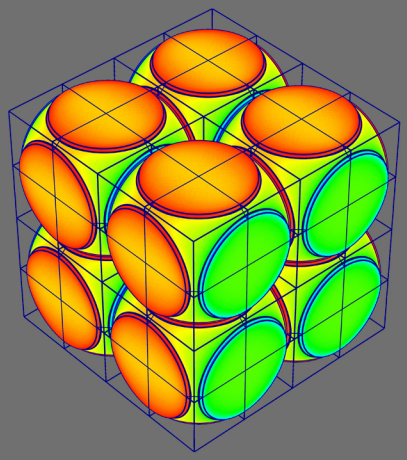
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Темис Ю.М., Азметов Х.Х. Расчет напряженно-деформированного состояния свободных тел методом конечных элементов. Математическое моделирование и численные методы, 2018, № 3, с. 95–113.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/174/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.182
30.01.2026 18:23:48

УДК 517:519.6

Расчет напряженно-деформированного состояния свободных тел методом конечных элементов

© Ю.М. Темис[1, 2], Х.Х. Азметов[1, 2]

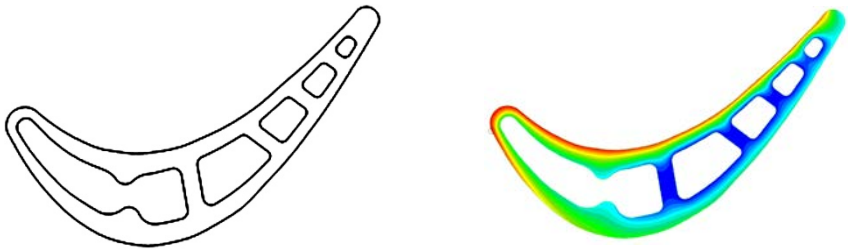
[1] ЦИАМ им. П.И. Баранова, Москва, 111116, Россия
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен способ расчета напряженно-деформированного состояния свободных тел методом конечных элементов. Приведена реализация предложенного алгоритма в двумерной постановке с примерами расчета.

Ключевые слова: *метод конечных элементов, кинематические граничные условия, свободное тело.*

Введение. Для задач расчета напряженно-деформированного состояния деталей методом конечных элементов (МКЭ), уравнения которого получены из вариационного принципа Лагранжа в перемещениях, часто возникает проблема корректного задания кинематических граничных условий. Особенно это важно для расчета деталей и конструкций, в которых приложение кинематических граничных условий либо практически невозможно из физического смысла задачи, либо существенно искажает решение. Такие расчетные области назовем «свободными» телами, для которых желательно исключить влияние кинематических граничных условий, и рассматривать конструкцию только при действии силовых факторов.

В статье приведен способ расчета «свободных» тел, примерами которых являются незакрепленные конструкции, описываемые плоскими и пространственными конечно-элементными моделями: летательные аппараты, плоские модели теплообменников и твэлов ядерных реакторов, сечения охлаждаемых лопаток турбин и т.п. На рис. 1,*а* показано сечение охлаждаемой лопатки турбины, расчет термонапряженного состояния которой при заданном поле температур (рис. 1,*б*) сводится к задаче обобщенного плоского деформированного состояния. К аналогичной задаче сводится расчет напряженно-деформированного состояния твэла [1, 2]. Сечение лопатки должно деформироваться свободно, поэтому задание кинематических граничных условий нежелательно. С другой стороны, их отсутствие делает задачу с математической точки зрения неопределенной.



а) *б*)

Рис. 1. Сечение лопатки:
а – контур; *б* – распределение температуры

Общие соотношения. Рассмотрим вариационное соотношение Лагранжа

$$\int_{\Omega}\{\sigma\}^T\{\delta\varepsilon\}\,d\Omega-\int_{\Omega}\{F_{\Omega}\}^T\{\delta u\}\,d\Omega-\int_{S}\{F_S\}^T\{\delta u\}\,dS=0, \qquad (1)$$

где $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ – векторы напряжений и деформаций в каждой точке тела, соответственно; $\{u\}$ – вектор перемещений; Ω – объем тела; S – площадь поверхности тела; $\{F_{\Omega}\}$, $\{F_S\}$ – векторы объемных и поверхностных сил, соответственно; δ – обозначает вариацию вектора деформаций или перемещений.

Если задать закон связи напряжений и деформаций [3, 4], то уравнение (1) известным способом может быть сведено к конечно-элементной задаче в перемещениях [5]

$$[K]\{U\}=\{F\} \qquad (2)$$

где $[K]$ – глобальная матрица жесткости; $\{U\}$ – глобальный вектор перемещений; $\{F\}$ – вектор узловых нагрузок.

Векторы объемных и поверхностных сил для точного решения (2) должны быть уравновешены (главный вектор и главный момент внешних сил равны нулю). Однако, при численном расчете из-за погрешности аппроксимации и накопления погрешности вычислений [6] полученное решение будет отличаться от точного. В частности, это может быть связано с тем, что в случае отсутствия кинематических граничных условий матрица жесткости задачи (2) является положительной, а не положительно определенной. Поэтому вектор перемещений будет определен с точностью до константы, характеризующей смещение тела как жесткого целого. Это смещение с математической точки зрения должно равняться нулю в случае уравновешенной системы внешних сил, однако при отсутствии кинематических связей оно может принимать произвольное значение.

Существует ряд способов исключения смещения тела как жесткого целого при численном расчете. Классический способ заключается в задании перемещений, в том числе нулевых, ряду узлов таким образом, чтобы исключить перемещение тела как жесткого целого. Часто для исключения смещения тела как жесткого целого применяют способ вывешивания контура тела на стержневых элементах (пружинах) малой жесткости. Однако, это приводит к большой погрешности.

