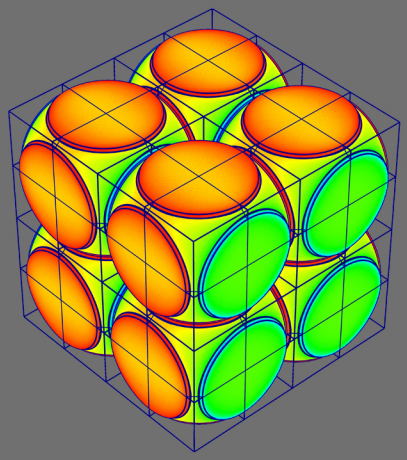
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Ерошин В.А., Плюснин А.В. Математические методы идентификации гидродинамических нагрузок при ударе о воду, основанные на одномерных теориях распространения упругих волн в стержнях. Математическое моделирование и численные методы, 2018, № 3, с. 67–94.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/173/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
23.11.2026 20:41:21

УДК 532.5.013.2+534.113

Математические методы идентификации гидродинамических нагрузок при ударе о воду, основанные на одномерных теориях распространения упругих волн в стержнях

© В.А. Ерошин[1], А.В. Плюснин[2, 3]

[1] НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119192, Россия
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[3] АО «ВПК «НПО машиностроения», Московская обл., Реутов, 143966 Россия

Задача о продольных и поперечных колебаниях упругого цилиндра, порожденных высокоскоростным ударом переднего торца о воду, рассмотрена с позиций идентификации гидродинамических сил по данным измерений оптическими методами параметров движения противоположного торца. Постановки прямой и обратной задач выведены исходя из одномерных теорий Сен-Венана и Тимошенко, что обеспечивает гиперболичность определяющих уравнений. Результаты расчетов прямой задачи конечно-разностным методом сопоставлены с располагаемыми экспериментальными зависимостями и демонстрируют довольно точное качественное совпадение.

Ключевые слова: *удар о воду, упругие волны, конечно-разностная схема.*

Введение. Задачи ударного взаимодействия тел с преградой представляют значительный практический интерес и в разных аспектах исследуются теоретическими (преимущественно численными методами решения общих уравнений механики сплошных сред с конечными деформациями [1-5], формулировки которых приведены, например, в работах [6-11]) и экспериментальными методами (например, [12-14]).

Летательные аппараты (ЛА) при приводнении на поверхность водной преграды или при проникании в глубину, как правило, испытывают кратковременное, но значительное силовое воздействие, характерное для ударных процессов, на участки корпуса, контактирующие с жидкостью. Уровень гидродинамического воздействия на корпус ЛА определяется, помимо скорости соударения, геометрической картиной взаимодействия: формой и пространственной ориентацией взаимодействующей с жидкостью части корпуса ЛА.

В научном плане основной интерес заключается в теоретическом и экспериментальном исследовании ударного взаимодействия с жидкостью тел канонической формы (пластина, диск, клин, конус, шар и т.д.) и получении универсальных зависимостей для гидродинамических сил в широком диапазоне других параметров, характеризующих взаимодействие [15-23].

В ситуациях, когда ставится задача дальнейшего движения ЛА в воде [24-28], простейшая форма передней части в виде диска или плоского торца оказывается практически значимой, несмотря на то, что она плохо обтекаема. Действительно, при значительной скорости движения ЛА с кромки плоского торца сходят струи и охватывают движущееся тело каверной. Если при этом не происходит бокового замыва, то на тело действует лишь гидродинамическая сила, перпендикулярная плоскости торца, причем при наличии угла атаки момент гидродинамических сил, вызванный несимметричным распределением давления, стремится этот угол атаки уменьшить (рис. 1). В плоском случае это легко видеть из численно-аналитического решения, приведенного в работе [29].

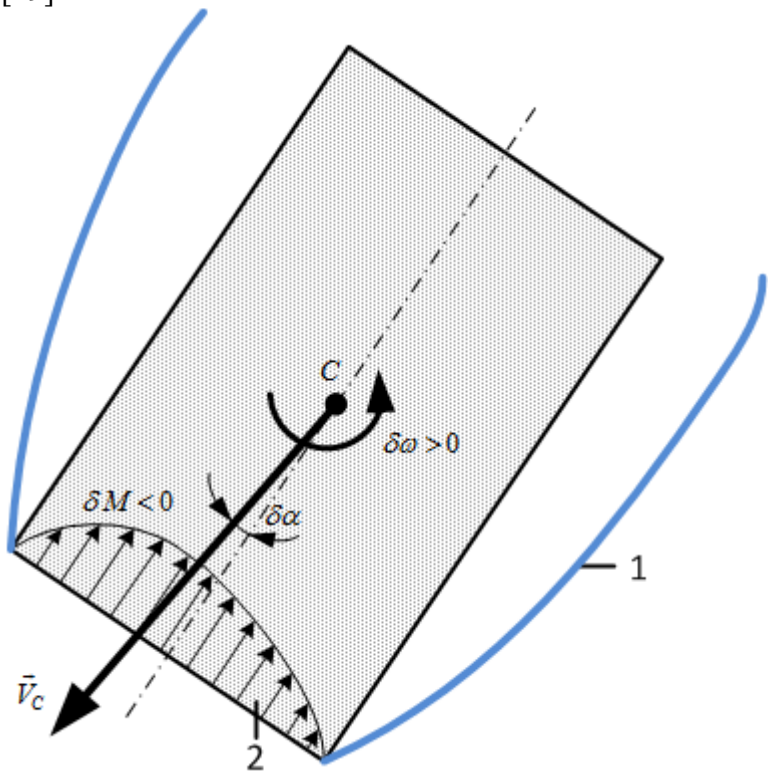


Рис.1. Несимметричное распределение давления на переднем торце цилиндра при угле атаки $\delta\alpha > 0$, порождающее восстанавливающий момент $\delta M < 0$ (1 – граница каверны, 2 – эпюра давления жидкости)

Результаты экспериментального определения сил, действующих на диск при погружении в воду, опубликованные в работах [20, 21], были получены в диапазоне скоростей удара до 7,5 м/с и до 3,5 м/с, соответственно, т.е. для чисел Маха по отношению к жидкости $\mathbf{M}_{ж} = \dfrac{V}{a_{ж}}$ не выше 0,005. Здесь V – скорость входа в жидкость, $a_{ж}$ –

скорость звука в жидкости (для воды полагаем $a_{ж}$=1500 м/с). На рис. 2*а* схематично изображена принципиальная картина постановки таких испытаний. В подобной же постановке с заменой воды на жидкость с пузырьками газа, в которой, как известно [6, 30], скорость звука намного ниже, были проведены испытания [22, 23, 31], в которых моделировался вход в воду с числами Маха до $\mathbf{M}_{ж}=0,2$ (рис. 2*б*).

Примерно для этого же диапазона чисел $\mathbf{M}_{ж}$ были проведены испытания [31-33], в которых модели выстреливались в воду, но измерялись не гидродинамические силы, а параметры возбуждения в модели упругих колебаний материала: продольные ускорение свободного торца [34] и угол поворота свободного торца [35]. Схематически постановка таких экспериментов иллюстрируется на рис. 3а, б. Определение ударных нагрузок по таким измерениям можно рассматривать математически как обратную задачу теории распространения упругих волн в сплошном однородном упругом цилиндрическом стержне.

