — напорная характеристика нагнетателя, подающего воздух в камеру горения; $Q = s_1 w_1$ — объемный расход продуктов сгорания на выходе из сосредоточенного колебательного контура; $\varphi(P)$ — функция, определяющая характеристику сети $h_{\text{с}}(Q) = k_{\text{др}} Q^2$, подключенной к колебательному контуру; τ — запаздывание сгорания топлива; t — переменная времени.

Приведем систему уравнений (1) к безразмерному виду, полагая параметры стационарного режима

$$Q^* = \xi \Rightarrow P^* = k_{\text{др}}\xi,$$

где $k_{\text{др}} = \dfrac{F_{\text{под}}(\xi) + A(\xi) - h_{\text{Т}}(\xi)}{\xi^2}$.

Вводим безразмерные переменные: $z_1 = Q/Q^* \equiv m_1 Q$, $z_2 = P/P^* \equiv$ $\equiv m_2 P$, $t' = m_t t$ и $\tau' = m_t \tau$. В новых переменных система (1) будет иметь вид

$$\begin{cases} \left[L_a \dfrac{m_t m_2}{m_1} \right] \dfrac{dz_1}{dt'} = m_2 F_{\text{под}} \left(z_1/m_1 \right) + m_2 A \left(z_1/m_1 \right) - m_2 h_{\text{Т}} \left(z_1/m_1 \right) - z_2; \\ \left[C_a \dfrac{m_t m_1}{m_2} \right] \dfrac{dz_1}{dt'} = z_1 \left(t' - \tau' \right) - z_2^{1/2} \left(k_{\text{др}} m_2 m_1^{-2} \right)^{-1/2}. \end{cases} \tag{2}$$

Под действием механизмов запаздывания сгорания топлива Л. Крокко и отрицательного теплового сопротивления [3] в контуре с сосредоточенными параметрами самовозбуждаются автоколебания. Обозначим через $z_1^*(t)$ и $z_2^*(t)$ — периодическое решение системы (2), описывающее эти колебания. Данные функции далее используют при формировании граничных условий для колебательного контура с распределенными параметрами (см. рис. 1).

Динамика в распределенной части камеры горения. В безразмерных переменных уравнения движения (Навье — Стокса), неразрывности и теплопереноса в приближении Буссинеска применительно к вертикальной камере горения имеют вид [6–7]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\operatorname{grad}(p) + \nabla^2 \mathbf{V} + \mathrm{Gr}\,\theta \mathbf{e}_r, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(x,t) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\theta \mathbf{V} - \mathrm{Pr}^{-1} \operatorname{grad}(\theta) \right] = \mathbf{V} \mathbf{e}_r, \tag{5}$$

где $\mathrm{Gr} = g\gamma[T_1 - T_2]\ell^3/\nu$ — число Грасгофа; $\mathrm{Pr} = \nu/a$ — число Прандтля.

Рассматриваемую задачу будем решать численно с помощью явной трехэтапной схемы расщепления, дискретизируя временную ось $t_{n+1} = t_n + \Delta t (n+1) \Delta t$:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^n - \tau\left(-\left(\mathbf{V}^n \nabla \right) \mathbf{V} + \nabla^2 \mathbf{V}^n + \mathrm{Gr}\,\theta \mathbf{e}_r \right); \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \tilde{\theta} = \theta^n - \tau \operatorname{div}\left\{ \theta^n \mathbf{V}^n - \mathrm{Pr}^{-1} \operatorname{grad}\left(\theta^n \right) \right\} + \tau \mathbf{V}^n \mathbf{e}_r; \\ \Delta p^n = \nabla \tilde{\mathbf{V}}/\tau; \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{V}^{n+1} = \tilde{\mathbf{V}} - \tau \operatorname{grad}\left(p^n \right); \\ \theta^{n+1} = \theta^n - \tau \operatorname{div}\left\{ \tilde{\theta} \mathbf{V}^n - \mathrm{Pr}^{-1} \operatorname{grad}\left(\tilde{\theta} \right) \right\} + \tau \mathbf{V}^n \mathbf{e}_r. \end{gathered} \tag{8}$$

Данная схема представляет собой комбинацию схемы О.М. Белоцерковского расщепления по физическим факторам для уравнений гидродинамики [7] и пересчетной разностной схемы Н.И. Никитенко [8] для уравнения конвективного переноса концентрации газа и объединяет их преимущества. Турбулентный характер движения далее будет учитываться введением эффективного коэффициента вязкости ν_{ef} [6].

