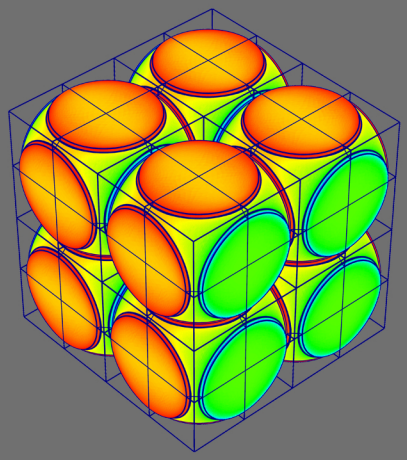
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е.
Моделирование напряжений в тонких композитных цилиндрических оболочках на основе асимптотической теории.
Математическое моделирование и численные методы, 2018, № 3, с. 114–132.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/175/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
12.11.2026 03:20:31

УДК 539.3

Моделирование напряжений в тонких композитных цилиндрических оболочках на основе асимптотической теории

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, А.Е. Пичугина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Разработанная авторами ранее общая асимптотическая теория тонких многослойных оболочек применяется для случая цилиндрических оболочек. Представлены соотношения в явной аналитической форме для всех шести компонент тензора напряжений в тонкой многослойной упругой цилиндрической оболочке, в виде зависимости от деформаций, искривлений срединной поверхности оболочки, а также их производных по продольным координатам. Полученные формулы позволяют рассчитывать все распределения компонент тензора напряжений по толщине в цилиндрической оболочке после того, как найдено решения двумерной задачи теории оболочек типа Кирхгофа-Лява. Приведен пример расчета напряжений в цилиндрической композитной оболочке при осесимметричном изгибе давлением. Для вычисления напряжений по этим формулам требуется лишь дифференцирование перемещений – прогиба и двух перемещений срединной поверхности оболочки, для которых получено аналитическое решение.

Ключевые слова: асимптотическая теория, многослойные цилиндрические оболочки, композиты, тензор напряжений, оболочки типа Кирхгофа-Лява.

Введение. Для расчета несущей способности конструкций из композиционных материалов необходимо достаточно точно вычислять распределение микронапряжений в компонентах композита, например, для слоистых конструкций – напряжения в каждом отдельном слое. Классические теории расчета тонких композитных оболочек типа Кирхгофа-Лява [1], Тимошенко [2] и их многочисленные модификации [3-9 и др.], основаны на определенных допущениях относительно характера распределения напряжений и перемещений по толщине конструкции, адекватность которых необходимо подтверждать для каждого класса задач. Например, классическое допущение о линейном характере распределения продольных перемещений по толщине и независимости поперечного перемещения от толщины, приводит к линейной зависимости напряжений межслойного сдвига от поперечной координаты. Вместе с тем эти же межслойные напряжений могут быть вычислены с помощью трехмерных уравнений теории упругости [3], при этом возникает квадратичная зависимость этих напряжений по толщине, что говорит о противоречивости сделанных допущений. В работах [10-20] разработан метод асимптотического

осреднения уравнений трехмерной теории упругости для тонких многослойных пластин и оболочек [16], который без каких-либо гипотез относительно распределения перемещений или напряжений по толщине, позволяет получить явное, математически обоснованное выражение для всех 6 компонент тензора напряжений. Целью настоящей работе является применение разработанной общей асимптотической теории оболочек для случая цилиндрических многослойных оболочек.

Постановка 3-х мерной задачи теории упругости для тонкой многослойной цилиндрической оболочки. Рассмотрим тонкую многослойную упругую оболочку, для которой выполняется соотношение $æ = h / R << 1$ где h – толщина оболочки, R – радиус срединной поверхности оболочки, L – ее длина, а $æ$ – малый параметр. Обозначим z, s, r цилиндрические размерные координаты, где $s = \varphi R$ – длина дуги, а φ – угол, и введем безразмерные цилиндрические координаты: $q_1 = z / R$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = r / R$ и локальную координату ξ по толщине оболочки: $\xi = (r - R) / h = (q_3 - 1) / æ$. Обозначим производные от произвольной функции $f(q_\alpha, \xi)$ по этим координатам как: $\partial f / \partial \xi = f_{/3}$ и $\partial f / \partial q_\beta = f_{,\beta}$. Для цилиндрической тонкой оболочки параметры Ламе H_α и их производные $H_{\alpha/3}$ и $H_{\alpha,\beta}$ имеют следующий вид [21]: $H_3 = 1$, $H_1 = 1$; $H_2 = 1$, $H_{\alpha/3} = æ H_{\alpha 3}$, $H_{13} = 0$, $H_{23} = 1$, $H_{\alpha,\beta} = 0$

С учетом сделанных допущений уравнения равновесия [16,21] для тонкой цилиндрической оболочки в координатах q_α, ξ могут быть записаны следующим образом

$$\begin{aligned} &\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13} + \frac{1}{æ}\sigma_{13/3} = 0 \\ &\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + 2\sigma_{23} + \frac{1}{æ}\sigma_{23/3} = 0 \\ &\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33} - \sigma_{22} + \frac{1}{æ}\sigma_{33/3} = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

где σ_{ij} - безразмерные компоненты тензора напряжений, отнесенные к характерному значению модуля упругости одного из слоев оболочки E_0. Все компоненты тензоров и векторов рассматриваются в базисе цилиндрической системы координат z, s, r.

Соотношения Коши между компонентами тензора малых деформаций ε_{ij} и безразмерными компонентами перемещений u_i, отнесенными к R, в координатах q_α, ξ имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2} + u_3, \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{æ} u_{3/3},$$
$$2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1}, \quad 2\varepsilon_{13} = \frac{1}{æ} u_{1/3} + u_{3,1}, \quad 2\varepsilon_{23} = \frac{1}{æ} u_{2/3} + u_{3,2} - u_2 \tag{2}$$

Слои оболочки предполагаются упругими, с цилиндрической моноклинной симметрией упругих свойств [22]. Тогда определяющие соотношения оболочки, связывающие деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$ имеют следующий вид в системе координат q_α, ξ:

$$\sigma_{IJ} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL} + C_{IJ33}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{I3} = 2C_{I3K3}\varepsilon_{K3}, \quad \sigma_{33} = C_{33KL}\varepsilon_{KL} + C_{3333}\varepsilon_{33} \tag{3}$$

где C_{ijkl} - модули упругости слоев оболочки. Здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами $I, J, K, L, M, \alpha, \beta$ принимают значения 1,2, причём $\alpha \neq \beta$, а индексы i, j, k, l - значения 1,2,3.

На внешней и внутренней поверхностях оболочки (их уравнения $\Sigma_{3\pm} = \{\xi = \pm 0{,}5\}$) полагаем заданным давление $\tilde{p}_\pm$, на торцевой поверхности Σ_T оболочки задано перемещение u_{ei}, а на границе Σ_S раздела слоев оболочки заданы условия идеального контакта слоев оболочки

$$\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} = -\tilde{p}_\pm \delta_{i3} \qquad \Sigma_T : u_i = u_{ei} \qquad \Sigma_S : [\sigma_{i3}] = 0 \qquad [u_i] = 0 \tag{4}$$

где $[u_i]$ - скачок функций.