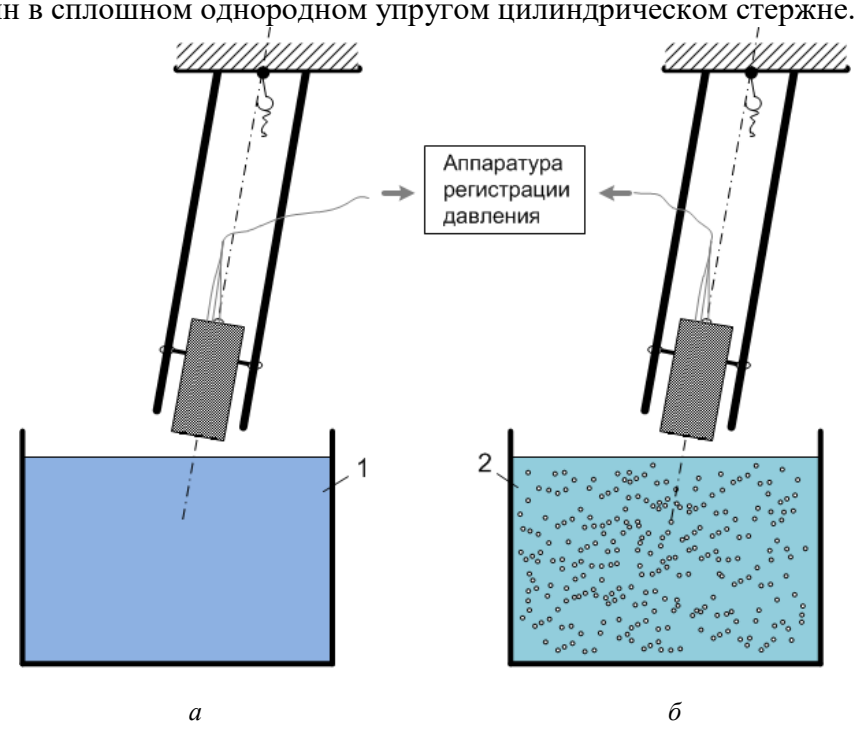
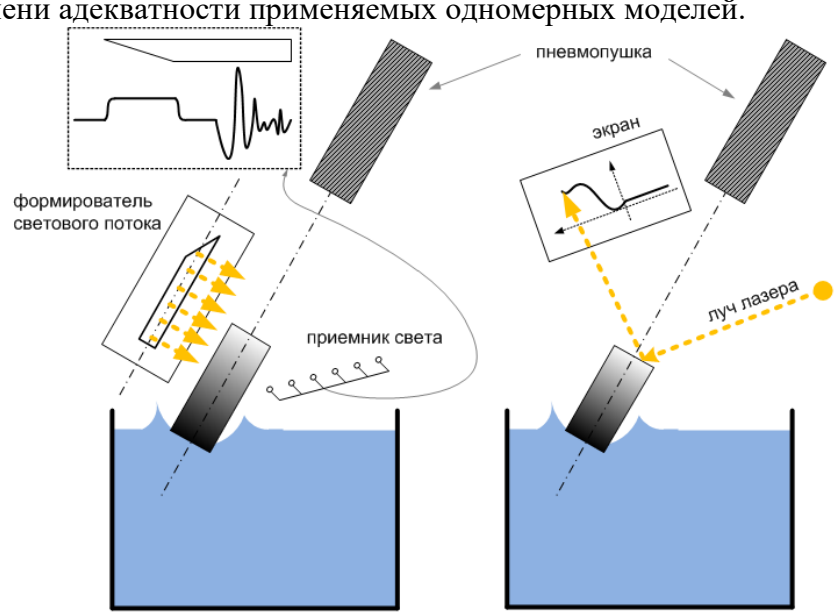


Рис.2. Принципиальная схема экспериментов при низкоскоростном проникании:
а – в воду, *б* – в жидкость с пузырьками газа

Проблематике решения обратных задач механики деформируемого твердого тела посвящены, например, работы [36-39]. В данной работе обратная задача определения гидродинамических сил рассматривается в рамках простейшего подхода, состоящего в использовании

одномерных теорий распространения продольных и поперечных волн в цилиндре. При этом рассматриваются также соответствующие прямые задачи, т.к. ценность решения обратных задач сильно зависит от степени адекватности применяемых одномерных моделей.



а *б*

Рис.3. Принципиальная схема измерений при высокоскоростном входе в воду: *а* – продольного ускорения свободного торца модели, *б* – угла поворота свободного торца модели

Одномерные теории распространения упругих волн в стержнях. До момента $t=0$ контакта ударного торца цилиндрического стержня длины L и радиуса R с поверхностью жидкости будем считать, что последняя невозмущена и что стержень движется в недеформированном состоянии равномерно со скоростью V_0 вдоль своей продольной оси. С таким движением стержня свяжем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$, обозначая ее орты как $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Ось Ox_1 совмещается с продольной осью стержня, а $x_1=0$ и $x_1=L$ – плоскости ударного и свободного торцев соответственно. Пусть, далее, $\tilde{O}$ – точка пересечения оси Ox_1 с невозмущенной поверхностью жидкости, а $\tilde{O}X_1X_2X_3$ – неподвижная прямоугольная система координат с ортами $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\varepsilon}_3$, координатная плоскость $\tilde{O}X_1X_3$ которой расположена на невозмущенной поверхности жидкости, а координатная ось $\tilde{O}X_2$ направлена вертикально вверх. Совмещая плоскость $X_3=x_3=0$ с плоскостью стрельбы Ox_1x_2 и полагая $\vec{e}_2=-\sin\theta\,\vec{\varepsilon}_1+\cos\theta\,\vec{\varepsilon}_2$, где θ – угол

входа, получаем однозначное определение связанной системы координат относительно неподвижной (рис.4).

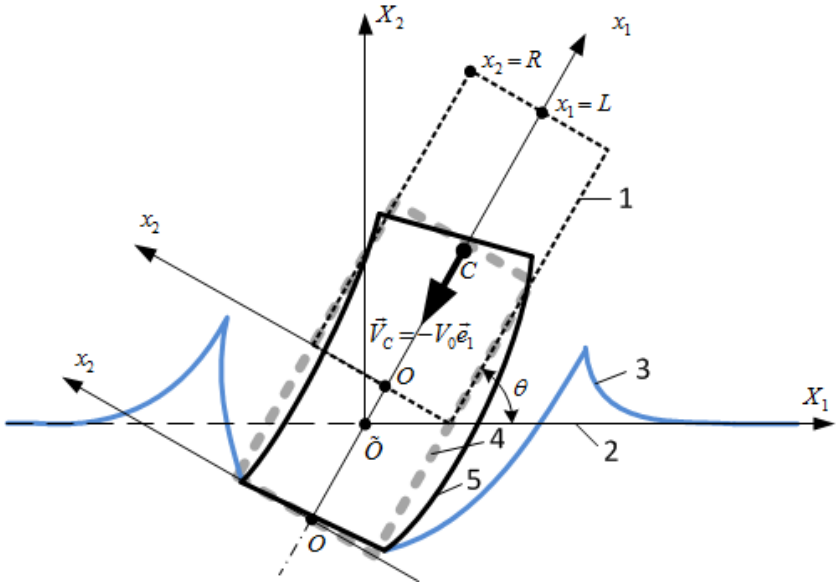


Рис. 4. Определение связанной и неподвижной систем координат (1,2 – невозмущенный уровень и деформация свободной поверхности жидкости, 3,4 – поверхность стержня до и в процессе ударного воздействия, 5 – момент касания стержнем поверхности жидкости)

При $t>0$ передний торец стержня взаимодействует с жидкостью. Пренебрегая вкладом вязкого трения, будем считать, что к ударному торцу приложено давление жидкости $p_{ж}\left(x_2, x_3, t\right)$. На свободный торец и боковую поверхность стержня гидродинамические силы в течение кратковременной ударной стадии проникании стержня не действуют. В таком случае линеаризованная задача определения деформационного движения материала стержня формулируется следующим образом [9]:

$$\left.\begin{array}{ll} \rho_m \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j}, & t>0,\ \vec{x}\in\Omega \\ u_i = \dot{u}_i = 0, & t=0,\ \vec{x}\in\Omega \\ \sigma_{ij} n_j \vec{e}_i = p_{ж}\vec{e}_1, & t>0,\ \vec{x}\in\Sigma_1 \\ \sigma_{ij} n_j \vec{e}_i = 0, & t>0,\ \vec{x}\in\Sigma_2 \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

где ρ_m – плотность материала стержня, $\vec{x} = x_i\vec{e}_i$, $\vec{u} = u_i\vec{e}_i$, $\dot{\vec{u}} = \dot{u}_i\vec{e}_i$, $\ddot{\vec{u}} = \ddot{u}_i\vec{e}_i$ – радиус-векторы, перемещения, скорости и ускорения его материаль-

ных частиц, $\vec{n}=n_i\vec{e}_i$ – вектор единичной внешней нормали к поверхности стержня, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, $r=\sqrt{x_2^2+x_3^2}$, $\Omega=\{0\le x_1\le L,\ r\le R\}$, $\Sigma_1=\{x_1=0,\ r\le R\}$, $\Sigma_2=\{0\le x_1\le L,\ r=R\}\cup\{x_1=L, r\le R\}$. В приведенных формулах подразумевается суммирование по повторяющимся индексам, причем запятая в индексах означает дифференцирование по координатам: $\sigma_{ij,j}\equiv\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}$ [9].