Запишем векторное уравнение (3) в цилиндрической системе координат в предположении цилиндрической симметрии (т. е. $\partial/\partial\varphi = 0$). Компоненты скорости среды в этой системе имеют следующий вид:

$$\mathbf{V} = u\mathbf{e}_r + w\mathbf{e}_r.$$

Итак,

$$\partial u/\partial t + (\mathbf{V}\nabla)u = -\partial p/\partial tr + \Delta u - u/t^2;$$

$$\partial w/\partial t + (\mathbf{V}\nabla)w = -\partial p/\partial z + \Delta w + \mathrm{Gr}\,\theta,$$

где действия операторов $\mathbf{V}\nabla$ и ∇^2 определяются формулами

$$(\mathbf{V}\nabla) = u\partial/\partial r + w\partial/\partial z;$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Уравнение (5) в цилиндрической системе координат будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(\theta u - \mathrm{Pr}^{-1}\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\theta w - \mathrm{Pr}^{-1}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right\} = w.$$

Таким образом, в цилиндрической системе координат схема расщепления (6)–(8) имеет вид

$$\tilde{u} = u + \tau\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru^2\right) - \frac{\partial(uw)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]; \tag{9}$$

$$\tilde{w} = w + \tau\left[-\frac{\partial w^2}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ruw) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mathrm{Gr}_{ef}\,\theta\right]; \tag{10}$$

$$\frac{\tilde{\theta} - \theta^n}{\tau} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(\theta^n u^n - \frac{1}{\mathrm{Pr}_{ef}^r}\frac{\partial\theta^n}{\partial r}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\theta^n w^n - \frac{1}{\mathrm{Pr}_{ef}^z}\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\right\} = w^n; \tag{11}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p^n}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 p^n}{\partial z^2}=\tau^{-1}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right)+\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}\right\}; \tag{12}$$

$$u^{n+1}=\tilde{u}-\tau\partial p^n/\partial r,\quad w^{n+1}=\tilde{w}-\tau\partial p^n/\partial z; \tag{13}$$

$$\frac{\theta^{n+1}-\theta^n}{\tau}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(\tilde{\theta}u^n-\frac{1}{\mathrm{Pr}_{ef}^r}\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial r}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\tilde{\theta}w^n-\frac{1}{\mathrm{Pr}_{ef}^z}\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial z}\right\}=w^n. \tag{14}$$

Для получения конечно-разностного алгоритма на основе рассмотренного выше метода расщепления воспользуемся разнесенной (шахматной) сеткой [6], приведенной на рис. 2.

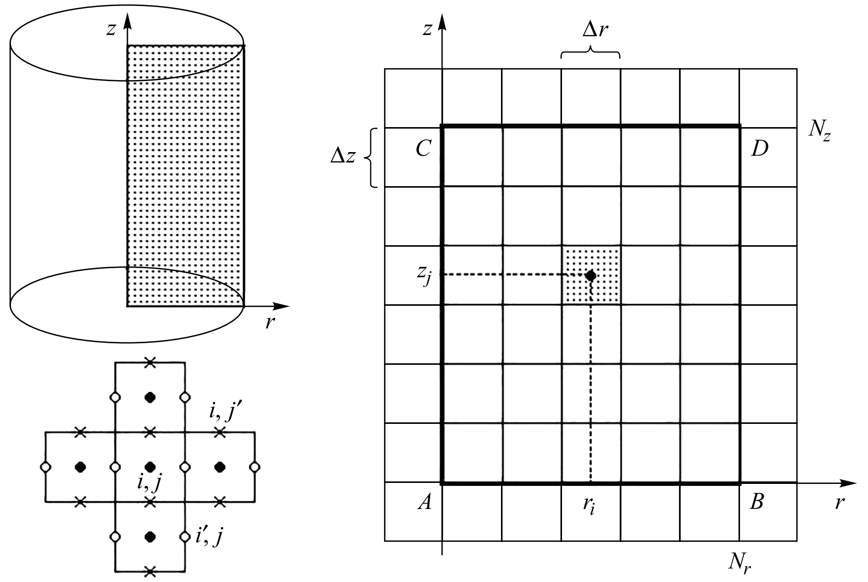


Рис. 2. Схема рассматриваемой расчетной области и шаблон для расчета скорости $u_{i',j}$, скорости $w_{i,j'}$, давления $p_{i,j}$ и температуры $\theta_{i,j}$