В общем случае кинематические связи, наложенные на рассчитываемую конструкцию, можно описать в виде дифференциального оператора

$$L(u) = 0 \tag{3}$$

Воспользуемся методом множителей Лагранжа [7, 8] для кинематических связей (3), и представим (1) в виде:

$$\begin{gathered}\int_{\Omega} \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\}\, d\Omega - \int_{\Omega} \{F_{\Omega}\}^T \{\delta u\}\, d\Omega - \\ -\int_{S} \{F_S\}^T \{\delta u\}\, dS + \delta\left(\int_{\Omega} \{\lambda\}^T \{L(u)\}\, d\Omega\right) = 0,\end{gathered} \tag{4}$$

где $\{\lambda\}$ – вектор множителей Лагранжа размерности, равной количеству наложенных кинематических условий; $\{L(u)\}$ – вектор наложенных кинематических условий.

В этом случае множители Лагранжа входят в решение как неизвестные величины и являются, по сути, силами реакции в узлах задания кинематических условий. Величины их таковы, чтобы обеспечить выполнение заданного кинематического условия. Так как значения множителей Лагранжа вычисляются в процессе решения, то система в этом смысле является самоуравновешенной, что при корректном задании кинематических связей исключает перемещение тела как жесткого целого при задании любой системы сил.

Как было сказано выше, в ряде задач наложение кинематических связей на некоторый набор узлов не желательно. В настоящей работе предложен альтернативный способ. Под смещением тела как жесткого целого будем понимать такое линейное смещение $\{u\}_C$ и поворот $\{\Theta\}$, при котором каждая точка тела, кроме перемещений, вызванных действующими нагрузками, получает дополнительные смещения, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$\int_{\Omega}\{u\}\gamma d\Omega=\{u\}_C M;\ \int_{\Omega}\{u\}\times\{r\}\gamma d\Omega=[I]_C\{\Theta\} \tag{5}$$

где γ – плотность тела; $\{u\}_C$ – вектор линейного смещения центра масс тела; M – масса тела; $\{r\}$ – вектор радиус-векторов точек тела; $[I]_C$ – тензор инерции тела относительно центра масс [3]; $\{\Theta\}$ – вектор угла поворота тела.

Граничные условия (5) являются интегральными операторами для вектора перемещений точек тела $\{u\}$, поэтому минимизация функционала с ограничениями (5) является изопериметрической задачей [8]. Ее можно свести к задаче Лагранжа, при этом множители Лагранжа будут постоянными величинами.

Таким образом, уравнение Лагранжа (4) примет следующий вид:

$$\begin{gathered}\int_{\Omega}\{\sigma\}^T\{\delta\varepsilon\}d\Omega-\int_{\Omega}\{F_\Omega\}^T\{\delta u\}d\Omega-\int_{S}\{F_S\}^T\{\delta u\}dS+\\ +\delta\{\lambda_1\}^T\left(\int_{\Omega}\{u\}\gamma d\Omega-\{u\}_C M\right)+\\ +\delta\{\lambda_2\}^T\left(\int_{\Omega}\{u\}\times\{r\}\gamma d\Omega-[I]_C\{\Theta\}\right)=0,\end{gathered} \tag{6}$$

где $\{\lambda_1\}$ и $\{\lambda_2\}$ – векторы множителей Лагранжа размерности 3 для линейных смещений и углов поворота тела, соответственно.

В этом случае применение технологии МКЭ приведет к разрешающей системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{bmatrix}[K] & [K_{u\lambda1}]^T & [K_{u\lambda2}]^T\\ [K_{u\lambda1}] & 0 & \\ [K_{u\lambda2}] & & \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{U\}\\ \{\lambda_1\}\\ \{\lambda_2\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F\}\\ M\{u\}_C\\ [I]_C\{\Theta\}\end{Bmatrix} \tag{7}$$

где $[K_{u\lambda1}]$ и $[K_{u\lambda2}]$ – матрицы связи глобального вектора неизвестных $\{U\}$ с векторами $\{\lambda_1\}$ и $\{\lambda_2\}$, соответственно.

Более подробно рассмотрим применение предложенного способа расчета «свободных» тел на ряде примеров.

Двумерные задачи. Рассмотрим задачу расчета напряженно-деформированного состояния в двумерной постановке. Если предложить, что точки деформированного сечения удовлетворяют условиям (5), причем u_{Cx}, u_{Cy} и Θ_z равны нулю, то получим следующие условия

$$\int_{\Omega} u\gamma d\Omega = 0,\ \int_{\Omega} v\gamma d\Omega = 0,\ \int_{\Omega} (yu - xv)\gamma d\Omega = 0. \qquad (8)$$

Запишем условия (8) в матричной форме

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & -x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \gamma d\Omega = 0. \qquad (9)$$

Вводя множители Лагранжа λ_x, λ_y и $\lambda_{\Theta z}$ для условий (8), вариационное соотношение (6) примет следующий вид:

$$\int_{\Omega} \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} d\Omega - \int_{\Omega} \{F_{\Omega}\}^T \{\delta u\} d\Omega - \int_{S} \{F_S\}^T \{\delta u\} dS +$$
$$+\delta \begin{Bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_{\Theta z} \end{Bmatrix}^T \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & -x \end{bmatrix} \{u\} \gamma d\Omega = 0. \qquad (10)$$

Переходя к конечно-элементной аппроксимации и считая, что плотность и толщина элемента постоянна, заменим интеграл (8) следующей суммой

$$\sum_{e=1}^{N} \gamma_e h_e \left(\int_{S_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & -x \end{bmatrix} [N]_e dS \right) \{u\}_e = 0, \qquad (12)$$

где N – количество конечных элементов; γ_e – плотность материала элемента; h_e – толщина элемента; S_e – площадь элемента; $[N]_e$ – матрица функций форм конечного элемента; $\{u\}_e$ – вектор узловых перемещений элемента.