Осредним уравнения движения задачи (1), интегрируя их по поперечному сечению S стержня. Имеем:

$$\int\limits_{r\le R}\ddot{u}_i\left(\vec{x},t\right)dx_2dx_3=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{r\le R}u_i\left(\vec{x},t\right)dx_2dx_3=S\frac{\partial^2U_i\left(x_1,t\right)}{\partial t^2},$$

$$\int\limits_{r\le R}\sigma_{ij,j}\left(\vec{x},t\right)dx_2dx_3=\int\limits_{r\le R}\left[\sigma_{i1,1}\left(\vec{x},t\right)+\sigma_{i2,2}\left(\vec{x},t\right)+\sigma_{i3,3}\left(\vec{x},t\right)\right]dx_2dx_3=$$

$$=\frac{\partial T_i\left(x_1,t\right)}{\partial x_1}+\int\limits_{r=R}\left(\sigma_{i2}n_2+\sigma_{i3}n_2\right)ds=\frac{\partial T_i\left(x_1,t\right)}{\partial x_1}.$$

При выводе последнего соотношения был использован двумерный вариант интегральной формулы Гаусса – Остроградского и учтено отсутствие нагрузки на боковой поверхности стержня, для которой $n_1=0$. В результате $\int\limits_{r=R}\left(\sigma_{i2}n_2+\sigma_{i3}n_2\right)ds=\int\limits_{r=R}\sigma_{ij}n_jds=0$, где ds есть дифференциал длины дуги вдоль контура поперечного сечения стержня. Величины $U_i\left(x_1,t\right)=\dfrac{1}{S}\int\limits_{r\le R}u_i\left(\vec{x},t\right)dx_2dx_3$ означают средние смещения данного поперечного сечения вдоль координатных направлений, а величины $T_i\left(x_1,t\right)=\int\limits_{r\le R}\sigma_{i1}\left(\vec{x},t\right)dx_2dx_3$ являются компонентами главного вектора сил напряжений, действующих в этом сечении.

Симметрия входа стержня в воду относительно плоскости стрельбы позволяет принять предположение о симметричном распределении гидродинамической нагрузки. Учитывая это, ограничимся рассмотрением проекций уравнений движения на оси Ox_1 и Ox_2. Тогда имеем из предыдущих соотношений

$$\rho_mS\ddot{u}=N_{,1}, \tag{2}$$

$$\rho_m S\ddot{w} = Q_{,1}, \qquad (3)$$

где $u(x_1,t)\equiv U_1(x_1,t)$, $w(x_1,t)\equiv U_2(x_1,t)$ – среднее продольное и боковое смещения поперечных сечений стержня, $N(x_1,t)\equiv T_1(x_1,t)$, $Q(x_1,t)\equiv T_2(x_1,t)$ – нормальная и перерезывающая сила в этих сечениях.

Умножив уравнение движения, записанное в проекции на ось Ox_1, на координату x_2 и повторяя предыдущие выкладки, будем иметь:

$$\int\limits_{r\le R} x_2\ddot{u}_1(\vec{x},t)\,dx_2dx_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{r\le R} x_2u_1(\vec{x},t)\,dx_2dx_3,$$

$$\int\limits_{r\le R} x_2\sigma_{1j,j}(\vec{x},t)\,dx_2dx_3 = \int\limits_{r\le R}\left\{x_2\sigma_{11,1}+\left[\left(x_2\sigma_{12}\right)_{,2}+\left(x_2\sigma_{13}\right)_{,3}\right]-\sigma_{12}\right\}dx_2dx_3 =$$

$$=\frac{\partial M}{\partial x_1}-Q+\int\limits_{r=R} x_2\left(\sigma_{i2}n_2+\sigma_{i3}n_2\right)ds=\frac{\partial M}{\partial x_1}-Q.$$

Здесь $M(x_1,t)=\int\limits_{r\le R} x_2\sigma_{11}(\vec{x},t)\,dx_2dx_3$ – изгибный момент, действующий в рассматриваемом сечении.

Отклонению поперечного сечения с координатой x_1 на угол $\psi(x_1,t)$ вокруг оси $O_{(x_1)}x_3$, проходящей через центр $O_{(x_1)}$ этого сечения параллельно оси Ox_3, соответствует распределение осевого перемещения $u_1(x_1,x_2,x_3,t)=-x_2\psi(x_1,t)$, так что

$$\int\limits_{r\le R} x_2u_1(\vec{x},t)\,dx_2dx_3 = -\psi\int\limits_{r\le R} x_2^2dx_2dx_3 = -J_m\psi,$$

где $J_m=\int\limits_{r\le R} x_2^2dx_2dx_3=\frac{\pi R^4}{4}$ – момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси $O_{(x_1)}x_3$. В общем случае, когда могут происходить искажения поперечных сечений, примем формулу $\psi(x_1,t)=-\frac{1}{J_m}\int\limits_{r\le R} x_2u_1(\vec{x},t)\,dx_2dx_3$ за определение среднего угла поворота сечения относительно данной оси. В итоге приходим к уравнению

$$\rho_m J_m \ddot{\psi} = -\frac{\partial M}{\partial x_1} + Q\,. \tag{4}$$

Уравнения (2) – (4) точны по отношению к исходным соотношениям (1), но для их замыкания требуется связать обобщенные перемещения u, w, ψ с обобщенными силами N, Q, M. Однако точных простых зависимостей в этом случае найти не удается [40]. Простейшие приближенные модели для описания продольных и поперечных (изгибных) упругих волн в стержнях, соответствующие уравнениям гиперболического типа, основаны на соотношениях

$$N\left(x_1,t\right) = ESu_{,1} \tag{5}$$

$$M\left(x_1,t\right) = -EJ_m\psi_{,1}\,, \tag{6}$$

$$Q\left(x_1,t\right) = \kappa\mu S\left(w_{,1} - \psi\right). \tag{7}$$

В уравнениях (5) – (7) E, μ – модули продольной упругости и сдвига.

Формулу (5) можно рассматривать как результат интегрирования по поперечному сечению формулы $\sigma_{11}\left(\vec{x}\right) = E\varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1\left(\vec{x}\right)}{\partial x_1}$, справедливой в условиях статического продольного деформирования стержня (величина ε_{11} есть компонента тензора малых деформаций, характеризующая относительное удлинение вдоль оси стержня). При распространении продольных волн в стержне данное предположение не является точным, но хорошо работает для длинных волн. Уравнения (2), (5) приводят к теории Сен-Венана продольных волн в стержне:

$$\ddot{u} = c_E^2 u_{,11}\,, \tag{8}$$

где $c_E = \sqrt{\dfrac{E}{\rho_m}}$ – стержневая скорость продольных волн.