Получаем следующие конечно-разностные уравнения:

$$\tilde{u}_{i',j}=u_{i',j}+\tau\left[-\frac{1}{\Delta r}\left[\left(1+\frac{1}{2i}\right)u^2_{i'+1,j}-\left(1-\frac{1}{2i}\right)u^2_{i'-1,j}\right]-\right.$$
$$-\frac{1}{\Delta z}\left[(uw)_{i',j'}-(uw)\right]+\frac{1}{(i+3/2)\Delta r^2}\left((i+3/2)u_{i'+1,j}-(i+1/2)u_{i',j}\right)-$$
$$-\frac{1}{(i+1/2)\Delta r^2}\left((i+1/2)u_{i',j}-(i-1/2)u_{i'-1,j}\right)+ \tag{15}$$
$$\left.+\frac{1}{\Delta z^2}\left(u_{i',j+1}-2u_{i',j}+u_{i',j-1}\right)\right];$$

$$\tilde{w}_{i,j'} = w_{i,j'} - \frac{\tau}{2\Delta z}\left(w_{i,j'+1}^2 - w_{i,j'-1}^2\right) -$$
$$-\frac{\tau}{(i+1/2)\Delta r}\left[(i+1/2)(uw)_{i',j'} - (i-1/2)(uw)_{i'-1,j'}\right] +$$
$$+\tau\left\{\frac{1}{(i+1/2)\Delta r^2}\left[(i+3/2)\left(w_{i+1,j'} - w_{i,j'}\right) - (i+1/2)\left(w_{i,j'} - w_{i-1,j'}\right)\right] + \right. \quad (16)$$
$$\left. + \frac{1}{\Delta z^2}\left[w_{i,j'+1} - 2w_{i,j'} + w_{i,j'-1}\right] + \frac{\theta_{i,j+1}^n + \theta_{i,j}^n}{2}\mathrm{Gr}_{ef_{i',j'}}\right\};$$

$$(uw)_{i',j'} = \frac{1}{4}\left(u_{i',j} + u_{i',j+1}\right)\left(w_{i,j'} + w_{i+1,j}\right); \quad (17)$$

$$\tilde{\theta}_{i,j} = \theta_{i,j}^n + \tau w_{i,j'}^n - \frac{\tau}{(i+1/2)\Delta r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(\theta^n u^n - \frac{1}{\mathrm{Pr}_{ef}^r}\frac{\partial \theta^n}{\partial r}\right)\right\}\Bigg|_{i',j} -$$
$$- \tau\frac{\partial}{\partial z}\left\{\theta^n w^n - \frac{1}{\mathrm{Pr}_{ef}^z}\frac{\partial \theta^n}{\partial z}\right\}\Bigg|_{i,j'} \quad (18)$$

$$\frac{1}{(i-1{,}5)\Delta r^2}\left[(i-1)\left(\tilde{p}_{i+1,j}^n - \tilde{p}_{i,j}^n\right) - (i-2)\left(\tilde{p}_{i,j}^n - \tilde{p}_{i-1,j}^n\right)\right] +$$
$$+\frac{1}{\Delta z^2}\left(\tilde{p}_{i,j+1}^n - 2\tilde{p}_{i,j}^n + \tilde{p}_{i,j-1}^n\right) = \quad (19)$$
$$= \frac{1}{\tau}\left\{\frac{1}{(i-1{,}5)\Delta r}\left[(i-1)\tilde{u}_{i',j} - (i-2)\tilde{u}_{i'-1,j}\right] + \frac{1}{\Delta z}\left[\tilde{w}_{i,j'} - \tilde{w}_{i,j'-1}\right]\right\};$$

$$u_{i',j}^{n+1} = \tilde{u}_{i',j} - \frac{\tau}{\Delta r}\left(\tilde{p}_{i+1,j}^n - \tilde{p}_{i,j}^n\right); \quad w_{i,j'}^{n+1} = \tilde{w}_{i,j'} - \frac{\tau}{\Delta z}\left(\tilde{p}_{i,j+1}^n - \tilde{p}_{i,j}^n\right); \quad (20)$$

$$\theta_{i,j}^{n+1} = \theta_{i,j}^n + \tau w_{i,j'}^n - \frac{\tau}{(i+1/2)\Delta r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(\tilde{\theta} u^n - \frac{1}{\mathrm{Pr}_{ef}^r}\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r}\right)\right\}\Bigg|_{i',j} -$$
$$- \tau\frac{\partial}{\partial z}\left\{\tilde{\theta} w^n - \frac{1}{\mathrm{Pr}_{ef}^z}\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z}\right\}\Bigg|_{i,j'}, \quad (21)$$

где $i' = i + 1/2$; $j' = j + 1/2$.

Численное моделирование турбулентного характера движения. При моделировании учета турбулентного режима движения в уравнениях движения воспользуемся результатами работы [6]. Кинематическая вязкость газа и нагретого воздуха сравнительно невелика. Движение в камере горения имеет турбулентный характер, так как число Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 1/\nu$ довольно значительно, а именно оно в первую очередь определяет режимы течения (ламинарный или турбулентный) и динамику перехода между ними.