Следуя [10,12,16,17], рассмотрим случай малой величины давления на внешних поверхностях оболочки

$$\tilde{p}_\pm = -æ^3 p_\pm \tag{5}$$

где $p_\pm$ - конечные величины безразмерного давления: $p_\pm = O(1)$.

Асимптотические решения 3-х мерной задачи для цилиндрической оболочки. Согласно асимптотической теории тонких оболочек [16,17] решение 3-х мерных уравнений теории упругости (1) - (5) в цилиндрических координатах, записанных относительно компонент вектора перемещений u_k ищется в виде асимптотических разложений по параметру $æ$ в виде функций, зависящих от координат q_α, ξ

$$u_k = u_k^{(0)}(q_\alpha) + æ u_k^{(1)}(q_\alpha, \xi) + æ^2 u_k^{(2)}(q_\alpha, \xi) + æ^3 u_k^{(3)}(q_\alpha, \xi) + \ldots \tag{6}$$

В виде аналогичных асимптотических рядов ищутся деформации и напряжения в оболочке

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + æ\varepsilon_{ij}^{(1)} + æ^2\varepsilon_{ij}^{(2)} + ..., \ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + æ\sigma_{ij}^{(1)} + æ^2\sigma_{ij}^{(2)} + ... \qquad (7)$$

Подставляя ряды (6) и (7) в кинематические соотношения (2), после приведения подобных членов, получаем выражения для деформаций срединной поверхности $\varepsilon_{IJ}^{(0)}$ и искривлений цилиндрической оболочки имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11}^{(0)} = u_{1,1}^{(0)}, \quad \varepsilon_{22}^{(0)} = u_{2,2}^{(0)} + u_3^{(0)}, \quad 2\varepsilon_{12}^{(0)} = u_{1,2}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)}, \\ &-\eta_{11} = u_{3,11}^{(0)}, \quad -\eta_{22} = u_{3,22}^{(0)} + u_{2,2}^{(0)}, \quad -\eta_{12} = u_{3,12}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Эти выражения совпадают с формулами теории цилиндрических оболочек Кирхгофа-Лява. Для искривлений 2-го приближения $\eta_{IJ}^{(2)}$ [17] получаем следующие формулы:

$$\eta_{11}^{(2)} = 0, \quad -\eta_{22}^{(2)} = u_{3,22}^{(0)} + u_{2,2}^{(0)}, \quad -\eta_{12}^{(2)} = \frac{1}{2}(u_{3,21}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)}). \qquad (9)$$

Для вычисления перемещений $u_I^{(0)}, u_3^{(0)}$ срединной поверхности цилиндрической оболочки имеем систему двумерных уравнений оболочек Кирхгофа-Лава [1,3,17,21], которые в данном случае принимают вид

$$\begin{aligned} &T_{IJ,J} = 0, \\ &M_{IJ,J} - Q_I = 0, \\ &Q_{I,I} - T_{22} - \Delta\overline{p} = 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

где усилия T_{IJ}, моменты M_{IJ} и перерезывающие сил Q_I в оболочке, входящие в систему (10) определяются с помощью асимптотических разложений:

$$\begin{aligned} &T_{IJ} = <\sigma_{IJ}^{(0)}> + æ<\sigma_{IJ}^{(1)}> + \ldots \\ &M_{IJ} = æ<\xi\sigma_{IJ}^{(0)}> + æ^2<\xi\sigma_{IJ}^{(1)}> + \ldots \\ &Q_I = æ<\sigma_{I3}^{(1)}> + æ^2<\sigma_{I3}^{(2)}> + \ldots \end{aligned} \qquad (11)$$

Определяющие соотношения для цилиндрической оболочки с цилиндрической моноклинной симметрией упругих свойств связывают усилия, моменты и перерезывающие силы с деформациями и искривлениями срединной поверхности $\varepsilon_{KL}^{(0)}, \eta_{KL}$ [17]:

$$T_{IJ} = \overline{C}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + B_{IJKL}\eta_{KL}, \quad M_{IJ} = B_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + D_{IJKL}\eta_{KL}. \qquad (12)$$

Здесь обозначены мембранные жесткости оболочки $\overline{C}_{IJKL}$, смешанные жесткости B_{IJKL} и изгибные жесткости D_{IJKL} цилиндрической оболочки

$$\overline{C}_{IJKL} = < C^{(0)}_{IJKL} >, \quad D_{IJKL} = æ^2 < \xi^2 C^{(0)}_{IJKL} >, \quad B_{IJKL} = æ < \xi C^{(0)}_{IJKL} >. \qquad (13)$$

Здесь также обозначен тензор приведенных модулей упругости

$$C^{(0)}_{IJKL} = C_{IJKL} - C_{IJ33}Z_{3KL}, \quad Z_{3KL} = C^{-1}_{3333}C_{33KL}. \qquad (14)$$

Напряжения в цилиндрической многослойной оболочке. После решения двумерной системы уравнений (8),(10),(12) находим 3 компоненты перемещений $u^{(0)}_I, u^{(0)}_3$, а также деформации $\varepsilon^{(0)}_{KL}$ и искривления η_{KL}. С их помощью, без дополнительного решения какой либо задачи, могут быть вычислены все 6 компонент тензора напряжений: продольные σ_{IJ}, сдвиговые σ_{I3} и поперечные σ_{33} в слоях оболочки с точностью до первого порядка, второго и третьего порядков, соответственно [17], по явным аналитическим формулам

$$\begin{gathered}
\sigma_{IJ} = \hat{C}^{(1)}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + \hat{C}^{(0)}_{IJKL}\xi\eta_{KL} \\
-\sigma_{\alpha 3} = \hat{C}^{(2)}_{\alpha 3KL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + \hat{R}^{(2)}_{\alpha 3KLJ}\varepsilon^{(0)}_{KL,J} + \hat{N}_{\alpha 3KL}\eta_{KL} + \hat{V}_{\alpha 3KLJ}\eta_{KL,J} \\
\sigma_{33} = \hat{C}^{(3)}_{33KL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + \hat{R}^{(3)}_{33KLJ}\varepsilon^{(0)}_{KL,J} + \hat{E}^{(3)}_{33KLJM}\varepsilon^{(0)}_{KL,JM} + \\
+\hat{N}^{(3)}_{33KL}\eta_{KL} + \hat{V}^{(3)}_{33KLM}\eta_{KL,M} + \hat{W}^{(3)}_{KL}\eta^{(2)}_{KL} - (p_{\pm} + \Delta p(\xi + 0.5))
\end{gathered} \qquad (15)$$