Соотношение (6) имеет те же основания, что и формула (5), именно: $M\left(x_1\right) = E\int\limits_{r\le R} x_2 \dfrac{\partial u_1\left(\vec{x}\right)}{\partial x_1} dx_2 dx_3 = -EJ_m \dfrac{\partial \psi\left(x_1\right)}{\partial x_1}$. Для вывода формулы (7) требуется более глубокий анализ [40,41]. Коэффициент κ служит поправкой к предположениям о распределении напряжений в сечении стержня. Полученное в работе [40] выражение $\kappa = \dfrac{6\left(1+\nu\right)}{7+6\nu}$,

где $\nu = \frac{E}{2\mu} - 1$ есть коэффициент Пуассона, подкрепляется рассмотрением нетривиальных частных решений. Этим выражением мы и будем пользоваться в данной работе. Из уравнений (3), (4), (6), (7) получаем в итоге систему уравнений балки Тимошенко:

$$\left.\begin{aligned} &\rho_m J_m \ddot{\psi} = EJ_m \psi_{,11} + \kappa\mu S\left(w_{,1} - \psi\right) \\ &\rho_m \ddot{w} = \kappa\mu\left(w_{,11} - \psi_{,1}\right) \end{aligned}\right\}.$$

Легко видеть, что исходная постановка задачи (1) распадается на две подсистемы, описывающие независимо друг от друга продольные и изгибные колебания стержня. Таким образом, для определения параметров продольных колебаний стержня, вызванных действием гидродинамической силы $F_{ж}(t) = \int\limits_{r \le R} p_{ж}(x_2, x_3, t)\, dx_2 dx_3 = -N(0,t)$ на ударный торец, требуется решить задачу

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{u} = c_E^2 u_{,11}, && t>0,\ x_1 \in [0;L] \\ &u = \dot{u} = 0, && t=0,\ x_1 \in [0;L] \\ &ESu_{,1}(0,t) = -F_{ж}(t), && t>0 \\ &u_{,1}(L,t) = 0, && t>0 \end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

Аналогичным образом, для определения параметров изгибных колебаний стержня, вызванных действием момента гидродинамической силы $M_{ж}(t) = \int\limits_{r \le R} x_2 p_{ж}(x_2, x_3, t)\, dx_2 dx_3 = -M(0,t)$ на ударный торец, требуется решить задачу

$$\left.\begin{aligned} &\rho_m J_m \ddot{\psi} = EJ_m \psi_{,11} + \kappa\mu S\left(w_{,1} - \psi\right), && t>0,\ 0 \le x_1 \le L \\ &\rho_m \ddot{w} = \kappa\mu\left(w_{,11} - \psi_{,1}\right), && t>0,\ 0 \le x_1 \le L \\ &\psi(x_1,0) = \dot{\psi}(x_1,0) = 0, && 0 \le x_1 \le L \\ &w(x_1,0) = \dot{w}(x_1,0) = 0, && 0 \le x_1 \le L \\ &EJ_m \psi_{,1} = -M_{ж}(t),\ w_{,1} = \psi, && t>0,\ x_1 = 0 \\ &\psi_{,1} = 0,\ w_{,1} = \psi, && t>0,\ x_1 = L \end{aligned}\right\}. \qquad (10)$$

Прямая и обратная задачи для уравнений продольных колебаний. Ввиду возможности определять в эксперименте по ударному

входу в воду скорости свободного торца модели, естественно воспользоваться решением задачи (9) для проведения расчетов с предполагаемыми зависимостями $F_{ж}(t)$ и сравнения получаемых результатов с экспериментальными кривыми. Более того, естественно рассматривать также и обратную задачу: по измеренным в эксперименте скоростям свободного торца модели определить вызвавшую такое движение торца гидродинамическую нагрузку.

Общее решение уравнения (8) дается формулой Даламбера. Используя ее, легко методом отражений [42] построить аналитическое решение задачи (9). Но если пользоваться методом интегральных преобразований, можно одновременно решить и обратную задачу. Кроме того, попутно получается и мотивировка подхода к рассмотрению обратной задачи и для более трудного случая изгибных колебаний.

Перейдем в соотношениях (9) к изображениям по Лапласу:

$$u(x_1,t) \doteq U(x_1,\sigma),\ F_{ж}(t) \doteq \Phi_{ж}(\sigma),$$

где, например, $U(x_1,\sigma)=\int_0^{\infty} u(x_1,\tau)e^{-\sigma\tau}\,d\tau$. При этом получается уравнение:

$$U_{,11}(x_1,\sigma)-\frac{\sigma^2}{c_E^2}U(x_1,\sigma)=0$$

с граничными условиями

$$U_{,1}(0,\sigma)=-\frac{\Phi_{ж}(\sigma)}{ES} \text{ и } U_{,1}(L,\sigma)=0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$U(x_1,\sigma)=C_1(\sigma)e^{\frac{\sigma x_1}{c_E}}+C_2(\sigma)e^{-\frac{\sigma x_1}{c_E}},$$

а для определения коэффициентов $C_1(\sigma)$, $C_2(\sigma)$ из граничных условий следуют соотношения

$$\frac{\sigma}{c_E}C_1-\frac{\sigma}{c_E}C_2=-\frac{\Phi_{ж}(\sigma)}{ES} \text{ и } \frac{\sigma}{c_E}C_1e^{\frac{\sigma L}{c_E}}-\frac{\sigma}{c_E}C_2e^{-\frac{\sigma L}{c_E}}=0.$$

Таким образом, для перемещений решение в изображениях имеет вид

$$U\left(x_1,\sigma\right)=\frac{\Phi_{ж}\left(\sigma\right)}{\rho_m c_E S\sigma}\frac{e^{-\frac{2\sigma L}{c_E}}e^{\frac{\sigma x_1}{c_E}}+e^{-\frac{\sigma x_1}{c_E}}}{1-e^{-\frac{2\sigma L}{c_E}}}.$$

Изображения для скоростей поперечных сечений стержня получаются как $v\left(x_1,t\right)\equiv\dot{u}\left(x_1,t\right)\doteq sU\left(x_1,s\right)\equiv V\left(x_1,s\right)$. Следовательно, для смещения и скорости свободного торца имеем

$$\begin{aligned}U\left(L,\sigma\right)&=\frac{2\Phi_{ж}\left(\sigma\right)}{\rho_m c_E S\sigma}\frac{e^{-\frac{\sigma L}{c_E}}}{1-e^{-\frac{2\sigma L}{c_E}}},\\ V\left(L,\sigma\right)&=\frac{2\Phi_{ж}\left(\sigma\right)}{\rho_m c_E S}\frac{e^{-\frac{\sigma L}{c_E}}}{1-e^{-\frac{2\sigma L}{c_E}}}.\end{aligned}\quad,\qquad(11)$$

Используя правила обращения для преобразования Лапласа, находим соответствующие этим выражениям оригиналы:

$$\begin{aligned}u\left(L,t\right)&=\frac{2}{\rho_m c_E S}\sum_{k\in\mathbb{N}}I_{ж}\left[t-\left(2k-1\right)\frac{L}{c_E}\right],\\ v\left(L,t\right)&=\frac{2}{\rho_m c_E S}\sum_{k\in\mathbb{N}}F_{ж}\left[t-\left(2k-1\right)\frac{L}{c_E}\right].\end{aligned}\quad,\qquad(12)$$

Здесь суммирование проводится по множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, а $I_{ж}\left(t\right)=\int_0^t F_{ж}\left(\tau\right)d\tau$ есть импульс гидродинамической силы. Заметим, что $F_{ж}\equiv I_{ж}\equiv 0$ при отрицательных значениях аргумента.