Таким образом, адекватность математической модели в значительной степени зависит от правильного учета в данных условиях эффектов турбулентности. Как зарождение [6] турбулентности, так и неустойчивость решения разностного уравнения имеют одну и ту же природу. Слагаемые, вводимые в разностные уравнения для обеспечения их устойчивости или автоматически появляющиеся при некоторых способах аппроксимации, определенным образом моделируют влияние усредненных в масштабах ячейки расчетной сетки флуктуации физических величин, т. е. турбулентность.

С возникновением турбулентности благодаря зарождению микровихрей резко усиливается перемешивание жидкости, и эффективная вязкость μ_{ef}, рассчитываемая как коэффициент пропорциональности между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций для усредненного макродвижения, возрастает. В этом случае она имеет две составляющие ($\mu_{ef} = \mu + \mu_{\text{т}}$), обладающие разной физической природой: первая обеспечивает молекулярный перенос импульса, вторая — конвективный перенос импульса микровихрями. Ясно, что в случае ламинарного движения эффективный коэффициент динамической вязкости совпадает с коэффициентом молекулярной вязкости μ. Широкий круг моделей турбулентности основывается на моделировании коэффициента турбулентной вязкости. Простейшими моделями являются алгебраические, когда коэффициент $\mu_{\text{т}}$ моделируется некоторым алгебраическим выражением, связанным с разными (усредненными) характеристиками движения среды.

Для учета турбулентности в разностные уравнения необходимо вводить дополнительные параметры. При реальном движении такие параметры «появляются» автоматически с образованием турбулентности. В расчет их необходимо закладывать заранее, а отсутствие этих параметров как раз и приводит к расходимости численного метода. «Физическая» причина такого рода расходимости и даже ее необходимость становится очевидной, если учесть, что мелкомасштабные турбулентные вихри отбирают энергию у крупномасштабного (по отношению к вихрям) движения. Если же эту убыль энергии не учитывать, потоки разгоняются до бесконечных скоростей, что и становится проявлением расходимости расчетной схемы. Приведенные рассуждения указывают также на то, что турбулентность необходимо учитывать именно в диссипативном члене, описывающем убыль энергии макродвижения (например, моделируя коэффициент вязкости).

Граница устойчивости расчетной схемы движения жидкости на сетке с характерным размером расчетной ячейки Δ [6] соответствует началу зарождения турбулентных вихрей масштабом меньше Δ (которые невозможно описать на данной сетке). Начиная с этого момента микровихри, отбирая энергию у макродвижения, выражаются в увеличении эффективной вязкости жидкости. Ее величина соответствует границе устойчивости расчетной схемы.

Таким образом, параметры эффективной вязкости необходимо подбирать таким образом, чтобы расчетная схема с такой вязкостью находилась на границе устойчивости. Это соответствует учету при данных параметрах движения (скорости и размерах области, в которых оно происходит) вихрей, имеющих размеры меньше размеров ячейки расчетной сетки.

Предположение о равномерной турбулизации жидкости по всему объему, выдвигаемое в модели с постоянной эффективной вязкостью, во многих случаях является чересчур грубым. Рассмотрим модель турбулентности, ассоциированную с сеточным числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_\Delta = V_\Delta \Delta \nu_т^{-1}$. Здесь V_Δ — скорость в пределах данной ячейки, $\nu_т = \mu_т/\rho$ — турбулентная составляющая кинематической вязкости. Поскольку именно число Рейнольдса определяет переход в турбулентный режим движения жидкости, можно предположить, что сеточное число Рейнольдса во всем объеме жидкости постоянно. Это приводит к следующей модели турбулентной вязкости, линейно зависящей от скорости [6]:

$$\nu_т = V_\Delta \Delta/\mathrm{Re}_\Delta . \tag{22}$$

С учетом (22) эффективные кинематическая вязкость, числа Грасгофа и Прандтля определяются формулами

$$\begin{gathered}\nu_{ef} = \nu + V_\Delta \Delta/\mathrm{Re}_\Delta ;\\ \mathrm{Gr}_{ef} = g\gamma(T_1 - T_2)\ell^3 \left(\nu + V_\Delta \Delta/\mathrm{Re}_\Delta\right)^{-1} ;\\ \mathrm{Pr}_{ef} = \frac{1}{a}\left(\nu + V_\Delta \Delta/\mathrm{Re}_\Delta\right).\end{gathered} \tag{23}$$

В модель турбулентности (23) входят три параметра: Re_Δ, ν и Δ. При фиксированной сетке ($\Delta = \mathrm{const}$) в области, где $V_\Delta \to 0$, эффективная вязкость совпадает с молекулярной, т. е. $\nu_{ef} \to \nu$. В расчетных ячейках, в которых велико значение сеточной скорости V_Δ, турбулентная вязкость может во много раз превышать молекулярную [7].