Тогда, введя глобальной вектор $\{U, \lambda\}^T$, с учетом аппроксимации (11) получим конечно-элементную задачу в виде

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\lambda}]^T \\ [K_{u\lambda}] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_u \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad (12)$$

где $[K_{uu}]$ – матрица жесткости конструкции; $[K_{u\lambda}]$ – матрица связи пе-

ремещений, компоненты которой для каждого конечного элемента вычисляются следующим образом:

$$\left[K_{u\lambda}\right]_e = \gamma_e h_e \int_{S_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & -x \end{bmatrix} \left[N\right]_e dS = \begin{bmatrix} K_u \\ K_v \\ K_\Theta \end{bmatrix}_e . \qquad (13)$$

Для линейного треугольного конечного элемента [5] компоненты матрицы $[K_{u\lambda}]_e$ вычисляются как

$$K_{ui} = \begin{bmatrix} \frac{m_e}{3} & 0 \end{bmatrix}; \; K_{vi} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_e}{3} \end{bmatrix};$$

$$K_{\Theta i} = \left[\frac{1}{2S_e} \cdot \begin{bmatrix} 0 & J_{xy} & J_x \\ 0 & -J_y & -J_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} \right]^T ,$$

где i – номер узла; m_e – масса элемента; J_x, J_y и J_{xy} – осевые и центробежный моменты инерции элемента относительно центра масс элемента; a_i, b_i и c_i – коэффициенты функции формы треугольного конечного элемента [5].

Следует отметить, что множители Лагранжа λ_x, λ_y и $\lambda_{\Theta z}$ имеют ясный физический смысл, представляя компоненты ускорения от действия главного вектора сил и углового ускорения от действия главного момента сил, уравновешивающие рассчитываемое тело. В случае расчета тела под действием системы уравновешенных сил, когда главный вектор и главный момент сил равны нулю, эти величины должны быть равны нулю. Однако за счет погрешности счета они могут отличаться от нуля.

Введение множителей Лагранжа изменяет вид матрицы жесткости задачи. Начальная матрица жесткости конструкции (2) имеет редкозаполненный и близкий к ленточному вид, где все ненулевые элементы при оптимизированной нумерации узлов сосредоточены около главной диагонали. Поэтому при решении хранится только эта часть матрицы. Это позволяет существенно сократить необходимый объем памяти и время решения получаемой системы линейных алгебраических уравнений по сравнению с полностью хранимой квадратной матрицей задачи (2). При использовании предложенного алгоритма в матрицу задачи на последних позициях добавляются практически полностью заполненные строки и столбцы по количеству множителей Лагранжа (11), из-за чего матрица хранения становится квадратной. Обойти проблему увеличения требуемого объема памяти и времени решения

можно, либо используя специальные приемы хранения и индексации для ленточного хранения матрицы жесткости совместно с матрицей связи перемещений, либо алгоритмы решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений [9].

Алгоритм закрепления «свободного» тела реализован в модуле расчета напряженно-деформированного состояния конструкций, работающих за пределами упругости при циклическом нагружении [10].

Расчет тела под действием уравновешенной системы сил. Тестирование предложенного алгоритма проведено при сравнении результатов упругого и упругопластического расчета тела прямоугольного сечения под действием продольной силы, заданной как давление на части контура (рис. 2), при задании обычных кинематических граничных условий и закрепления «свободного» тела. Использовались плоский конечный элемент единичной толщины (рис. 2*а*) и осесимметричный конечный элемент [5], осью которого является *Ox* (рис. 2*б*). Расчетная схема при использовании закрепления «свободного» тела одинакова для обоих типов элементов (рис. 2*в*). Различие только в количестве закрепленных степеней свободы тела. Для плоского конечного элемента закрепление произведено по всем трем степеням (8), а для осесимметричного элемента – только в направлении оси *Ox*.

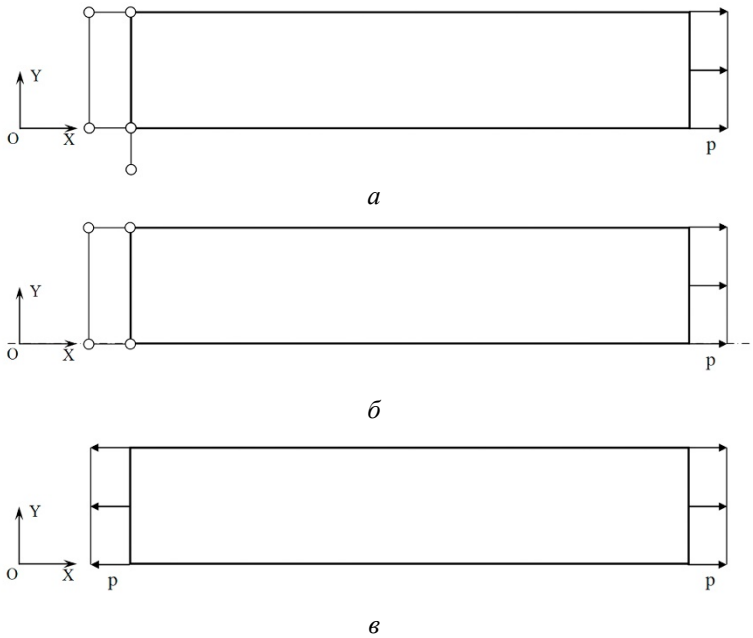


Рис. 2. Расчетные схемы тела под действием уравновешенной системы сил
а – плоской конечный элемент; *б* – осесимметричный конечный элемент; *в* – закрепление «свободного» тела

На рис. 3 и в таблице 1 представлены результаты расчетов. В таблице использованы следующие обозначения: m – масса тела; J_z – момент инерции тела относительно оси Oz; F_x – действующая на тело сила; F_{xc}, F_{yc}, M_{zc} – компоненты главного вектора и главного момента системы действующих сил относительно центра масс; Δl_x, Δl_y – удлинение тела в направлении осей координат; λ_x, λ_y, $\lambda_{\Theta z}$ – компоненты вектора множителей Лагранжа; $F_{\lambda x}$, $F_{\lambda y}$, $F_{\lambda \Theta z}$ – компоненты уравновешивающей тело системы сил.