В формулах (15) обозначены тензоры, зависящие только от приведенного тензора модулей упругости слоев оболочки $C^{(0)}_{IJKL}$ и толщин слоев оболочки

$$\begin{gathered}
\hat{C}^{(0)}_{IJKL} = æ C^{(0)}_{IJKL}; \quad \hat{C}^{(1)}_{IJKL} = C^{(0)}_{IJKL} + æ C^{(1)}_{IJKL}; \quad \hat{C}^{(2)}_{a3KL} = æ C^{(1)}_{a3KL} + æ^2 C^{(2)}_{a3KL}; \\
\hat{C}^{(3)}_{33KL} = æ\ C^{(1)}_{33KL} + æ^2 C^{(2)}_{33KL} + æ^3 C^{(3)}_{33KL}; \quad \hat{N}_{\alpha 3KL} = æ^2 N_{\alpha 3KL}; \\
\hat{R}^{(2)}_{\alpha 3KLJ} = æ R^{(1)}_{\alpha 3KLJ} + æ^2 R^{(2)}_{\alpha 3KLJ}; \quad \hat{R}^{(3)}_{33KLJ} = æ^2 R^{(2)}_{33KLJ} + æ^3 R^{(3)}_{33KLJ}; \\
\hat{V}_{\alpha 3KLJ} = æ^2 V_{\alpha 3KLJ}; \quad \hat{V}^{(3)}_{33KLM} = æ^3 V^{(3)}_{33KLM}; \quad \hat{W}^{(3)}_{KL} = æ^3 W^{(3)}_{KL}; \\
\hat{E}^{(3)}_{33KLJM} = æ^2 E^{(2)}_{33KLJM} + æ^3 E^{(3)}_{33KLJ}; \quad \hat{N}^{(3)}_{33KL} = æ^2 N^{(2)}_{33KL} + æ^3 N^{(3)}_{33KL}.
\end{gathered} \qquad (16)$$

Тензоры, участвующие в этих формулах, определены в [16], для цилиндрической оболочки они принимают вид

$$
\begin{gathered}
Z_{3KL}=C_{3333}^{-1}C_{33KL},\quad U_{3KL}^{(1)}=-<Z_{3KL}>_{\xi},\\
<Z_{iKL}>_{\xi}=\int_{-0.5}^{\xi}Z_{iKL}d\xi-<\int_{-0.5}^{\xi}Z_{iKL}d\xi>,\\
\int_{-1/2}^{\xi}\left(f(q_I,\xi)-<f(q_I,\xi)>\right)d\xi,\\
\Phi_{11KL}=0,\quad \Phi_{22KL}=U_{3KL}/R,\quad \Phi_{12KL}=0,\\
C_{\alpha 3KL}^{(1)}=0,\quad C_{33KL}^{(1)}=\{C_{22KL}^{(0)}\}_{\xi},\\
R_{1KLJ}^{(1)}=\{C_{11KL}^{(0)}\}_{\xi}\delta_{1J}+\{C_{12KL}^{(0)}\}_{\xi}\delta_{2J},\\
R_{2KLJ}^{(1)}=\{C_{22KL}^{(0)}\}_{\xi}\delta_{1J}+\{C_{12KL}^{(0)}\}_{\xi}\delta_{2J},\\
U_{3KL}^{(2)}=-<Z_{3KL}\Phi_{KLIJ}>_{\xi}+<C_{3333}^{-1}C_{33KL}^{(1)}>_{\xi},\\
U_{\alpha KL}^{(2)}=<C_{\alpha 3I3}^{-1}C_{I3KL}^{(1)}>_{\xi}=0,\\
J_{3KL}=<Z_{3KL}\xi>_{\xi},\quad K_{\alpha KLJ}=<C_{\alpha 3I3}^{-1}R_{IKLJ}^{(1)}>_{\xi}+O_{\alpha}<U_{3KL}^{(1)}>_{\xi}\delta_{\alpha J}.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Для величин, входящих в этих выражения имеют место следующие формулы:

$$
\begin{gathered}
C_{13KL}^{(2)}=-\{C_{13KL}^{(1)}\}_{\xi},\quad C_{23KL}^{(2)}=-2\{C_{23KL}^{(1)}\}_{\xi},\\
C_{IJKL}^{(1)}=Z_{3IJ}C_{33KL}^{(0)}+C_{IJMN}^{(0)}\Phi_{MNKL},\\
R_{13KLJ}^{(2)}=\{C_{11KL}^{(1)}\xi\}_{\xi}\delta_{1J}+\{C_{12KL}^{(1)}\xi\}_{\xi}\delta_{2J}-\{R_{1KLJ}^{(1)}\}_{\xi},\\
R_{23KLJ}^{(2)}=\{C_{22KL}^{(1)}\xi\}_{\xi}\delta_{2J}+\{C_{12KL}^{(1)}\xi\}_{\xi}\delta_{1J}-2\{R_{2KLJ}^{(1)}\}_{\xi},\quad N_{\alpha 3KL}=0,\\
V_{13KLJ}=\{C_{11KL}^{(0)}\xi\}_{\xi}\delta_{1J}+\{C_{12KL}^{(0)}\xi\}_{\xi}\delta_{2J},\\
V_{23KLJ}=\{C_{22KL}^{(0)}\xi\}_{\xi}\delta_{2J}+\{C_{12KL}^{(0)}\xi\}_{\xi}\delta_{1J}\\
C_{33KL}^{(2)}=\{C_{22KL}^{(1)}\}_{\xi}-\{C_{33KL}^{(1)}\}_{\xi},\quad R_{33KLJ}^{(2)}=\{C_{13KL}^{(1)}\}_{\xi}\delta_{1J}+\{C_{23KL}^{(1)}\}_{\xi}\delta_{2J}=0,\\
E_{33KLJM}^{(2)}=\{R_{1KLJ}^{(1)}\}_{\xi}+\{R_{2KLJ}^{(1)}\}_{\xi},\quad N_{33KL}^{(2)}=\{C_{11KL}^{(0)}\xi\}_{\xi}+\{C_{22KL}^{(0)}\xi\}_{\xi},\\
L_{11KL}^{(2)}=0,\quad L_{22KL}^{(2)}=J_{3KL}^{(2)},\quad L_{12KL}^{(2)}=0,\\
\Phi_{11KL}^{(2)}=0,\quad \Phi_{22KL}^{(2)}=-U_{3KL}^{(2)},\quad B_{IJKLJ}^{(2)}=0,\\
K_{11KLJM}^{(2)}=K_{1KLJ}\delta_{1M},\quad K_{11KLJM}^{(2)}=K_{2KLJ}\delta_{2M},\\
2K_{12KLJM}^{(2)}=K_{1KLJ}\delta_{2M}+K_{2KLJ}\delta_{1M},
\end{gathered}
\tag{18}
$$

$$C^{(2)}_{IJKL} = C^{(0)}_{IJSP}\Phi^{(2)}_{SPKL} - Z_{3IJ}C^{(2)}_{33KL},$$
$$R^{(2)}_{IJKLM} = C^{(0)}_{IJSP}B^{(2)}_{SPKLM} - Z_{3IJ}R^{(2)}_{3KLM},$$
$$E^{(2)}_{IJKLMN} = C^{(0)}_{IJSP}K^{(2)}_{SPKLMN} - Z_{3IJ}E^{(2)}_{33KLMN},$$
$$N^{(2)}_{IJKL} = C^{(0)}_{IJSP}L^{(2)}_{SPKL} - Z_{3IJ}N^{(2)}_{33KL}, \quad V^{(3)}_{33KLM} = 0,$$
$$C^{(3)}_{33KL} = -\{C^{(2)}_{22KL}\}_{\xi} - \{C^{(2)}_{33KL}\}_{\xi}, \quad R^{(3)}_{33KLM} = -\{R^{(2)}_{22KLM}\}_{\xi} - \{R^{(2)}_{33KLM}\}_{\xi},$$
$$E^{(3)}_{33KLJM} = -\{E^{(2)}_{22KLJM}\}_{\xi} - \{E^{(2)}_{33KLJM}\}_{\xi},$$
$$N^{(3)}_{33KL} = -\{N^{(2)}_{22KL}\}_{\xi} - \{N^{(2)}_{33KL}\}_{\xi}, \quad V^{(3)}_{33KLM} = 0, \quad W^{(3)}_{KL} = \{<\xi>_{\xi} C^{(0)}_{22KL}\}_{\xi}.$$