При записи разностных уравнений гидродинамики на разнесенной сетке необходимо на гранях расчетной ячейки задавать значения вязкости $\nu^r_{i',j}$ и $\nu^z_{i,j'}$, числа Грасгофа $Gr_{ef_{i',j'}} = 2g\gamma(T_1 - T_2)\times$ $\times \ell^3 \left(\nu^r_{i',j'} + \nu^z_{i',j'}\right)^{-1}$ и Прандтля $\Pr^r_{ef\,i',j} = \nu^r_{i',j} \big/ a$. Значения коэффициентов вязкости в углах расчетной сетки $\nu^r_{i',j'}$ и $\nu^z_{i',j'}$ определяют как средние арифметические из соседних коэффициентов $\nu^r_{i',j}$ и $\nu^z_{i',j}$: $\nu^r_{i',j'} = \left(\nu^r_{i',j} + \nu^r_{i',j+1}\right)\big/2$, $\nu^z_{i',j'} = \left(\nu^z_{i,j'} + \nu^z_{i+1,j'}\right)\big/2$. Сеточное число Рейнольдса выбирают с помощью численных экспериментов. Число Re_Δ (при фиксированной расчетной ячейке Δ) подбирают таким образом, чтобы обеспечить расчетный процесс на границе устойчивости. Большое количество численных экспериментов, проведенных для разных течений и сеток (с разными значениями Δ), позволяет сделать вывод, что при $\mathrm{Re}_\Delta \approx 2$ обеспечивается устойчивость расчета гидродинамических характеристик и это значение находится в области срыва устойчивости [6].

Рассмотренная выше модель отвечает перенесению вихря масштаба Δ в направлении скорости $\mathbf{V}$. Однако эта модель не предусматривает условий зарождения вихря. Выражение для турбулентной вязкости, которое учитывает условия зарождения турбулентных вихрей, было предложено Л. Прандтлем:

$$\nu_{\text{т}} = \ell^2 \left|\partial \mathbf{V} / \partial y\right|, \tag{24}$$

где ℓ — длина перемешивания; y — переменная, параметризирующая ось, перпендикулярную направлению потока.

Запись на сетке выражения для эффективной вязкости должна учитывать ее тензорный характер, т. е. тот факт, что в горизонтальном и вертикальном направлениях вязкости задаются в разных точках:

$$\begin{aligned} \nu^r_{i',j} &= \nu + \ell_r^2 \left| w_{i',j'} - w_{i',j'-1} \right| \big/ \Delta r; \\ \nu^z_{i,j'} &= \nu + \ell_z^2 \left| u_{i',j'} - u_{i'-1,j'} \right| \big/ \Delta z, \end{aligned} \tag{25}$$

где $w_{i',j'} = \left(w_{i,j'} + w_{i+1,j'}\right)\big/2$; $u_{i',j'} = \left(u_{i',j} + w_{i',j+1}\right)\big/2$.

Длины перемешивания полагают пропорциональными сторонам расчетной ячейки: $\ell_r = \beta_r \Delta r$ и $\ell_z = \beta_z \Delta z$, где β_r, β_z — параметры модели.

Следовательно, окончательно получаем:

$$\nu_{i',j}^{r} = \nu + \beta_r^2 \Delta r \left| w_{i+1,j'} + w_{i+1,j'-1} - w_{i,j'} - w_{i,j'-1} \right| \Big/ 2; \qquad (26)$$

$$\nu_{i,j'}^{z} = \nu + \beta_z^2 \Delta z \left| u_{i',j+1} + u_{i'-1,j+1} - u_{i',j} - u_{i'-1,j} \right| \Big/ 2. \qquad (27)$$

Данная модель турбулентной вязкости — двухпараметрическая. Параметры β_r и β_z подбирают из условия приближения к порогу неустойчивости расчетной схемы.

Объединяя рассмотренные выше модели турбулентности, получим трехпараметрическую модель, которая учитывает как перенос вихря вдоль потока, так и условия его зарождения. В этом случае выражение для эффективной вязкости имеет вид

$$\nu_{ef} = \nu + V_\Delta \, \Delta / \mathrm{Re}_\Delta + \ell^2 \left| \partial \mathbf{V} / \partial y \right|. \qquad (28)$$

Расстановка начальных и краевых условий (см. рис. 2). На границе AB имеем следующие граничные условия $\left(i = \overline{0; N_r} \right)$:

$$u_{i',0} = 0, \;\; w_{i,0'} = \frac{z_1^*\left(t_i\right)}{s_1}, \;\; p_{i,0} = z_2^*\left(t_i\right), \;\; \theta_{i,0} = \theta^*;$$