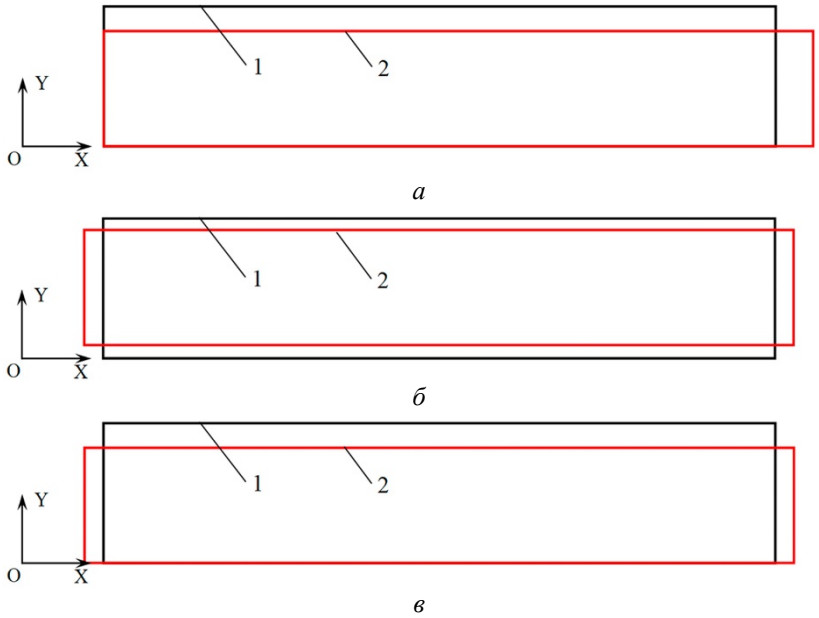


Рис. 3. Начальная (1) и деформированная (2) геометрия тела под действием уравновешенной системы сил
а – кинематические граничные условия; *б* – плоский конечный элемент и закрепление «свободного» тела; *в* – закрепление «свободного» телзакрепление «свободного» тела

Как видно из приведенных рисунков, при использовании закрепления «свободного» тела сечение деформируется симметрично относительно центра масс, который лежит в центре сечения для плоского конечного элемента и в центре на оси для осесимметричного конечного элемента. Как видно из результатов, представленных в таблице 1, удлинение тела в направлении осей координат для различного вида закреплений эквивалентны. Заметим также, что несмотря на уравновешенность системы сил, действующих на тело, множители Лагранжа отличны от нуля, что связано с погрешностью аппроксимации и численного счета.

Таблица 1

Результаты расчета тела под действием уравновешенной системы сил

Тип конечного элемента	Величины	Упругий расчет		Упругопластический расчет	
		Кинематические граничные условия	Закрепление «свободного» тела	Кинематические граничные условия	Закрепление «свободного» тела
Плоский	m, кг	8.320e-3			
	J_z, кг·м^2	7.002e-6			
	F_x, Н	8000	±8000	8000	±8000
	R_{xc}, Н	8000	0	8000	0
	R_{yc}, Н	0	0	0	0
	M_{zc}, Нм	0	0	0	0
	Δl_x, м	0.4615e-3	0.4615e-3	0.5654e-3	0.565e-3
	Δl_y, м	-0.0138e-3	-0.0138e-3	-0.0190e-3	-0.019e-3
	λ_x, м/с^2	-	2.144e-08	-	-5.894e-08
	λ_y, м/с^2	-	3.839e-09	-	5.503e-09
	$\lambda_{\theta z}$, с$^{-2}$	-	-3.103e-03	-	-4.238e-03
	F_{xb}, Н	-	1.793e-10	-	-4.904e-10
	F_{yb}, Н	-	3.193e-11	-	4.578e-11
	M_{zb}, Нм	-	-2.172e-08	-	-2.967e-08
Осесимметричный	m, кг	0.261			
	F_x, Н	251327	±251327	251327	±251327
	R_{xc}, Н	251327	0	251327	0
	R_{yc}, Н	0	0	0	0
	M_{zc}, Нм	0	0	0	0
	Δl_x, м	0.4615e-3	0.4615e-3	0.5654e-3	0.5654e-3
	Δl_y, м	-0.0138e-3	-0.0138e-3	-0.0190e-3	-0.0190e-3
	λ_x, м/с^2	-	1.855e-08	-	-6.346e-08
	F_{xb}, Н	-	1.543e-10	-	-5.280e-10

Тело под действием неуравновешенной системы сил. Тестирование предложенного алгоритма также проведено при расчете тела под действием неуравновешенной системы сил, заданной как давление на части контура (рис. 4). Масса тела равна 1.182 кг, полярный момент инерции тела относительно центра масс равен 1.212e-7 кг·м^2. В первом варианте (рис. 4*а*) тело закреплено как «свободное». Во втором случае (рис. 4*б*) добавлено линейное ускорение, возникающее под действием главного вектора действующих сил. В таблице 2 представлены результаты расчета. Значения сил и моментов приведены относительно центра масс тела.