Задача об осесимметричном изгибе цилиндрической оболочки

Рассмотрим осесимметричную цилиндрическую оболочку, нагруженную равномерным внутренним давлением, левый торец которой жестко заделан, а правый имеет возможность свободного перемещения в направлении оси оболочки. В этом случае имеем задачу об осесимметричном изгибе, в которой отличен от нуля только прогиб $u^{(0)}_3$, зависящий от осевой координаты q_1:

$$u^{(0)}_3 = u^{(0)}_3(q_1), \qquad u^{(0)}_1 = u^{(0)}_1(q_1), \qquad u^{(0)}_2 = 0 \tag{19}$$

Граничные условия в этой задаче имеют вид

$$u^{(0)}_3(0) = u^{(0)}_3(1) = 0, \quad u^{(0)}_{3,1}(0) = u^{(0)}_{3,1}(1) = 0,$$
$$u^{(0)}_1(0) = 0, \quad T_{11}(1) = 0. \tag{20}$$

Кинематические соотношения (8) в данной задаче принимают вид

$$\varepsilon^{(0)}_{11} = u^{(0)}_{1,1}, \qquad \varepsilon^{(0)}_{22} = u^{(0)}_3, \qquad 2\varepsilon^{(0)}_{12} = 0,$$
$$\eta_{11} = -u^{(0)}_{3,11}, \qquad \eta_{22} = 0, \qquad \eta_{12} = 0. \tag{21}$$

Тождественно ненулевые определяющие соотношения (12) имеют вид

$$T_{11} = \overline{C}_{1111}\varepsilon^{(0)}_{11} + \overline{C}_{1122}\varepsilon^{(0)}_{22} + B_{1111}\eta_{11},$$
$$T_{22} = \overline{C}_{2211}\varepsilon^{(0)}_{11} + \overline{C}_{2222}\varepsilon^{(0)}_{22} + B_{2211}\eta_{11}, \tag{22}$$
$$M_{11} = \overline{B}_{1111}\varepsilon^{(0)}_{11} + \overline{B}_{1122}\varepsilon^{(0)}_{22} + D_{1111}\eta_{11}.$$

Ненулевые уравнения равновесия (10) записываются следующим образом:

$$T_{11,1} = 0, \qquad M_{11,1} - Q_1 = 0, \qquad Q_{1,1} - T_{22} - \Delta\bar{p} = 0 \tag{23}$$

Из этих уравнений равновесия получаем:

$$M_{11,11} - T_{22} - \Delta\bar{p} = 0, \quad T_{11} = const = T_1^0, \tag{24}$$

где T_1^0 - константа интегрирования, которая с учетом граничного условия (20) $T_1^0 = 0$. Подставляя (22) во второе уравнение (24), выразим деформацию $\varepsilon_{11}^{(0)}$

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = -\frac{1}{\bar{C}_{1111}}(\bar{C}_{1122}\varepsilon_{22}^{(0)} + B_{1111}\eta_{11}) \tag{25}$$

И подставим ее во второе и третье уравнение системы (21)

$$T_{22} = C_{22}^{(0)}\varepsilon_{22}^{(0)} + B_{12}^{(0)}\eta_{11}, \quad M_{11} = B_{12}^{(0)}\varepsilon_{22}^{(0)} + D_{11}^{(0)}\eta_{11}, \tag{26}$$

где обозначены

$$C_{22}^{(0)} = \bar{C}_{2222} - \frac{\bar{C}_{1122}^2}{\bar{C}_{1111}}, \quad B_{12}^{(0)} = B_{1122} - \frac{B_{1111}\bar{C}_{1122}}{\bar{C}_{1111}}.$$

Подставим (26) в (24) с учетом (21), получим уравнение 4-го порядка относительно прогиба

$$u_3^{(0)IV} - 2k_1^2 u_3^{(0)II} + k_2^2 u_3^{(0)} + k_p = 0, \tag{27}$$

где $k_1^2 = \frac{B_{12}^{(0)}}{D_{11}^{(0)}}, \quad k_2^2 = \frac{C_{22}^{(0)}}{D_{11}^{(0)}}, \quad k_p = \frac{\Delta p}{D_{11}^{(0)}}.$

Общее решение уравнения (27) таково

$$\begin{aligned} u_3^{(0)} = w_0 + C_1 e^{-rq_1}\cos\omega q_1 + C_2 e^{-rq_1}\sin\omega q_1 + \\ + C_3 e^{rq_1}\cos\omega q_1 + C_4 e^{rq_1}\sin\omega q_1, \end{aligned} \tag{28}$$

где $w_0 = \frac{\Delta p}{C_{22}^{(0)}}$ – частное решение, если $\Delta p = const$, C_m – произвольные константы, а $r = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{2}$, $\omega = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{2}$.

Используя граничные условия (20), находим константы C_m :

$$C_1 = -\frac{w_0(\mathrm{e}^{Lr}\omega - \omega Cos[L\omega] + rSin[L\omega])}{2(rSin[L\omega] + \omega Sh[Lr])},$$

$$C_2 = \frac{w_0(-\mathrm{e}^{Lr}r + rCos[L\omega] + \omega Sin[L\omega])}{2(rSin[L\omega] + \omega Sh[Lr])},$$

$$C_3 = \frac{w_0(\omega - \mathrm{e}^{Lr}(\omega Cos[L\omega] + rSin[L\omega]))}{(-1+\mathrm{e}^{2Lr})\omega + 2\mathrm{e}^{Lr}rSin[L\omega]},$$

$$C_4 = \frac{-rw_0 + \mathrm{e}^{Lr}w_0(rCos[L\omega] - \omega Sin[L\omega])}{(-1+\mathrm{e}^{2Lr})\omega + 2\mathrm{e}^{Lr}rSin[L\omega]}.$$

Получим явные выражения для продольных σ_{IJ}, сдвиговых σ_{I3} и поперечной σ_{33} компонент тензора напряжений через деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ и искривления нулевого приближения η_{KL} оболочки, подставив в (15) ненулевые компоненты деформаций и искривлений для задачи об осесимметричном изгибе оболочки:

$$\begin{cases} \sigma_{IJ} = \hat{C}^{(1)}_{IJ\,22}u_3^{(0)} - \hat{C}^{(0)}_{IJ11}\xi u_{3,11}^{(0)} \\ -\sigma_{\alpha 3} = \hat{C}^{(2)}_{\alpha 322}u_3^{(0)} + \hat{R}^{(2)}_{\alpha 3221}u_{3,1}^{(0)} - \hat{N}_{\alpha 311}u_{3,11}^{(0)} - \hat{V}_{\alpha 3111}u_{3,111}^{(0)} \\ \sigma_{33} = \hat{C}^{(3)}_{3322}u_3^{(0)} + \hat{R}^{(3)}_{33221}u_{3,1}^{(0)} + \hat{E}^{(3)}_{332211}u_{3,11}^{(0)} - \\ -\hat{N}^{(3)}_{3311}u_{3,11}^{(0)} - \hat{V}^{(3)}_{33111}u_{3,111}^{(0)} - (p_{\pm} + \Delta p(\xi + 0.5)) \end{cases} \qquad (29)$$