на границе BD $\left(j = \overline{0; N_z} \right)$:

$$u_{N_r,j'} = 0, \;\; w_{N_r,j'} = 0 \text{ (условие прилипания);}$$

на границе AC $\left(j = \overline{0; N_z} \right)$:

$$u_{0',j} = 0 \text{ (условие непротекания),}$$

$$w_{0,j'} = w_{1,j'} \text{ (условие свободного скольжения);}$$

на границе CD $\left(i = \overline{0; N_r} \right)$:

$$u_{i',N_z} = 0, \;\; w_{i,N_z'} - w_{i,N_z'-1} = 0.$$

Граничные условия для давления в узлах, расположенных на границе $\Gamma = [BD] \cup [CD] \cup [AC]$, определяют с помощью уравнений движения в комбинации с граничными условиями для скорости и температуры. Они представляют собой условия Неймана $\partial p / \partial \vec{n}|_\Gamma = \psi$, где $\vec{n}$ — нормаль к границе Г, а ψ — известная величина, получаемая проектированием уравнений движения на границу Г. Для температуры θ на границе $\Gamma' = [BD] \cup [AC]$ применяем условие полной теплоизоляции $\partial\theta/\partial\vec{n}\big|_{\Gamma'} = 0$.

Начальные условия предполагаем однородными и определяемыми стационарным режимом в первом колебательном контуре с сосредоточенными параметрами $\left(i = \overline{0; N_r},\ j = \overline{0; N_z}\right)$:

$$\text{при } n = 0 \quad u^n_{i',j} = 0,\ \ w^n_{i,j'} = \xi/s_1,\ \ \theta^n_{i,j} = 0,\ \ p^n_{i,j} = F(\xi).$$

Решение уравнения Пуассона для давления. В рассматриваемой явной схеме расщепления (9)–(14) основная трудность заключена в решении уравнения Пуассона (12) на каждом временном слое t_n. При записи схемы расщепления на разнесенной сетке это приводит к решению системы конечно-разностных алгебраических уравнений (19). Существует достаточно большое число методов, как точных, так и приближенных, решения этой системы [9, 10]. Рассмотрим метод последовательной верхней релаксации (ПВР), предварительно записав уравнение (19) в виде

$$p^n_{ij} = A^n_{ij} p^n_{i+1,j} + B^n_{ij} p^n_{i-1,j} + C^n_{ij} p^n_{i,j+1} + D^n_{ij} p^n_{i,j-1} + \Omega^n_{ij};$$

$$\Omega^n_{ij} = -\frac{1}{\tau}\left[\frac{2i-3}{(i-1{,}5)\Delta r^2} + \frac{2}{\Delta z^2}\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{(i-1{,}5)\Delta r}\left[(i-1)\tilde{u}_{i',j} - (i-2)\tilde{u}_{i'-1,j}\right] + \frac{1}{\Delta z}\left[\tilde{w}_{i,j'} - \tilde{w}_{i,j'-1}\right]\right\};$$

$$A^n_{ij} = \frac{i-1}{(i-1{,}5)\Delta r^2}\left[\frac{2i-3}{(i-1{,}5)\Delta r^2} + \frac{2}{\Delta z^2}\right]^{-1};$$

$$B^n_{ij} = \frac{i-2}{(i-1{,}5)\Delta r^2}\left[\frac{2i-3}{(i-1{,}5)\Delta r^2} + \frac{2}{\Delta z^2}\right]^{-1};$$

$$C^n_{ij} = D^n_{ij} = \frac{1}{\Delta z^2}\left[\frac{2i-3}{(i-1{,}5)\Delta r^2} + \frac{2}{\Delta z^2}\right]^{-1}.$$

Метод ПВР [10] определяется следующей итерационной схемой $\left(s = \overline{1; s^*}\right)$:

$$p^{n,s}_{ij} = \left(1 - q_p\right) p^{n,s-1}_{ij} + q_p \left\{A^n_{ij} p^{n,s-1}_{i+1,j} + B^n_{ij} p^{n,s}_{i-1,j} + C^n_{ij} p^{n,s-1}_{i,j+1} + D^n_{ij} p^{n,s}_{i,j-1} + \Omega^n_{ij}\right\},$$

где q_p — параметр релаксации, обусловливающий скорость сходимости итерационного процесса; s^* — номер остановки вычислений. Параметр s^* находят из условия

$$\max_{i,j}\left\|\tilde{p}_{ij}^{n,s^*}-\tilde{p}_{ij}^{n,s^*-1}\right\|\le\varepsilon,$$

где ε — заданная точность.