Пусть теперь $v_{изм}\left(t\right)$ – измеренная в эксперименте скорость свободного торца, т.е. $\dot{u}\left(L,t\right)=v_{изм}\left(t\right)$. В рамках стержневой теории фронт возмущения, вызванного началом взаимодействия стержня с жидкостью, приходит на свободный торец в момент $t=\frac{L}{c_E}$. Это значит, что при $0\le t<\frac{L}{c_E}$ имеем $v_{изм}\left(t\right)\equiv 0$. Это мотивирует введение обозначения

$$w_{изм}(t)=v_{изм}\left(t+\frac{L}{c_E}\right). \tag{13}$$

Перепишем это соотношение в изображениях $\left(V(L,\sigma)=V_{изм}(\sigma)\doteq v_{изм}(t)\right)$:

$$\begin{gathered} w_{изм}(t)\doteq W_{изм}(\sigma)=\int_0^\infty v_{изм}\left(\tau+\frac{L}{c_E}\right)e^{-\sigma\tau}\,d\tau= \\ =\int_{\frac{L}{c_E}}^\infty v_{изм}(\tilde{\tau})e^{-\sigma\left(\tilde{\tau}-\frac{L}{c_E}\right)}\,d\tilde{\tau}=e^{\frac{\sigma L}{c_E}}\int_0^\infty v_{изм}(\tilde{\tau})e^{-\sigma\tilde{\tau}}\,d\tilde{\tau}=e^{\frac{\sigma L}{c_E}}V_{изм}(\sigma). \end{gathered} \tag{14}$$

Исключив из соотношений (11) и (14) $V_{изм}(\sigma)$, находим

$$\Phi_{ж}(\sigma)=\frac{1}{2}\rho c_E\left(1-e^{-\frac{2\sigma L}{c_E}}\right)W_{изм}(\sigma). \tag{15}$$

Возвращаясь к оригиналам, получаем решение обратной задачи:

$$p(t)=\frac{1}{2}\rho c_E\left(w_{изм}(t)-w_{изм}\left(t+\frac{2L}{c_E}\right)\right),$$

где $w_{изм}(t)$ определяется согласно формуле (13).

Остается обсудить формулу (15). В задаче (9), являющейся линейной, все соотношения являются однородными, кроме одного, определяемого некоторой функцией χ. В нашем случае этим соотношением является граничное условие на ударном торце. Следовательно, искомое решение в некотором смысле является пропорциональным функции χ (в смысле представления его в виде интеграла Дюамеля – свертки данной функции χ с фундаментальным решением, соответствующим замене функции χ на функцию Хевисайда или ее обобщенную производную – дельта-функцию Дирака). В изображениях дифференциальные зависимости переходят в алгебраические, и изображения искомого решения и функции χ оказываются пропорциональными в обычном смысле. Этим обстоятельством обеспечивается получение соотношений типа (15). В стержневой теории его удается обратить явно, в случае теории Тимошенко для изгибных колебаний

такой возможности нет, но обращение преобразования Лапласа можно выполнять посредством численных процедур.

Прямая и обратная задачи для уравнений изгибных колебаний. При несимметричном входе стержня в жидкость (угол входа отличен от вертикального) распределение давления жидкости по ударному торцу приводится относительно точки O к нормальной силе $F_{ж}(t)$ и к моменту $M_{ж}(t)$ вокруг оси Ox_3 (углы атаки и скольжения считаются равными нулю). Под действием момента гидродинамических сил в материале стержня возбуждаются изгибные колебания в плоскости стрельбы Ox_1x_2. В рамках одномерной модели изгибных колебаний по теории Тимошенко имеем задачу (10). В общем случае решения данной задачи невозможно представить в замкнутой аналитической форме и данную систему уравнений приходится решать численно.

Благодаря гиперболическому типу [43], задача (10) корректно поставлена и хорошо интегрируется численно методом конечных разностей. Перепишем систему (10) в безразмерных переменных $\overline{t}=\dfrac{c_E t}{R}$, $\overline{x}=\dfrac{x_1}{R}$, $\overline{u}=\dfrac{u}{R}$, $\overline{w}=\dfrac{w}{R}$, $\overline{L}=\dfrac{L}{R}$, $\overline{M}=\dfrac{M(x_1,t)R}{EJ}$, $\overline{Q}=\dfrac{Q(x_1,t)}{\kappa\mu S}$. Тогда при $\overline{t}>0$ и $0<\overline{x}<\overline{L}$ требуется найти решение системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial\overline{t}^{\,2}}&=\frac{\partial^2\psi}{\partial\overline{x}^{\,2}}+A\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{x}}-\psi\right)\\ \frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\overline{t}^{\,2}}&=B\left(\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\overline{x}^{\,2}}-\frac{\partial\psi}{\partial\overline{x}}\right)\end{aligned}\right\},\qquad(16)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{aligned}\psi(\overline{x},0)&=\psi_0(\overline{x}),\ \frac{\partial\psi}{\partial\overline{t}}(\overline{x},0)=\psi_1(\overline{x})\\ \overline{w}(\overline{x},0)&=\overline{w}_0(\overline{x}),\ \frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{t}}(\overline{x},0)=\overline{w}_1(\overline{x})\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}(0,\bar{t})=-\bar{M}_1(\bar{t}),\ \ \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}(0,\bar{t})-\psi(0,\bar{t})=\bar{Q}_1(\bar{t})\\ \frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}(\bar{L},\bar{t})=-\bar{M}_2(\bar{t}),\ \ \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}(\bar{L},\bar{t})-\psi(\bar{L},\bar{t})=\bar{Q}_2(\bar{t})\end{aligned}\right\}. \qquad (18)$$

Формулы (6), (7) в безразмерных переменных имеют вид

$$\bar{M}(\bar{x},\bar{t})=-\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}},\ \bar{Q}(\bar{x},\bar{t})=\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}-\psi\,.$$

Коэффициенты A, B в уравнениях (16) определяются как

$$B=\frac{\kappa\mu}{E},\quad A=B\frac{SR^2}{J}=4B,$$

поскольку $S=\pi R^2$, $J=\dfrac{\pi R^4}{4}$. Введение функций $\psi_{0,1}(\bar{x})$, $\bar{w}_{0,1}(\bar{x})$, $\bar{M}_{1,2}(\bar{t})$, $\bar{Q}_{1,2}(\bar{t})$ придает условиям (17), (18) бóльшую общность и позволяет проводить детальное тестирование разностной схемы.

Уравнения (16) аппроксимировались на равномерной сетке по $\bar{x}$ и $\bar{t}$ центральными разностями. При аппроксимации начальных и граничных условий по необходимости использовались односторонние разности, затем, на основании анализа разложений в ряды методом [44], выявлялись поправки к разностным аппроксимациям, обеспечивающие точность второго порядка. Результирующая явная трехслойная разностная схема имеет следующий вид [32,45]. Для внутренних узлов $\bar{x}_j=jh$, где $h=\dfrac{\bar{L}}{n_{\bar{x}}}$, $j=1,2,..n_{\bar{x}}-1$, и моментов времени $\bar{t}_k=k\tau$, где $k=1,2,..$, решение на следующем временнóм слое $\bar{t}_{k+1}$ вычисляется по формулам

$$\left.\begin{aligned}\psi_j^{k+1}&=2\psi_j^k-\psi_j^{k-1}+\frac{\tau^2}{h^2}\left(\psi_{j+1}^k-2\psi_j^k+\psi_{j-1}^k\right)+\frac{A\tau^2}{2h}\left(\bar{w}_{j+1}^k-\bar{w}_{j-1}^k-2h\psi_j^k\right)\\ \bar{w}_j^{k+1}&=2\bar{w}_j^k-\bar{w}_j^{k-1}+\frac{B\tau^2}{h^2}\left(\bar{w}_{j+1}^k-2\bar{w}_j^k+\bar{w}_{j-1}^k\right)-\frac{B\tau^2}{2h}\left(\psi_{j+1}^k-\psi_{j-1}^k\right)\end{aligned}\right\}. \qquad (19)$$