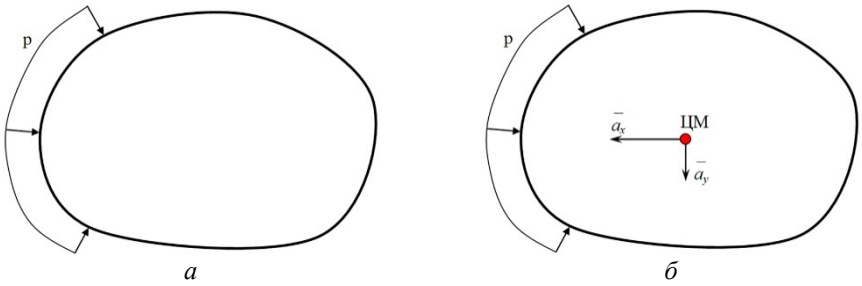


Рис. 4. Расчет тела под действием неуравновешенной системы сил:
а – первый вариант; *б* – второй вариант

Таблица 2

Результаты расчета тела под действием неуравновешенной системы сил

Вариант	Заданные силы		Заданное ускорение		Главный вектор и главный момент действующих сил		Множители Лагранжа		Уравновешивающие силы и моменты	
1	F_x, Н	826.9	a_x, м/с^2	-	R_x, Н	826.9	λ_x, м/с^2	699.4	F_{xb}, Н	-826.9
	F_y, Н	72.6	a_y, м/с^2	-	R_y, Н	72.6	λ_y, м/с^2	61.4	F_{yb}, Н	-72.6
	M_z, Нм	0	ε_z, с$^{-2}$	-	M_{z0}, Нм	-2.0	$\lambda_{\theta z}$, с$^{-2}$	1.65e7	M_{zb}, Нм	2.0
2	F_x, Н	826.9	a_x, м/с^2	699.4	R_x, Н	0.0	λ_x, м/с^2	1.6e-4	F_{xb}, Н	1.9e-4
	F_y, Н	72.6	a_y, м/с^2	61.4	R_y, Н	0.0	λ_y, м/с^2	-3.8e-5	F_{yb}, Н	4.0e-5
	M_z, Нм	0	ε_z, с$^{-2}$	0	M_{z0}, Нм	-2.0	$\lambda_{\theta z}$, с$^{-2}$	1.65e7	M_{zb}, Нм	2.0

Как видно из таблицы, значения множителей Лагранжа, отвечающие за закрепление как «свободного» тела, в первом варианте расчета соответствуют значениям линейных ускорений, возникающих под действием главного вектора действующих сил во втором варианте. При этом в первом варианте уравновешивающие силы и моменты равны силам и моментам, действующим на тело. Кроме этого, можно видеть, что во втором варианте расчета, несмотря на уравновешенность действующих сил (главный вектор сил равен нулю), из-за погрешностей счета множителя Лагранжа отличны от нуля.

Расчет сечения лопатки. На рис. 5 представлены результаты расчета термонапряженного состояния сечения лопатки (см. рис. 1) с использованием предложенного алгоритма. Как видно из представленных результатов, сечение лопатки деформируется относительно

центра масс, причем перемещения узлов заранее предсказать затруднительно.

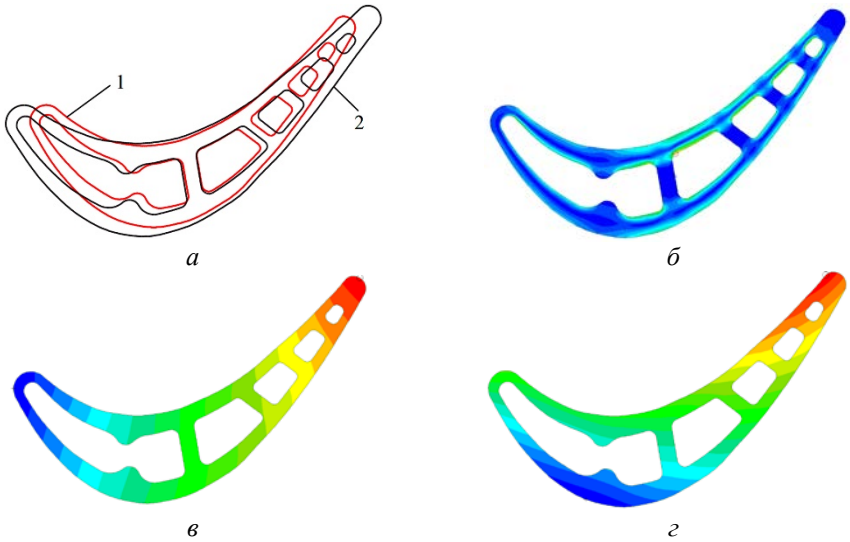


Рис. 5. Результаты расчета термонапряженного состояния сечения лопатки: *а* – начальная (1) и деформированная (2) геометрия; *б* – распределение интенсивности напряжений; *в* – распределение перемещений в направлении оси X; *г* – распределение перемещений в направлении оси Y

Компоненты вектора множителей Лагранжа {λ} равны, соответственно, (-3.820e-11м/с2, 1.665e-11м/с2, -1.297e-03с-2), что при массе сечения лопатки 0.027кг и полярном моменте инерции 6.571e-5кг·м2 относительно центра масс сечения соответствует уравновешивающей системе сил ($F_{\lambda x}$, $F_{\lambda y}$, $M_{\lambda\theta z}$), приложенной к центру масс и равной (-1.031e-12Н, 4.496e-13Н, 8.524e-8Нм). В этом примере никакие внешний силы не приложены, поэтому ненулевые уравновешивающие силы возникают только вследствие погрешности счета при численном расчете.

Применение к решению задач пластического деформирования. Далее приведены примеры использования алгоритма «свободного» тела к решению задач пластического деформирования.

Расчет несимметричного тела. Приведен пример расчета напряженно-деформированного состояния при упругопластическом деформировании образца с несимметричным отверстием под действием уравновешенной распределенной нагрузки без приложения кинематических граничных условий (рис. 6). Задачу можно решить и при использовании обычной схемы задания граничных условий: на левой стороне – кинематические граничные условия, на правой – силовая нагрузка. Но задание кинематических граничных условий на одной стороне контура задачи ограничивает ее деформирование, что может

оказать влияние на зоны концентрации напряжений при недостаточной удаленности их от этой стороны контура. Кроме этого, несимметричность конструкций затрудняет задание кинематических граничных условий для получения корректного распределения перемещений и деформаций. Использование алгоритма «свободного» тела позволяет получить более корректное распределение деформаций как на границе, так и внутри тела.