Полагая $q_p=1,$ метод ПВР превращается в метод Зейделя [10]. При реализации вычислений на ПЭВМ, учитывая их современные вычислительные возможности, для численного решения уравнения Пуассона (12) более простым в применении является метод простой итерации, дающий удовлетворительные решения при существенно большем числе итераций $\left(s=\overline{1;s^*}\right)$:

$$p_{ij}^{n,s}=p_{ij}^{n,s-1}+\omega_p\left\{A_{ij}^n p_{i+1,j}^{n,s-1}+B_{ij}^n p_{i-1,j}^{n,s-1}+C_{ij}^n p_{i,j+1}^{n,s-1}+D_{ij}^n p_{i,j-1}^{n,s-1}+\Omega_{ij}^n\right\},$$

где ω_p — параметр сходимости метода простой итерации.

Результаты численного моделирования. В рассматриваемой дискретно-распределенной модели камеры горения (см. рис. 1) имеются два связанных между собой колебательных контура. В зоне теплоподвода из-за отрицательного сопротивления и под действием

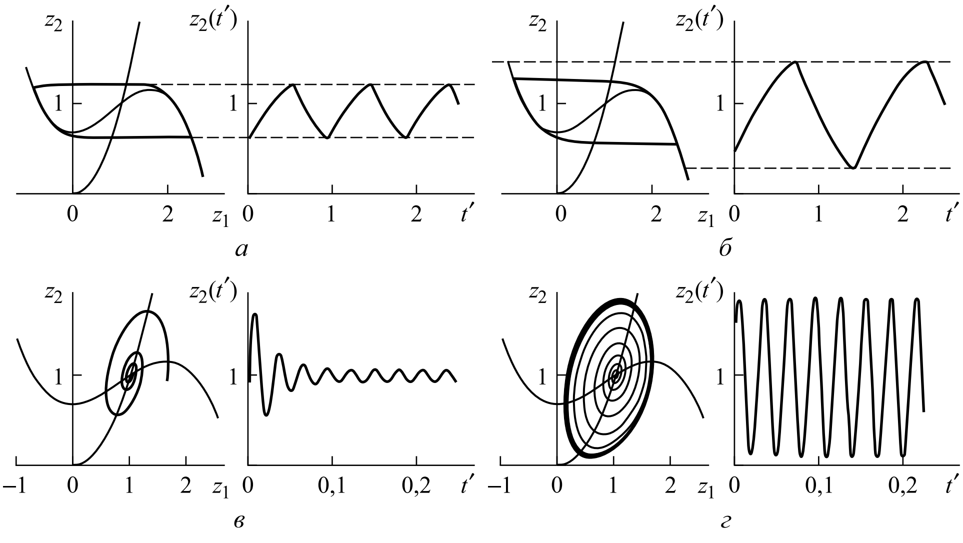


Рис. 3. Характер деформации предельных циклов и соответствующих им автоколебаний с ростом τ запаздывания сгорания топлива:

а — $\tau'=0$; *б* — $\tau'=0,25$ — релаксационные колебания; *в* — $\tau'=0$; *г* — $\tau'=0,002$ — колебания, близкие к гармоническим других механизмов неустойчивости, например запаздывания сгорания топлива, самовозбуждаются автоколебания, моделируемые сосредоточенной динамической системой. На рис. 3 приведены формы автоколебаний вибрационного горения и соответствующие им предельные циклы, самовозбуждающиеся в зоне теплоподвода (в колебательном контуре с сосредоточенными параметрами).

Через соответствующее граничное условие Дирихле нестационарности передаются в колебательный контур с распределенными параметрами (рис. 4), где динамика описывается уравнениями Навье — Стокса (3–5).

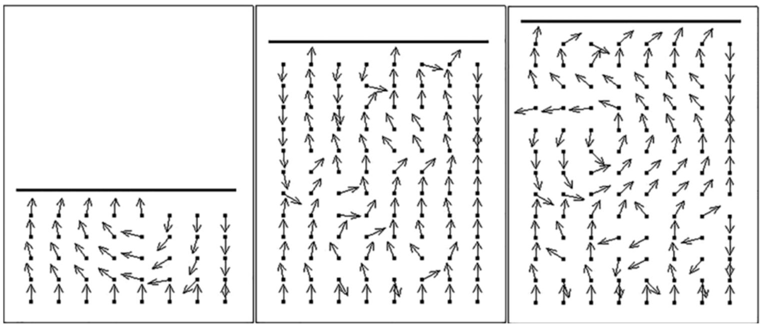


Рис. 4. Поле скоростей движения продуктов сгорания в распределенной части камеры горения на этапе ее заполнения

Заключение. Разработана квазитрехмерная дискретно-распределенная математическая модель, которая позволяет выполнить численные расчеты гидродинамических процессов, протекающих в камере горения регенеративного воздухонагревателя доменных печей. Численные эксперименты, проведенные на основе полученной математической модели, позволяют моделировать режим вибрационного горения в камере горения воздухонагревателя как динамической системе с распределенными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Расчет параметров автоколебаний в вертикальной камере горения воздухонагревателя доменной печи при неустойчивом горении. *Теплоэнергетика*, 2015, № 1, с. 59–64.