Начальные условия на слое $\bar{t}_0=0$ вычисляются как

$$\psi_j^0=\psi_0(\bar{x}_j),\ \bar{w}_j^0=\bar{w}_0(\bar{x}_j) \qquad (20)$$

во всех $n_{\bar{x}}+1$ узлах $\bar{x}_j$ $\left(j=0,1,..n_{\bar{x}}\right)$. На предшествующем слое $\bar{t}_{-1}=-\tau$ используются соотношения

$$\left.\begin{aligned}\psi_j^{-1}&=\psi_j^0-\tau\psi_1\left(\bar{x}_j\right)+\frac{\tau^2}{2}\left[\frac{d^2\psi_0}{d\bar{x}^2}\left(\bar{x}_j\right)+A\left(\frac{d\bar{w}_0}{d\bar{x}}\left(\bar{x}_j\right)-\psi_0\left(\bar{x}_j\right)\right)\right]\\ \bar{w}_j^{-1}&=\bar{w}_j^0-\tau\bar{w}_1\left(\bar{x}_j\right)+\frac{B\tau^2}{2}\left[\frac{d^2\bar{w}_0}{d\bar{x}^2}\left(\bar{x}_j\right)-\frac{d\psi_0}{d\bar{x}}\left(\bar{x}_j\right)\right]\end{aligned}\right\}. \quad (21)$$

Сеточные значения в граничных узлах при $k=1,2,..$ вычисляются по разностным соотношениям

$$\left.\begin{aligned}\psi_0^{k+1}&=\frac{1}{1+\frac{h^2}{2\tau^2}}\left[\begin{array}{c}\psi_1^{k+1}+\frac{h^2}{2\tau^2}\left(2\psi_0^k-\psi_0^{k-1}\right)+h\bar{M}_1\left(\bar{t}_{k+1}\right)+\\ +\frac{Ah^2}{2}\bar{Q}_1\left(\bar{t}_{k+1}\right)\end{array}\right]\\ \psi_{n_{\bar{x}}}^{k+1}&=\frac{1}{1+\frac{h^2}{2\tau^2}}\left[\begin{array}{c}\psi_{n_{\bar{x}}-1}^{k+1}+\frac{h^2}{2\tau^2}\left(2\psi_{n_{\bar{x}}}^k-\psi_{n_{\bar{x}}}^{k-1}\right)-h\bar{M}_2\left(\bar{t}_{k+1}\right)+\\ +\frac{Ah^2}{2}\bar{Q}_2\left(\bar{t}_{k+1}\right)\end{array}\right]\\ \bar{w}_0^{k+1}&=\frac{1}{1+\frac{h^2}{2B\tau^2}}\left[\begin{array}{c}\bar{w}_1^{k+1}+\frac{h^2}{2B\tau^2}\left(2\bar{w}_0^k-\psi_0^{k-1}\right)-h\psi_0^{k+1}-\\ -h\bar{Q}_1\left(\bar{t}_{k+1}\right)+\frac{h^2}{2}\bar{M}_1\left(\bar{t}_{k+1}\right)\end{array}\right]\\ \bar{w}_{n_{\bar{x}}}^{k+1}&=\frac{1}{1+\frac{h^2}{2B\tau^2}}\left[\begin{array}{c}\bar{w}_{n_{\bar{x}}-1}^{k+1}+\frac{h^2}{2B\tau^2}\left(2\bar{w}_{n_{\bar{x}}}^k-\psi_{n_{\bar{x}}}^{k-1}\right)+h\psi_{n_{\bar{x}}}^{k+1}+\\ +h\bar{Q}_2\left(\bar{t}_{k+1}\right)+\frac{h^2}{2}\bar{M}_2\left(\bar{t}_{k+1}\right)\end{array}\right]\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Примеры расчетов по разностной схеме (19) – (22) представлены ниже в сравнении с экспериментальными данными (рис. 5-6) и демонстрируют довольно точное качественное совпадение волновых картин.

Для решения обратной задачи использование разработанной разностной схемы проблематично. Действительно, считая зависимость $\bar{M}_1\left(\bar{t}\right)$ искомой, а угол поворота свободного торца известным из эксперимента как $\psi\left(\bar{L},\bar{t}\right)=\psi_{эксп}\left(\bar{L},\bar{t}\right)$, будем иметь вместо соотношений

(18), где в нашем случае $\overline{M}_1(\overline{t})=\overline{M}_{ж}(\overline{t})$, $\overline{M}_2(\overline{t})=\overline{Q}_{1,2}(\overline{t})\equiv 0$, систему граничных условий

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{x}}(0,\overline{t})=\psi(0,\overline{t})\\
&\frac{\partial\psi}{\partial\overline{x}}(\overline{L},\overline{t})=0\\
&\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{x}}(\overline{L},\overline{t})=\psi(\overline{L},\overline{t})\\
&\psi(\overline{L},\overline{t})=\psi_{эксп}(\overline{t})
\end{aligned}\right\}. \qquad (23)$$

Легко, однако, видеть, что второе соотношение системы разностных уравнений (22) оказывается достаточным для вычисления значения $\psi_{n_{\overline{x}}}^{k+1}\cong\psi(\overline{L},\overline{t}_{k+1})=\psi_{эксп}(\overline{t}_{k+1})$. Это означает, что три граничных условия системы (23), относящиеся к свободному торцу, образуют переопределенную подсистему. При этом на ударном торце получается недостача граничных условий. Хотя, в принципе, это может быть как-то использовано, но, ввиду отмеченной выше переопределенности условий на правой границе, следует ожидать неустойчивости вычислений. Поэтому, чтобы реализовать вычисления с граничными условиями (23), понадобится, как минимум, разрабатывать некоторые регуляризующие процедуры.

Другой подход к решению обратной задачи состоит в применении метода интегральных преобразований в целях получения зависимости изображения $M_1(s)\doteq\overline{M}_1(\overline{t})$ искомого момента гидродинамических сил от изображения $\Psi(\overline{L},s)\doteq\psi(\overline{L},\overline{t})$ экспериментально измеряемого угла поворота свободного торца цилиндра и в последующем численном обращении этой зависимости.

В изображениях по Лапласу вместо уравнений (16) - (18) имеем соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Psi}{\partial\overline{x}^2}+A\frac{\partial W}{\partial\overline{x}}=(s^2+A)\Psi\\
&B\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\overline{x}^2}-\frac{\partial\Psi}{\partial\overline{x}}\right)=s^2W
\end{aligned}\right\}, \qquad (24)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Psi}{\partial\overline{x}}(0,s)=-M_1(s),\ \ \frac{\partial W}{\partial\overline{x}}(0,s)=\Psi(0,s)\\ &\frac{\partial\Psi}{\partial\overline{x}}(\overline{L},s)=0,\ \ \frac{\partial W}{\partial\overline{x}}(\overline{L},s)=\Psi(\overline{L},s)\end{aligned}\right\}. \qquad (25)$$

Система уравнений (24) является однородной, и ее общее решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \Psi(\overline{x},s)&=\sum_{j=1}^{4}C_j e^{k_j(s)\overline{x}}\\ W(\overline{x},s)&=\sum_{j=1}^{4}D_j e^{k_j(s)\overline{x}}\end{aligned}\right\}, \qquad (26)$$

причем

$$D_j=-\frac{k_j B}{s^2-k_j^2 B}C_j,$$

$$k_{1,2}(s)=\pm\frac{s}{\sqrt{2}}\sqrt{1+B^{-1}+\sqrt{\left(B^{-1}-1\right)^2-\frac{16}{s^2}}},$$

$$k_{3,4}(s)=\pm\frac{s}{\sqrt{2}}\sqrt{1+B^{-1}-\sqrt{\left(B^{-1}-1\right)^2-\frac{16}{s^2}}}.$$

В результате подстановки выражений (26) в (25) получаем систему линейных уравнений относительно коэффициентов C_j:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{4}k_j C_j=M_1(s)\\ &\sum_{j=1}^{4}k_j e^{k_j(s)\overline{L}}C_j=0\\ &\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{s^2-k_j^2 B}C_j=0\\ &\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{s^2-k_j^2 B}e^{k_j\overline{L}}C_j=0\end{aligned}\right\},$$