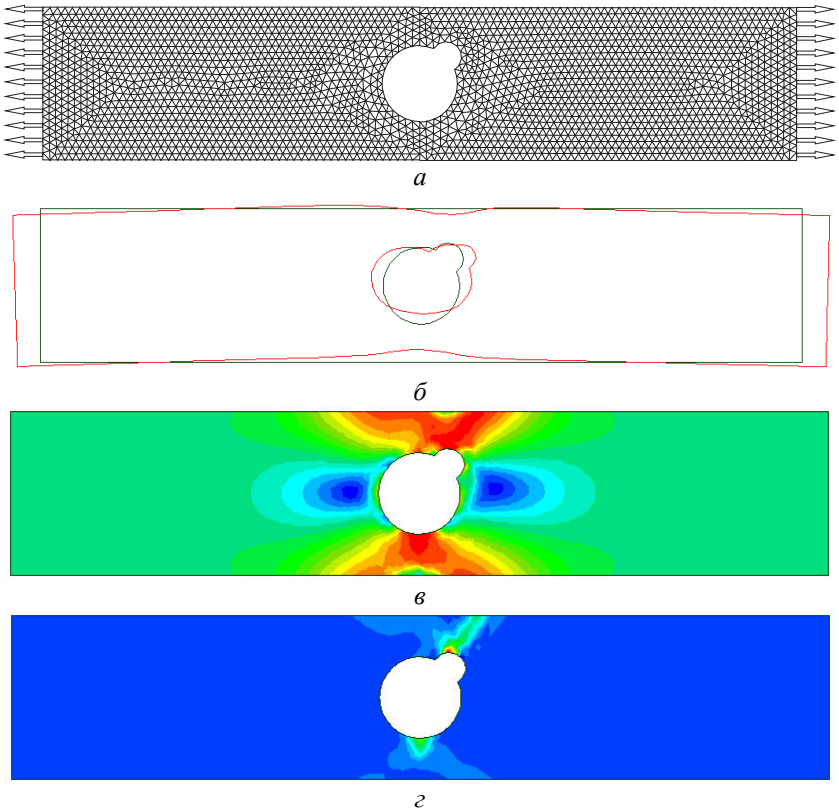


Рис. 6. Расчет несимметричного образца:
а – расчетная схема; *б* – начальная и деформированная геометрия;
в – распределение интенсивности напряжений; *г* – распределение интенсивности пластических деформаций

Моделирование разгонных испытаний. Моделирование разгонных испытаний модельных дисков (рис. 7) с центральным отверстием проведено при постепенном увеличении скорости вращения до момента разрушения. Классический способ закрепления в точках на осях координат возможен только при расчете напряженно-деформированного состояния на рабочих нагрузках и при наличии осей циклической симметрии вдоль координатных осей. При расчете разгонных испытаний такой способ закрепления ограничивает деформацию диска, так

как заранее предсказать фрагментирование диска при разрушении затруднительно. Применение закрепления модели как «свободного» тела позволяет обойти эти проблемы.

Начальная и деформированная геометрия диска показана на рис. 8. Распределение интенсивности напряжений и пластических деформаций для одного из уровней скорости вращения показаны на рис. 9*а* и 9*б*, соответственно. На рис. 10 приведены возможные формы разрушения диска. Здесь темным тоном показаны конечные элементы с повреждаемостью, близкой к единицы, цепочка которых образуют линию разрушения [11].

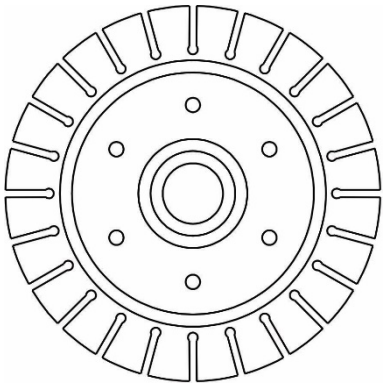


Рис. 7. Чертеж модельного диска

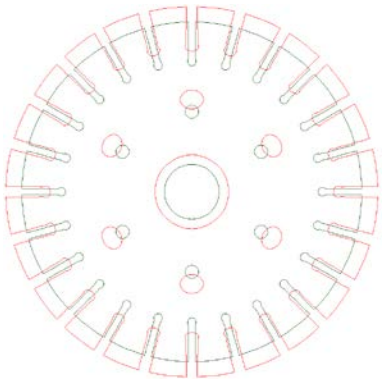
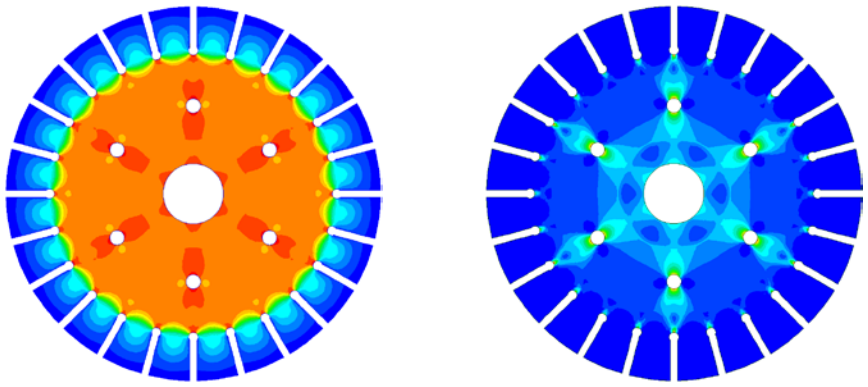


Рис. 8. Начальная (черные линии) и деформированная (красные линии) геометрия



а *б*

Рис. 9. Распределение интенсивности напряжений (а) и интенсивности пластических деформаций (б) для одного из уровней скорости вращения

Рис. 10. Формы разрушения модельного диска при моделировании разгонных испытаниях

Моделирование циклических испытаний. Как было показано ранее, задание кинематических граничных условий может изменять распределение деформаций в расчетной конструкции. Особенно это важно при моделировании циклической испытаний, в котором при расчете производится подсчет деформаций за историю нагружения [10]. Оценка влияния кинематических граничных условий закрепления на результаты решения проведено при расчете циклической долговечности [10, 11] образца с надрезом при растяжении-сжатии (рис. 11).