[2] Гоцуленко В.В. Математическое моделирование особенностей феномена Рийке. *Математическое моделирование*, 2004, т. 16, № 9, с. 23–28.

[3] *Басок Б.И., Гоцуленко В.В.* Термогидродинамическая неустойчивость потока теплоносителя. Киев, ТОВ ВД «КАЛИТА», 2015, 412 с.

[4] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А. Применение метода RKDG для численного решения уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 4, с. 75–91.

[5] *Марчук Г.И.* Методы расщепления. Москва, Наука, 1988, 264 с.

[6] *Самохвалов С.Е.* Теплофизические процессы в многофазных средах: теоретические основы компьютерного моделирования. Киев, Изд-во Института системных исследований. Мин. обр. Украины, 1994, 172 с.

[7] *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. Москва, Наука, 1984, 520 с.

[8] *Никитенко Н.И.* Сопряженные и обратные задачи тепломассопереноса. Киев, Наукова думка, 1988, 240 с.

[9] *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. Москва, Мир, 1980, 616 с.

[10] *Поттер Д. Вычислительные методы в физике*. Москва, Мир, 1975, 392 с.

Статья поступила в редакцию 10.10.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Математическое моделирование режима вибрационного горения в распределенной камере горения воздухонагревателя в доменной печи. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 4, с. 25–40.

Басок Борис Иванович — д-р техн. наук, проф., чл.-кор. НАН Украины, заведующий отделом теплофизических основ энергосберегающих технологий института технической теплофизики НАН Украины. e-mail: basok@ittf.kiev.ua

Гоцуленко Владимир Владимирович — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник отдела теплофизических основ энергосберегающих технологий Института технической теплофизики НАН Украины. e-mail: gosul@ukr.net

Mathematical modeling of vibrating combustion mode in a distributed combustion chamber of a blast furnace air heater

© B.I. Basok, V.V. Gotsulenko

Institute of Engineering Thermophysics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 03057, Ukraine, 03057

This work attempts the construction of a quasi-three-dimensional mathematical model which describes the vibrating combustion mode in a vertical combustion chamber of a regenerative air heater in a blast furnace, considering it as a distributed dynamic system.

Keywords: *self-oscillations, thermal resistance, pressure characteristic of heat supply, instability*

REFERENCES

[1] Basok B.I., Gotsulenko V.V. *Teploenergetika - Thermal Engineering*, 2015, vol. 62, то. 1, pp. 58–63.

[2] Gotsulenko V.V. *Matematicheskoe modelirovanie - Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 16, no. 9, 2004, pp. 23–28.

[3] Basok B.I., Gotsulenko V.V. *Termogidrodinamicheskaya neustoychivost potoka teplonositelya* [Thermohydrodynamic instability of coolant flow]. Kiev, TOV VD KALITA Publ., 2015, 412 p.

[4] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, no. 4(8), 2015, pp. 75–91.

[5] Marchuk G. I. *Metody rasshchepleniya* [Methods of splitting]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 264 p.

[6] Samokhvalov S.E. *Teplofizicheskiye protsessy v mnogofaznykh sredakh: teoreticheskiye osnovy kompyuternogo modelirovaniya* [Thermophysical processes in multiphase media: theoretical foundations of computer simulation]. Kiyev, Institut sistemnykh issledovaniy Publ., Min. obr. Ukraine, 1994, 172 p.

[7] Belotserkovskiy O.M. *Chislennoye modelirovaniye v mekhanike sploshnykh sred* [Numerical modeling in continuum mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 520 p.

[8] Nikitenko N.I. *Sopryazhennyye i obratnyye zadachi teplomassoperenosa* [Conjugate and inverse problems of heat and mass transfer]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1988, 240 p.

[9] Rouche P.J. *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa, 1972. [In Russ.: Rouche P.J. Vychislitelnaya gidrodinamik. Moscow, Nauka Publ., 1980, 616 p.].

[10] Potter D. *Computational Physics*. John Wiley, 1973. [In Russ.: Potter D. *Vychislitelnyye metody v fizike*. Moscow, Nauka, 1975, 392 p.].

Basok B.I., Dr. Sc. (Eng.), Professor, corresponding member of National Academy of Sciences of Ukraine, Head of Department of Thermophysical Bases of Energy-Saving Technologies, Institute of Engineering Thermal Physics of National Academy of Sciences of Ukraine. e-mail: basok@ittf.kiev.ua

Gotsulenko V.V., Dr. Sc. (Eng.), Senior Research Fellow, Department of Thermophysical Bases of Energy-Saving Technologies, Institute of Engineering Thermal Physics of National Academy of Sciences of Ukraine. e-mail: gosul@ukr.net