В системе (29) участвует функция прогиба $u_3^{(0)}$, а также ее производные $u_{3,11}^{(0)}$ и $u_{3,111}^{(0)}$

Результаты численного моделирования цилиндрической оболочки из композиционного материала. Рассмотрим случай, когда слои оболочки образованы намоткой однонаправленного материала под некоторым углом ϕ_α к оси $\mathrm{O}q_1$, где $\alpha \in \{1...N\}$ - номер слоя. Тогда тензор модулей упругости в каждом слое вычисляется следующим образом:

$$C_{ijkl}(\xi) = C^{'}_{mnpq}Q^{\alpha}{}_{im}Q^{\alpha}{}_{jn}Q^{\alpha}{}_{kp}Q^{\alpha}{}_{\ell q}, \qquad \xi \in V_{\xi\alpha}\,, \qquad (30)$$

здесь $Q^{\alpha}{}_{im}$ – элементы матрицы поворота слоя с номером α на угол ϕ_α, а $C^{'}_{mnpq}$ – компоненты тензора модулей упругости однонаправленного композита в собственной системе координат, связанной с направлением армирующих волокон [18].

При проведении численных расчетов были использованы следующие исходные данные: $h = 2 \cdot 10^{-2}$ *м*, $R = 1$ *м*, *N=4*, толщины слоев были одинаковыми. Оболочка была нагружена внутренним давлением, которое было равным $\tilde{p}_- = 10^{-4}$ *ГПа*, $\tilde{p}_+ = 0$. Длина *L* оболочки варьировалась таким образом, чтобы соотношение L / R менялось в диапазоне: от 0,1 до 5. Углы ориентации волокон в слоях ϕ_α также варьировались: базовым для расчетов был выбран пакет слоев с системой углов $[\phi_1 / \phi_2 / \phi_3 / \phi_4] = [0 / 90^0 / 90^0 / 0]$. Рассматривались также пакеты со следующими системами ориентации углов в слоях: $[90^0 / 30^0 / 30^0 / 90^0]$ и $[90^0 / 45^0 / 45^0 / 90^0]$.

На рис. 1 – 5 показаны результаты расчетов перемещений $u_3^{(0)}$, окружного усилия T_{22}, перерезывающей силы Q_1 и момента M_{11} в зависимости от продольной координаты q_1 для разных значений параметра *L/R*. Для относительно коротких оболочек при *L/R<0.*1 распределение всех функций по координате q_1 существенно неравномерно, поскольку решение задачи является «существенно моментным». Максимумы прогиба $u_3^{(0)}$ и окружных усилий T_{22} располагаются по средине оболочки, максимумы момента M_{11} находятся на некотором удалении от торцов оболочки, максимум же силы Q_1 приходится на торцы оболочки.

При увеличении значений параметра *L/R* состояние оболочки становится безмоментным в для основной части оболочки: перемещение $u_3^{(0)}$ и усилие T_{22} для безмоментной области становятся практически равномерными, а момент M_{11} и перерезывающая сила Q_1 в этой области равны нулю. Вблизи торцов оболочки состояние остается моментным: в этой области момент и перерезывающая сила имеют максимумы, а прогиб $u_3^{(0)}$ и усилие T_{22} быстро убывают до нулевых значений.

Распределения продольной (изгибной) $\sigma_{11}(L / 2R, \xi)$ и окружной $\sigma_{22}(L / 2R, \xi)$ компонент тензора напряжений по толщине оболочки для различных пакетов слоев с ориентацией углов $[0 / 90^0 / 90^0 / 0]$, $[90^0 / 30^0 / 60^0 / 45^0]$, $[90^0 / 30^0 / 30^0 / 90^0]$ и $[90^0 / 45^0 / 45^0 / 90^0]$ показаны на рис. 5 – 9. Значения продольных и окружных напряжений приведены для срединной части оболочки (значения координаты $q_1 = L/2R$). Значение параметра *L/R* было выбрано равным 1.

Изгибные напряжения $\sigma_{11}(L / 2R, \xi)$ являются кусочно-постоян-

ными, в симметрично-расположенных слоях (с углами 90° и 0° соответственно) эти напряжения также являются симметричными относительно плоскости $\xi = 0$. Максимальные изгибные напряжения реализуются в слоях с наибольшей жесткостью (значением модуля упругости в направлении q_1) - для пакета $[0/90^0/90^0/0]$ такими слоями являются слои 1 и 4.

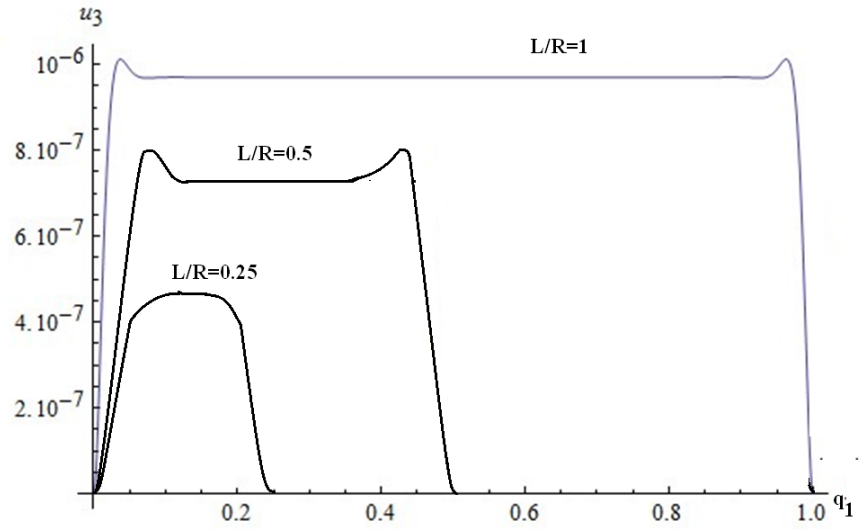


Рис.1. Зависимости поперечных перемещений $u_3^{(0)}$ (м) от продольной координаты q_1 для разных значений параметра *L/R* оболочки

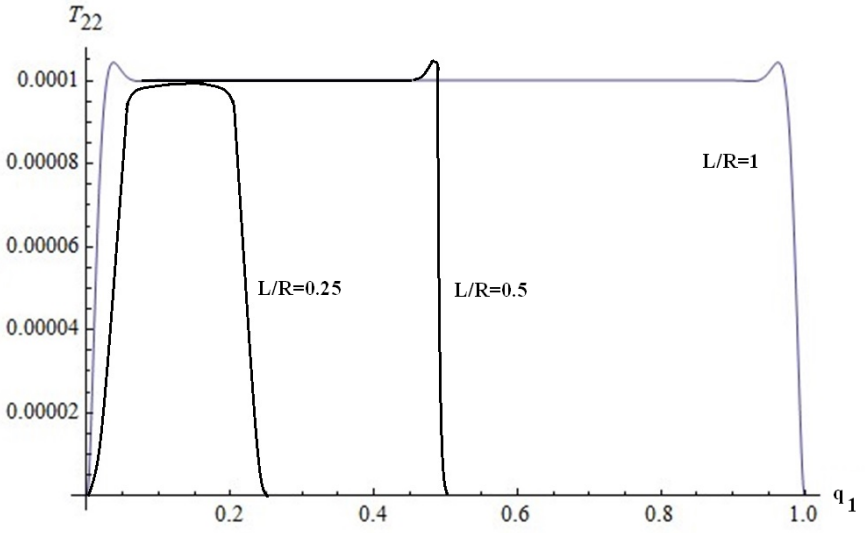


Рисунок 2. Зависимости окружных усилий *T_{22} (ГПа)* от продольной координаты q_1 для разных значений параметра *L/R* оболочки