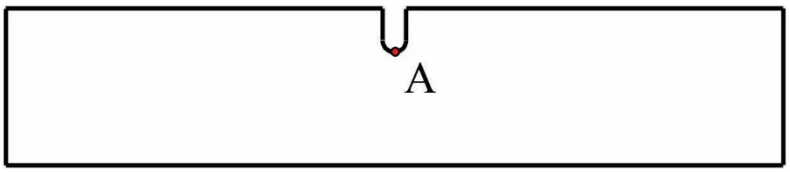


Рис. 11. Схема образца

Образец представляет собой пластину единичной толщины с концентратором напряжений. Моделировалось мягкое нагружение при симметричном цикле. Три варианта расчетных схем приведены на рис. 12. В первом варианте вследствие симметричности конструкции расчет проводился для половины конструкции (рис. 12*а*). Именно такая схема чаще всего используется при расчете подобных задач. Во втором варианте конструкция рассчитывалась целиком, но по одной стороне приложено рабочая нагрузка, а по другой – кинематические условия закрепления (рис. 12*б*). В третьем варианте нагрузка приложена по обоим сторонам (рис. 12*в*), а сама конструкция закреплена как «свободное» тело.

Результаты моделирования для точки в концентраторе напряжений (рис. 11) представлены в таблице 3 для первых пяти полуциклов нагружения. Здесь n – номер полуцикла нагружения; σ_i – интенсивность напряжений в полуцикле, ε_p – интенсивность пластических деформаций в полуцикле, ε_{psum} – накопленная пластическая деформация, П – повреждаемость малоцикловой усталости [10-13].

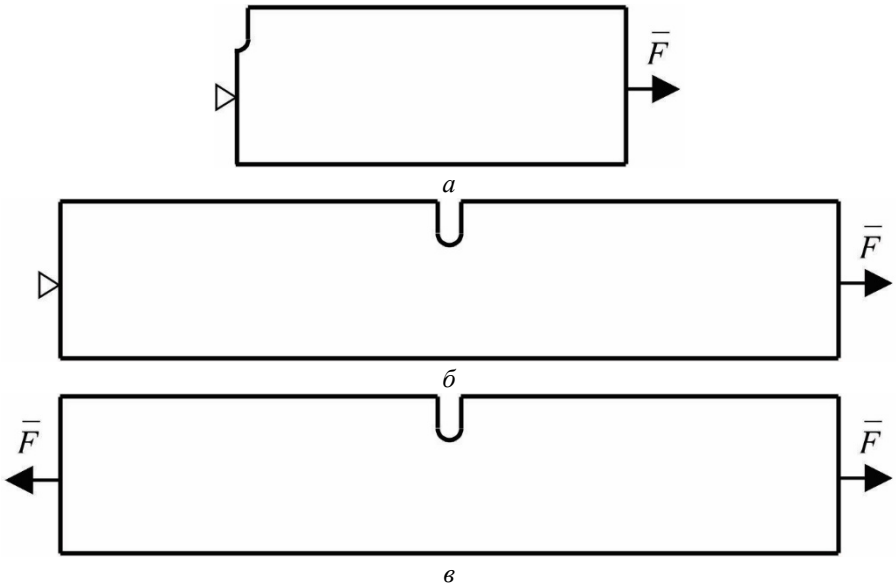


Рис. 12. Варианты расчетных схем

По представленным результатам видно, что результаты статического расчета (1-ый полуцикл) практически совпадают. Таким образом, в этом случае все варианты расчетных схем идентичны. Различия начинаются при циклическом расчете. Из-за разницы в деформации правой границы для второго и третьего вариантов возникает разница в деформации зоны концентратора напряжений, что выливается в различие интенсивности пластической деформации на каждом цикле нагружения и, соответственно, скорости роста повреждаемости в этой зоне. Это приводит к тому, что ресурс во втором варианте значительно выше. Если сравнивать первый и третий варианты, то общая форма деформации образца совпадают, но наличие кинематических граничных условий вблизи концентратора напряжений приводит к некоторому ужесточению расчетной схемы. Это приводит к некоторому уменьшению напряжений и деформаций в этой точке, и, соответственно, увеличению ресурса малоцикловой усталости образца.

Таблица 3

Результаты моделирования образца

	Вариант 1				Вариант 2				Вариант 3			
n	σ_i, МПа	ε_p, %	ε_{psum}, %	П	σ_i, МПа	ε_p, %	ε_{psum}, %	П	σ_i, МПа	ε_p, %	ε_{psum}, %	П
1	1038.7	1.11	1.11	0.066	1038.1	1.08	1.08	0.064	1039.0	1.13	1.13	0.067
2	1026.8	2.25	3.36	0.126	1026.5	2.18	3.26	0.122	1027.0	2.30	3.43	0.129
3	1014.6	2.31	5.67	0.163	1014.8	2.24	5.50	0.158	1014.8	2.39	5.82	0.167
4	1006.6	2.41	8.08	0.192	1005.4	2.28	7.78	0.185	1009.5	2.42	8.24	0.196
5	1002.9	2.44	10.52	0.216	1003.6	2.31	10.09	0.207	1003.3	2.47	10.71	0.220
Номер полуцикла начала разрушения				157	187				146			

Выводы. Разработан алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния «свободных» тел под действием произвольной силовой нагрузки, позволяющий отказаться от наложения кинематических граничных условий на отдельные узлы расчетной схемы. На примере реализации алгоритма в двумерной постановке показана эквивалентность результатов в сравнении с решением при применении кинематических граничных условий. Показано, что при расчете несимметричных тел предложенный алгоритм позволяет получить более корректное решение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ватулин А.В., Каширин Б.А., Темис Ю.М. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния твэла на основе полупространственной теории стержней. *Препринт ВНИИНМ*, 2000-3, 2000, 24 с.