решая которую, находим искомую связь между изображениями $M_1(s)$

и $\Psi_L(s)=e^{\bar{L}s}\Psi(\bar{L},s)\doteq\psi(\bar{L},\bar{t}+\bar{L})\equiv\psi_L(\bar{t})$:

$$M_1(s)=\Upsilon(s)\Psi_L(s), \tag{27}$$

где

$$\Upsilon(s)=2k_1k_3\left[\frac{1-ch(k_1\bar{L})ch(k_3\bar{L})}{Be^{\bar{L}s}(k_1^2-k_3^2)\left[\frac{k_3sh(k_1\bar{L})}{s^2-k_1^2B}-\frac{k_1sh(k_3\bar{L})}{s^2-k_3^2B}\right]}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(k_1^2\frac{s^2-k_1^2B}{s^2-k_3^2B}+k_3^2\frac{s^2-k_3^2B}{s^2-k_1^2B}\right)sh(k_1\bar{L})sh(k_3\bar{L})}{Be^{\bar{L}s}(k_1^2-k_3^2)\left[\frac{k_3sh(k_1\bar{L})}{s^2-k_1^2B}-\frac{k_1sh(k_3\bar{L})}{s^2-k_3^2B}\right]}\right].$$

Для нахождения искомого оригинала $\bar{M}_1(\bar{t})$ требуется численно вычислить интеграл

$$\bar{M}_1(\bar{t})=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Upsilon(s)\Psi_L(s)e^{s\bar{t}}ds, \tag{28}$$

где c – положительная постоянная, выбираемая так, чтобы особые точки ядра интегрирования оставались слева от прямой $\mathrm{Re}\,s=c$ комплексной плоскости s.

Аналогичным образом можно записать формулу обращения для $\Psi_L(s)$:

$$\psi_L(\bar{t})=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Upsilon^{-1}(s)M_1(s)e^{s\bar{t}}ds. \tag{29}$$

Пользуясь этой формулой, можно вычислять значения угла поворота свободного торца модели независимо от ранее описанного метода конечных разностей, что использовалось в работе [45] для тестирования разностной схемы. Эта формула, не будучи конкурентоспособной со схемой (19) - (22) в смысле эффективности, позволяет, однако, произвести вычисления для любого отдельно взятого момента времени.

Отметим, что вычисления по формуле (28), выполнять намного сложнее, чем по внешне схожей с ней формуле (29). Это не удивительно, поскольку типичным при решении обратных задач является применение того или иного способа регуляризации [46]. В случае формулы (29) функция $\Upsilon^{-1}(s)$ полюсов в правой полуплоскости не имеет, но она имеет нули в полосе $0<\mathrm{Re}\, s<\dfrac{4}{B^{-1}-1}$, являющиеся полюсами функции $\Upsilon(s)$ [45]. Из анализа соотношения (27) видно, что в тех же точках у функция $\Psi_L(s)$ имеются нули, компенсирующие особенности $\Upsilon(s)$. К сожалению, функция $\Psi_L(s)$ не может быть известна точно, поскольку представляет собой численное изображение по Лапласу получаемой из эксперимента, т.е. неточно известной, зависимости $\psi_L(\bar{t})$.

Некоторые результаты. На рис. 5 представлены примеры результатов регистрации углов поворота свободного, зеркального торца моделей, полученные в испытаниях, проводившихся по схеме рис. 3б [32, 45]. Соответствующие расчетные зависимости построены на рис. 6 в координатах (ξ,η) плоскости экрана [45]:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{2\sin\varphi\left[l_э\cos\varphi\sin^2\psi(L,t)+f(t)\cos^2\psi(L,t)\right]}{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos 2\psi(L,t)}\\ \eta&=\frac{\left[l_э\cos\varphi+f(t)\cos 2\varphi\right]\sin 2\psi(L,t)}{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos 2\psi(L,t)}\end{aligned}\right\}. \qquad (30)$$

В этих формулах φ – угол между лучом лазера от источника и осью канала ствола, $l_э$ – расстояние от точки пересечения этих направлений (точка юстировки) до экрана (рис. 3*б*), $f(t)=V_0t-u(L,t)-w(L,t)\,\mathrm{tg}\,\psi(L,t)$.

Расчеты проводились по формулам (12), (19) – (22), (30) для зависимостей $F_{ж}(t)$, $M_{ж}(t)$ гидродинамической силы и момента, полученных в работах [20, 21].

Зависимость $\tilde{M}(s)=\dfrac{M_{ж}(t)}{\rho_{ж}V_0^2\pi R^3}$, где $s=\dfrac{V_0t}{2R}\mathrm{tg}\,\theta$, аппроксимировалась дугами парабол:

$$\tilde{M}_z(s)=\begin{cases}\tilde{M}_z^{\max}\left[1-\left(\dfrac{s-s_{\max}}{s_{\max}}\right)^2\right], & 0\le s<s_{\max}\\ \tilde{M}_z^{\max}\left[1-\left(\dfrac{s-s_{\max}}{s_{01}-s_{\max}}\right)^2\right], & s_{\max}\le s<s_{01}\\ -\tilde{M}_z^{\min}\left[1-\left(\dfrac{s-s_{\min}}{s_{01}-s_{\min}}\right)^2\right], & s_{01}\le s<s_{\min}\\ -\tilde{M}_z^{\min}\left[1-\left(\dfrac{s-s_{\min}}{s_{02}-s_{\min}}\right)^2\right], & s_{\min}\le s<s_{02}\\ 0, & s\ge s_{02}\end{cases}, \qquad (31)$$

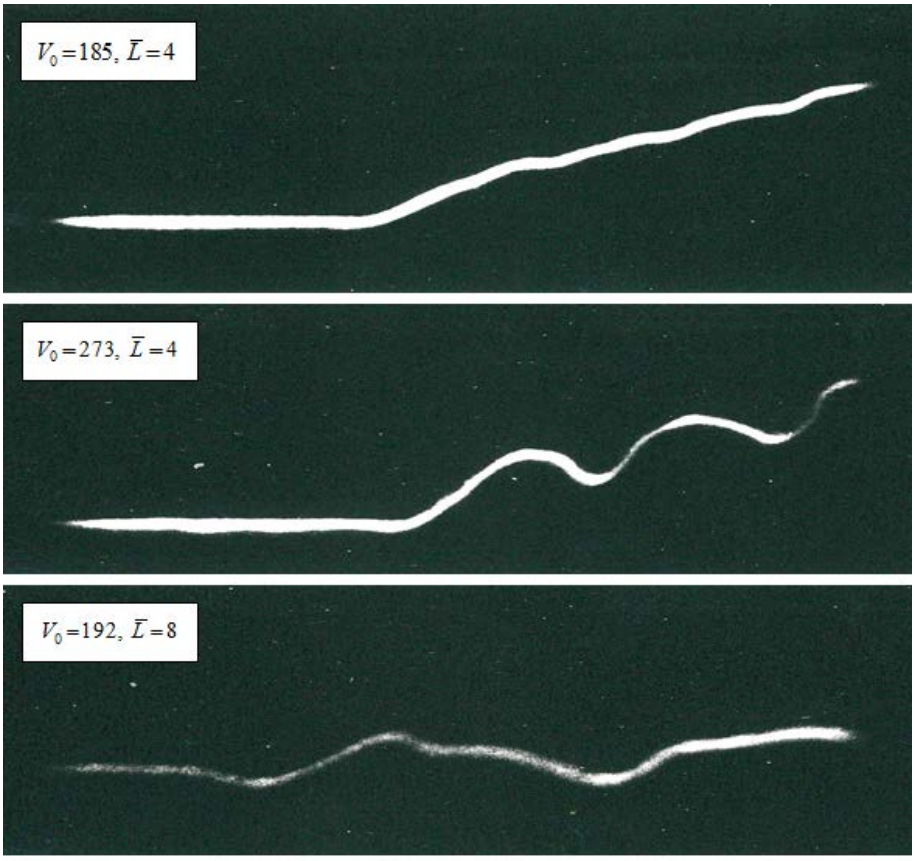


Рис. 5. Примеры осциллограмм регистрации изгибных колебаний свободного торца модели (V_0 в м/с, $\theta=60^\circ$)