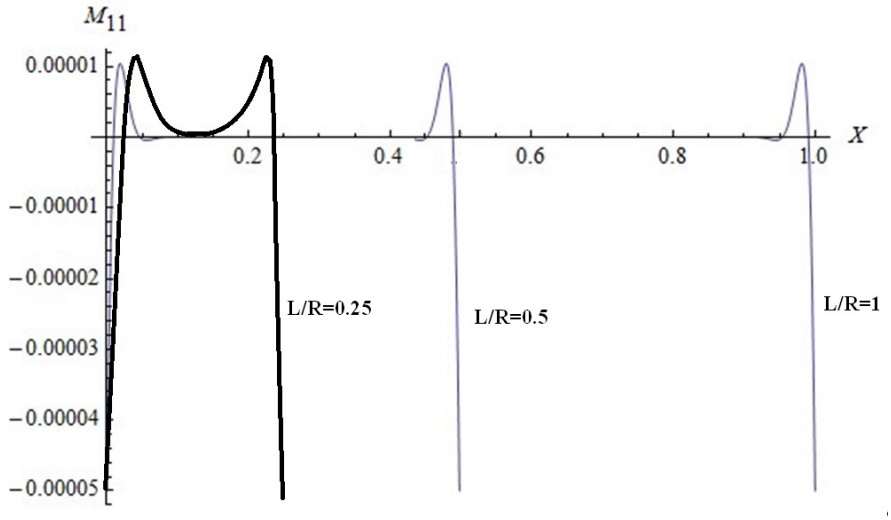


Рис.3. Зависимости изгибающего момента *M_{11} (ГПа*м)* от продольной координаты q_1 для разных значений параметра *L/R* оболочки

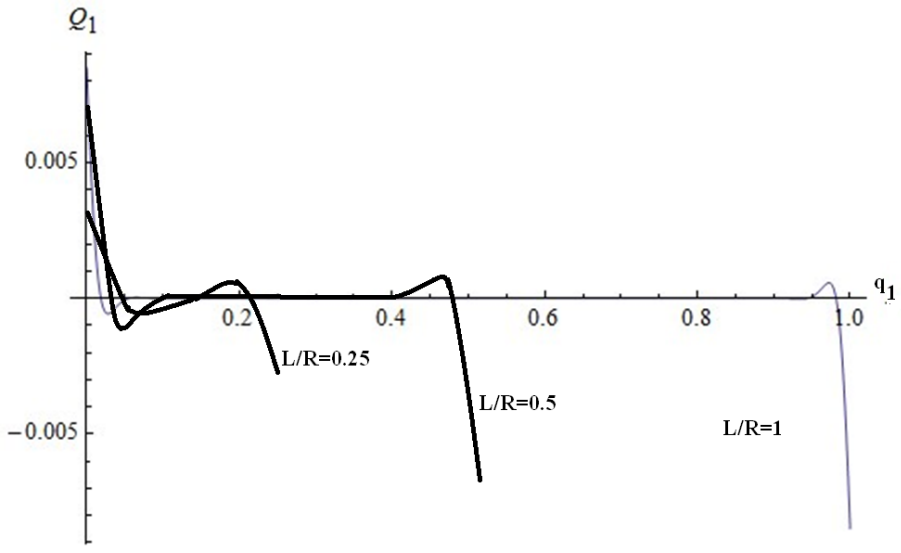


Рис. 4. Зависимости перерезывающей силы *Q_1 (ГПа)* от продольной координаты q_1 для разных значений параметра **L/R** оболочки

Окружные напряжения $\sigma_{22}(L/2R, \xi)$ также являются кусочно –постоянными. Максимальные значения окружных напряжений тоже реализуются в слоях с наибольшей жесткостью (значением модуля упругости в окружном направлении q_2) - для всех рассмотренных пакетов такими слоями являются слои с углом намотки волокон 90°.

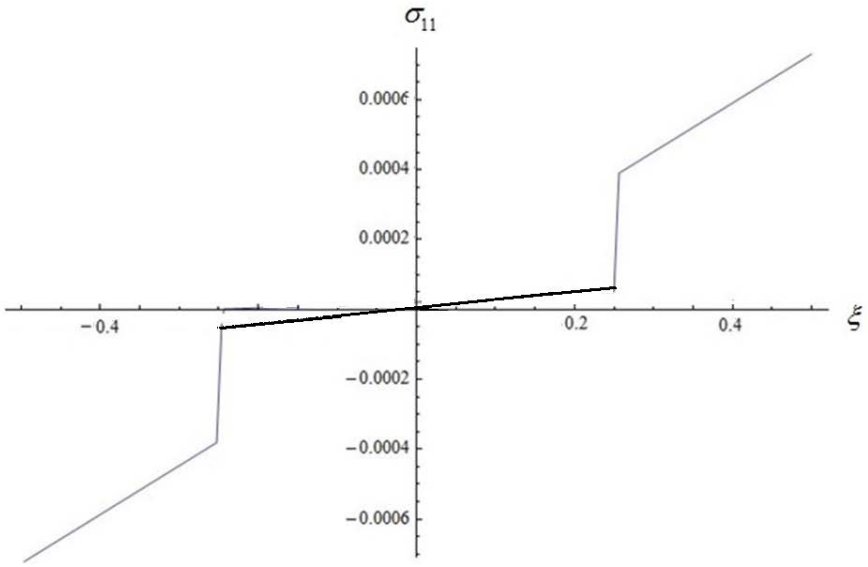


Рис. 5. Распределение изгибающего напряжения $\sigma_{11}(L/2R,\xi)$ (ГПа) по толщине оболочки для пакета слоев с ориентацией углов $[0/90^0/90^0/0]$