[2] Ватулин А.В., Каширин Б.А., Темис Ю.М. Учет несимметричных факторов при расчете дисперсионных твэлов на основе полупространственной теории стержней. *Препринт ВНИИНМ*, 2002-2, 2002, 32 с.

[3] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 512 с.

[4] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. 624с.

[5] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method. Vol. 1: The Basis. Fifth edition*, Butterworth-Heinemann, 2000, 708 p.

[6] Галанин М. П., Савенков Е. Б. *Методы численного анализа математических моделей*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010, 590 с.

[7] Эльсгольц Л.Э. *Вариационное исчисление*. Москва, Гостехтеоретиздат,

1958, 164 с.

[8] Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. *Вариационное исчисление и оптимальное управление*: Учеб. для вузов, Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. 3-е изд., исправл. Сер. Математика в техническом университете; Вып. XV. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006, 488 с.

[9] Азметов Х.Х. Анализ вариантов метода Холесского для решения больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений. *Известия МГТУ «МАМИ»*, №3(25), т. 4, 2015, с. 123–132.

[10] Темис Ю.М., Азметов Х.Х. Математическое моделирование циклического деформирования. *Известия МГТУ «МАМИ»*, №2(12), 2011, с. 195-202.

[11] Темис Ю.М., Худякова А.Д. Модель неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, No 3, с. 20–37.

[12] Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, №2 (10), с. 3-23

[13] Temis J.M., Azmetov Kh.Kh., Zuzina V.M. Low-Cycle Fatigue Simulation and Life-Time Prediction of High Stressed Structures. *Solid State Phenomena*, Vols. 147-149 (2009), pp. 333-338.

Статья поступила 20.10.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Темис Ю.М., Азметов Х.Х. Расчет напряженно-деформированного состояния свободных тел методом конечных элементов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 3, с. 95–113.

Темис Юрий Моисеевич – доктор технических наук, профессор, начальник отдел ЦИАМ им. П.И. Баранова, автор более 300 опубликованных научных работ в области прочности и динамики турбомашин, численных методов решения задач упругости, пластичности и ползучести, оптимального проектирования и многодисциплинарного математического моделирования ГТД. e-mail: tejoum@ciam.ru

Азметов Хаким Хасанович – кандидат технических наук, доцент, начальник сектора ЦИАМ им. П.И. Баранова, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, автор более 30 опубликованных научных работ в области прочности, численных методов решения задач упругости, пластичности и ползучести, многодисциплинарного математического моделирования ГТД. e-mail: hakim.azmetov@mail.ru

Computation of stress-strain condition of free body by finite element method

© Y.M. Temis[1, 2], Azmetov Kh.Kh.[1, 2]

[1] Central Institute of Aviation Motor Development named after P.I. Baranov, Moscow, 111116, Russia
[2] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The technique of computation of stress-strain condition of free bodies by finite element method was offered. Implementation of suggested algorithm in two-dimensional formulation and calculation examples are given.

Keywords: *finite element method, kinematical boundary conditions, free body.*

REFERENCES

[1] Vatulin A.V., Kashirin B.A., Temis Yu.M. *Preprint VNIINM – Preprint VNIINM*, 2000-3. Moscow, VNIINM, 2000. 24 p.
[2] Vatulin A.V., Kashirin B.A., Temis Yu.M. *Preprint VNIINM – Preprint VNIINM*, 2002-2. Moscow, VNIINM, 2002. 32 p.
[3] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodynamiki sploshnoy sredi* [Mathematical models of continuum mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2008, 512 p.
[4] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredi. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovi mekhaniki tverdykh sred.* [Continuum Mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of solids mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[5] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method. Vol. 1: The Basis. Fifth edition*, Butterworth-Heinemann, 2000, 708 p.
[6] Galanin M. P., Savenkov E. B. *Metody chislennogo analiza matematicheskikh modeley* [Methods of numerical analysis of mathematical models]. Moscow, BMSTU Publ., 2010, 590 p.
[7] Elmgolz L.E. *Variatsionnoe ischislenie* [Variational calculus]. Moscow, Gostechteoretizdat, 1958, 164 p.
[8] Van'ko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin G.N. *Variatsionnoe ischislenie i optimalnoe upravrenie* [Variational calculus and optimal control]. Moscow, BMSTU Publ., 2006, 488 p.
[9] Azmetov Kh.Kh. *Izvestiya MGTU MAMI – MAMI Bulletin*, 2015, no. 3(25), Vol. 4, pp. 123–132.
[10] Temis J.M., Azmetov Kh.Kh. *Izvestiya MGTU MAMI – MAMI Bulletin*, 2011, no. 2(12, pp. 195-202.
[11] Temis Y.M., Khudyakova A.D. *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 3, pp. 22-41.
[12] Dimitrienko Yu. I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2 (10), pp. 3-23
[13] Temis J.M., Azmetov Kh.Kh., Zuzina V.M. Low-Cycle Fatigue Simulation and Life-Time Prediction of High Stressed Structures. *Solid State Phenomena*, Vols. 147-149 (2009), pp. 333-338.

Temis Y. M., Dr. Sci. (Eng.), Professor, Head of Department of Central Institute of Aviation Motor Development named after P.I. Baranov. Author of over 300 publications in the fields of durability and dynamic of turbomachines, numerical methods for solving problems of elasticity, plasticity and creep, optimal engineering, multi-disciplinary mathematical modeling of turbine engine. e-mail: tejoum@ciam.ru

Azmetov Kh. Kh. Doctor of Philosophy (Eng.), Associate Professor, Head of Sector of Central Institute of Aviation Motor Development named after P.I. Baranov, Associate Professor of Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 30 publications in the fields of durability, numerical methods for solving problems of elasticity, plasticity and creep, multi-disciplinary mathematical modeling of turbine engine. e-mail: hakim.azmetov@mail.ru