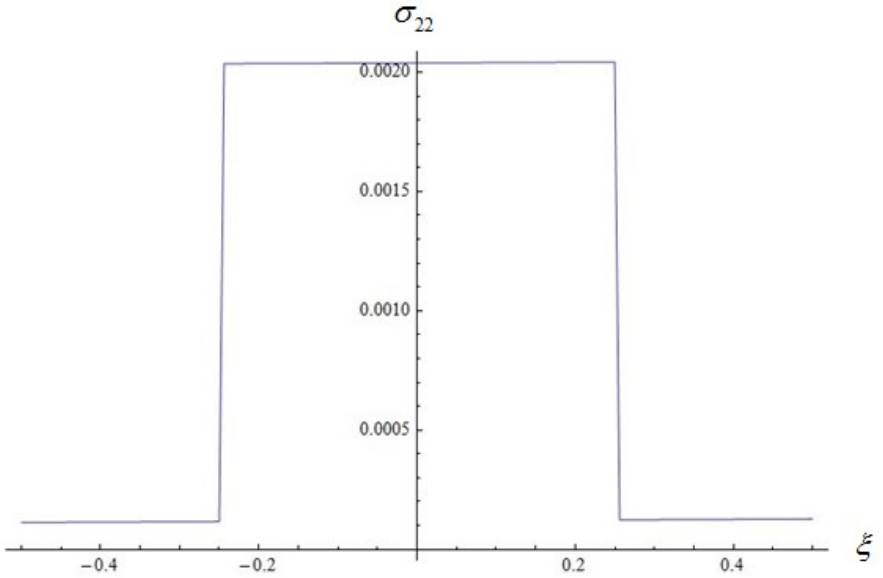


Рис. 6. Распределение окружного напряжения $\sigma_{22}(L/2R,\xi)$ (ГПа) по толщине оболочки для пакета слоев с ориентацией углов $[0/90^0/90^0/0]$

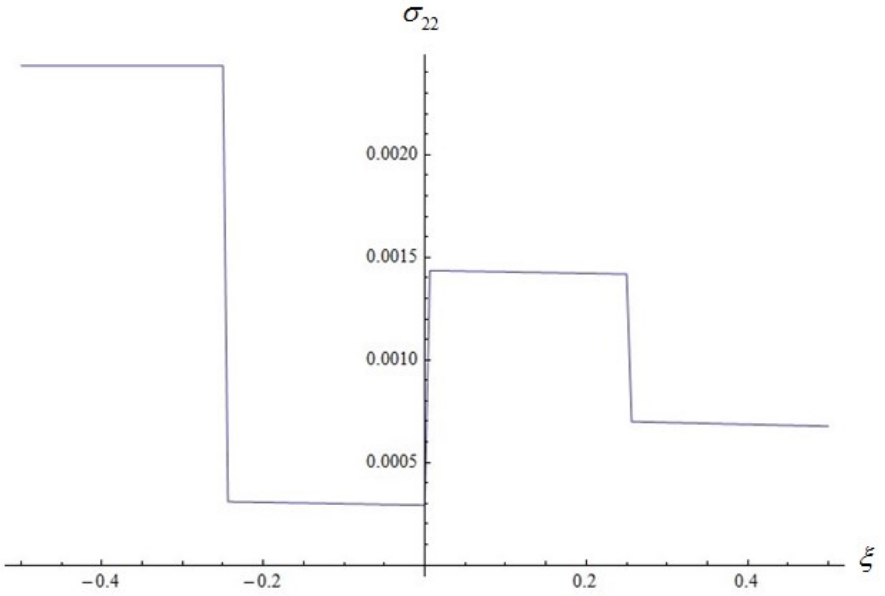


Рис. 7. Распределение окружного напряжения $\sigma_{22}(L/2R,\xi)$ (ГПа) по толщине оболочки для пакета слоев с ориентацией углов $[90^0/30^0/60^0/45^0]$

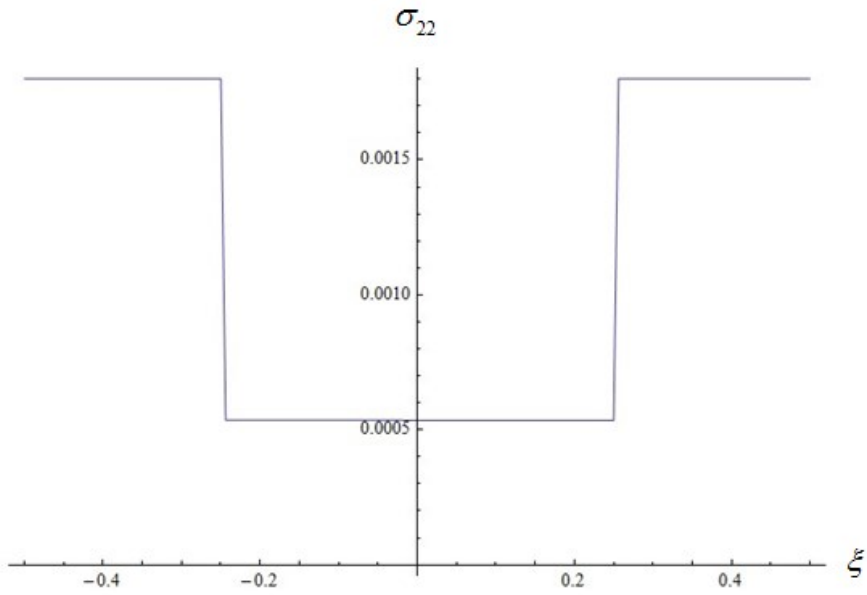


Рис. 8. Распределение окружного напряжения $\sigma_{22}(L/2R,\xi)$ (ГПа) по толщине оболочки для пакета слоев с ориентацией углов $[90^0/45^0/45^0/90^0]$

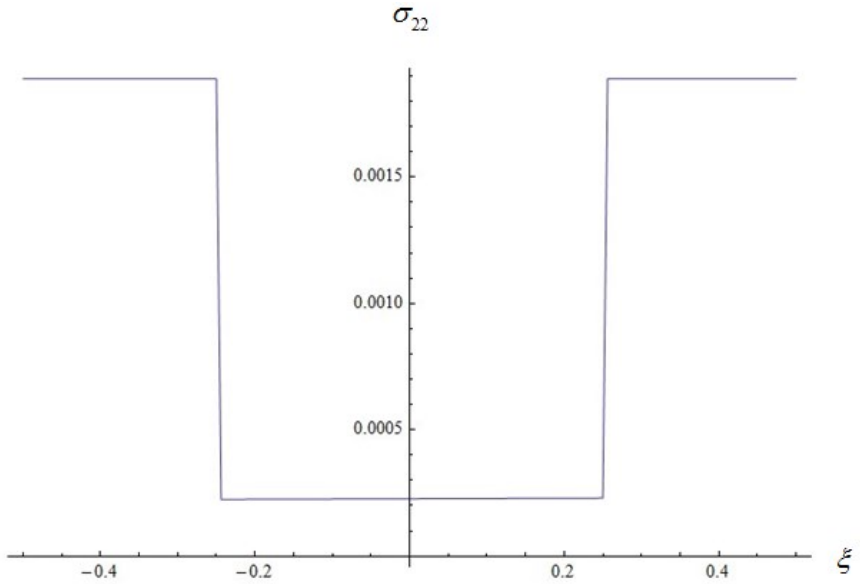


Рис. 9. Распределение окружного напряжения $\sigma_{22}(L/2R,\xi)$ (ГПа) по толщине оболочки для пакета слоев с ориентацией углов $[90^0/30^0/30^0/90^0]$

Заключение. Используя асимптотическую теорию тонких многослойных оболочек, сформулированы и решены локальные задачи теории упругости для цилиндрических оболочек. На основе этих задач выведены аналитические выражения для вычисления всех 6 компонент напряжений как функций поперечной и продольных координат, без использования каких-либо дополнительных гипотез о характере напряжений или перемещений по толщине.

Приведен пример расчета напряжений в цилиндрической композитной оболочке при осесимметричном изгибе давлением. Получены явные аналитические выражения для всех компонент тензора напряжений. Для вычисления напряжений по этим формулам требуется лишь дифференцирование перемещений – прогиба и двух перемещений срединной поверхности оболочки.

Работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства образования и науки № 9.3602.2017/ПЧ

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляв А. *Математическая теория упругости*. Москва, ОНТИ, 1935, 674 с.
[2] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки: пер. с англ. Москва, Наука, 1966, 635 с.
[3] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 272с.
[4] Григолюк Э., Куликов Г.М. *Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов. Механика композитных материалов*, 1988, 4, с. 698–704.

[5] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Struct*, 1984, pp. 333–350.
[6] Gruttmann F., Wagner W. Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross–sections. *Computational mechanics,* v.27. 2001, pp.199-207.
[7] Ghugal Y.M., Shmipi R.P. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 20, no. 3, 2001, pp. 255-272.
[8] Francesco T. Free vibrations of laminated composite doubly-curved shells and panels of revolution via the GDQ method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*., 200 (2011), pp. 931–952.
[9] Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко. *ПММ*, 2008, т. 72, вып. 2, с. 308–321.
[10] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Изв. РАН. МТТ*, 2006, № 6, с. 71–79.
[11] Назаров С.А., Свирс Г.Х., Слуцкий А.С. Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней. *Математический сборник*, 2011, т. 202, № 8, с.41-80.
[12] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им Н Э Баумана. Сер Естественные науки, 2012*, №3, с. 86–100.
[13] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. Механика композиционных материалов и конструкций, 2014, т.20, № 2, с. 260-282.
[14] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Губарева Е.А. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. Математическое моделирование и численные методы, 2014, № 4, с.36-57.
[15] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36−57.
[16] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Шалыгин И.С. Теория тонких оболочек, основанная на асимптотическом анализе трехмерных уравнений теории упругости. Инженерный журнал: науки и инновации, 2015, №5.
[17] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Расчет полного тензора напряжений в тонких моноклинных композитных оболочках на основе метода асимптотической гомогенизации. Инженерный журнал: наука и инновации, 2016, №12.
[18] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин. *Наука и образование. Электронное научно-техническое издание*, 2014, № 10. doi: 10.7463/1014.0730105.
[19] Yu. I. Dimitrienko, I. D. Dimitrienko and S.V. Sborschikov Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences,* Vol. 9, 2015, no. 145, 7211 7220
[20] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Modeling of the thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogenization method. *Journal for Multiscale Computational Engineering*. 2017 . № 15(3), pp. 219-237
[21] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4: Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[22] Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. Москва, Высшая школа, 2001. 576 с.

Статья поступила 12.06.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование напряжений в тонких композитных цилиндрических оболочках на основе асимптотической теории. *Математическое моделирование и численные методы,* 2018, № 3, с. 114–132.

Димитриенко Юрий Иванович родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 370 научных работ в области механики сплошной среды, вычислительной механики, газодинамики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах. dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна родилась в 1982 г., окончила МГУ им. М.В. Ломоносова в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в области механики сплошных сред, математического моделирования, механики композитов, механики контактного взаимодействия. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Пичугина Анна Евгеньевна родилась в 1994 г., магистрант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор нескольких научных работ в области численного моделирования в механике композитов. e-mail: a.e.pichugina@gmail.com

Modeling of the stresses in thin composite cylindrical shells based on the asymptotic theory

© Y.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, A.E. Pichugina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The previously developed general asymptotic theory of thin multilayer shells is used for the case of cylindrical shells. The ratios are presented in explicit analytical form for all six components of the stress tensor in a thin multilayer elastic cylindrical shell, depending on the deformations, curvatures of the middle surface of the shell, as well as their derivatives along the longitudinal coordinates. The obtained formulas make it possible to calculate all the distributions of the components of the stress tensor over the thickness in a cylindrical shell after finding solutions to the two-dimensional problem of the theory of Kirchhoff-Lyav shells. An example is given of the calculation of stresses in a cylindrical composite shell underaxisymmetric bending by pressure. To calculate stresses by these formulas, only

a differentiation of displacements is required - a deflection and two displacements of the middle surface of the shell, for which an analytical solution is obtained.

Keywords: *asymptotic theory, multilayer cylindrical shells, composites, stress tensor, Kirchhoff- Lyav shells.*

REFERENCES

[1] Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematical theory of elasticity]. Moscow, ONTI Publ., 1935, 674 p.
[2] Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S. *Plastinki i obolochki: per. s angl.* [Of plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 635 p.
[3] Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstrukcij iz kompozicionnyh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials], Moscow, Mashinostroenie,Publ., 1988, 272 p.
[4] Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. *Mekhanika kompozitnikh materialov – Mechanics of Composite Materials*, 1988, no. 4, pp. 693-704.
[5] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Struct*, 1984, pp. 333–350.
[6] Gruttmann F., Wagner W. Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross–sections. *Computational mechanics*, v.27. 2001, pp.199-207.
[7] Ghugal Y.M., Shmipi R.P. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 20, no. 3, 2001, pp. 255-272.
[8] Francesco T. Free vibrations of laminated composite doubly-curved shells and panels of revolution via the GDQ method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*., 200 (2011), pp. 931–952.
[9] Zveryaev E.M., Makarov G.I. *PMM — J. Appl. Math. Mech.*, 2008, vol. 72, iss. 2, pp. 308–321.
[10] Sheshenin S.V. *Izv. RAN. MTT — Proc. of the Russ. Acad. Sci. Mec*h. Rigid Body, 2006, no. 6, pp. 71–79.
[11] Nazarov S.A., Svirs G.H., Sluckij A.S. *Matematicheskij sbornik – Mathematical collection*. 2011, vol. 202, no. 8, pp.41-80.
[12] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University, Natural Science Series*, 2012, no. 3, pp. 86-100.
[13] Dimitrienko Yu,I., Yakovlev D.O. *Mekhanika kompo-zitsionnykh materialov i konstruktsiy — Composite Mechanics and design*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 260-282.
[14] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 36–56.
[15] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.
[16] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Shalygin I.S. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, iss. 5.
[17] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2016, iss. 12.

[18] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yakovlev D.O. *Nauka i obrazovanie. Elektronnoe nauchno-telhnicheskoe izdanie — Science and Education. Electronic Scientific and Technical Joural*, 2014, no. 10. doi: 10.7463/1014.0730105.
[19] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 9, 2015, no. 145, 7211 7220
[20] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Modeling of the thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogenization method. *Journal for Multiscale Computational Engineering*. 2017 . № 15(3), pp. 219-237
[21] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 tomakh* [Continuum mechanics. In 4 vols.]. *Vol. 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[22] Dimitrienko Yu.I. Tenzornoe ischislenie [Tensor calculus]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001, 576 p.

Dimitrienko Yu. I. (b. 1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984 Dr. Sci.(Phys. & Math.), Professor, Head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Director of Scientific-educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development of Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Science. Author of over 330 publications in the field of computational mechanics, gasdynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Gubareva E.A. (b. 1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004 Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman Moscow State Technical University. Author more than 60 scientific publications in the field of composite mechanics, asymptotic analisys, contact mechanics. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Pichugina A.E. (b. 1994) magister of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of some scientific publications in the field of computational mechanics of composites. e-mail: a.e.pichugina@gmail.com