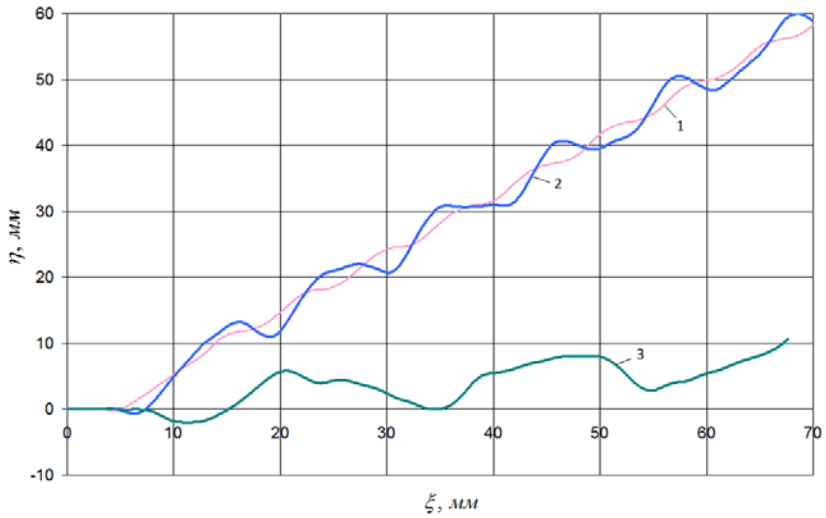


Рис. 6. Расчетные зависимости углов поворота свободного торца модели при изгибных колебаниях, вызванных прониканием в воду
(1 – V_0 =185, $\bar{L}=4$; 2 – $V_0=273$, $\bar{L}=4$; 3 – V_0 =192, $\bar{L}=8$)

Коэффициенты зависимости (31) подбирались в соответствии с результатами работы [21]. Данные, соответствующие углу входа $\theta=60^\circ$, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения параметров зависимости $\tilde{M}_z(s)$ для $\theta=60^\circ$

Параметр	Значение
$\tilde{M}_z^{\max}$	0,366
$s_{\max}$	0,310
s_{01}	0,620
$\tilde{M}_z^{\min}$	0,186
$s_{\min}$	0,745
s_{02}	0,900

При сравнении расчетных и экспериментальных зависимостей обнаруживается их очевидное качественное сходство. В количественном отношении имеются расхождения, предполагающие дополнительные исследования по ряду направлений. В частности, данные для зависимостей $F_{ж}(t)$, $M_{ж}(t)$ экстраполировались со значений $\mathbf{M}_{ж}\sim 0,005$ на значения $\mathbf{M}_{ж}\sim 0,2$. Но тогда важно оценить степень погрешности

этой экстраполяции. Одним из возможных путей получения данных оценок является решение обратной задачи, например, в постановке (28).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бабкин А.В., Колпаков В.И., Охитин В.Н., Селиванов В.В. *Численные методы в задачах взрыва и удара*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 516с.

[2] Баженов В.Г., Котов В.Л. Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2011. 208с.

[3] Oden J.T. *Finite elements of nonlinear continua*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1972. –464p.

[4] Альев Г.А. Пространственная задача о погружении диска в сжимаемую жидкость. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1988, №1, с.17-20.

[5] Терентьев А.Г., Чечнев А.В. Численное исследование входа пластины и диска в сжимаемую жидкость. Изв. АН СССР, МЖГ, 1985, №2, с.104-107.

[6] Нигматулин Р.И. *Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика.Термодинамика. Статистическая динамика*. Москва, ГЭОТАР-Медиа, 2014, 640 с.

[7] Dimitrienko Yu.I. *Tensor Analysis and Nonlinear Tensor Functions*. Kluwer Academic Publishers, 2002. 662p.

[8] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физмат, 2009, 629 с.

[9] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[10] Кувыркин Г.Н. *Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 142с.

[11] Селиванов В.В. *Механика разрушения деформируемого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 424с.

[12] Ерошин В.А. Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью. *Изв. РАН, МЖГ*, 1992, №5, с.20-30.

[13] Шорыгин О.П. *Погружение в жидкость тел вращения простейших форм под углом к свободной поверхности*. Неустановившиеся течения воды с большими скоростями. Москва, Наука, 1973, с.397-403.

[14] Бивин Ю.К., Глухов Ю.М., Пермяков Ю.В. Вертикальный вход в твердых тел в воду. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1985, №6, с.3-9.

[15] Седов Л.И. *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*. Москва, Наука, 1980. 440с.

[16] Логвинович Г.В., Якимов Ю.Л. *Погружение тел в жидкость с большими скоростями*. Неустановившиеся течения воды с большими скоростями. Москва, Наука, 1973. с.85-92.

[17] Сагомонян А.Я. Падение плоской пластинки на поверхность сжимаемой жидкости. *Вестник МГУ, матем., мех.*, 1959, №2, с.49-53.

[18] Поручиков В.Б. Удар диска по поверхности идеальной сжимаемой жидкости. *ПММ*, 1964, т.28, вып.4, с.797-800.

[19] Поручиков В.Б. Проникание конуса в сжимаемую жидкость. ПММ, 1973, т.37, вып.1, с.180-187.

[20] Журавлев Ю.Ф. Погружение в жидкость диска под углом к свободной поверхности. *Сб. работ по гидродинамике*, 1959, с.227-232.
[21] Осьминин Р.И. Измерение коэффициента момента силы, действующей на изолированный диск при погружении его под углом к свободной поверхности. *Труды ЦАГИ*, 1976, вып.1741, с.19-23.
[22] Ерошин В.А., Константинов Г.А., Романенков Н.И., Якимов Ю.Л. Экспериментальное определение давления на диске при погружении в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1988, №2, с.21-25.
[23] Ерошин В.А., Константинов Г.А., Романенков Н.И., Якимов Ю.Л. Экспериментальное определение момента гидродинамических сил при несимметричном проникании диска в сжимаемую жидкость. Изв. АН СССР, МЖГ, 1990, №5, с.88-94.
[24] Ерошин В.А., Самсонов В.А. О входе в воду симметричных тел. ПММ, 2016, №5, с.1020-1027.
[25] Грумондз В.Т., Журавлев Ю.Ф., Парышев Э.В., Соколянский В.П., Шорыгин В.П. *Гидродинамика и динамика высокоскоростного движения тел в жидкости*. Москва, Наука, 2013, 574 с.
[26] Грумондз В.Т., Половинкин В.В., Яковлев Г.А. Теория движения двусредных аппаратов. Математические модели и методы исследования. Москва, Вузовская книга, 2012. 644с.
[27] Grumondz V.T. *Unmanned Vehicle Configuration. Multicriteria Approaches in Mechanical Engineering. Multicriteria Design. Optimization and Identification*. Dordrecht; Boston; L.; Kluwer Acad. Publ., 2000, p.73-80.
[28] Тарасов Е.В., Уваров Г.В. *Высокоскоростная подводная ракета. Проблемы и алгоритмы проектных исследований системы «каверна – подводная ракета»*. Москва, Вузовская книга, 2013. 252с.
[29] Гуревич М.И. *Теория струй идеальной жидкости*. Москва, Наука, 1979. 536с.
[30] Якимов Ю.Л., Ерошин В.А., Романенков Н.И. Моделирование движения тела в воде с учетом ее сжимаемости. Некоторые вопросы механики сплошной среды. Москва, Изд-во Московск. ун-та, 1978, с.29-33.
[31] Ерошин В.А., Романенков Н.И., Серебряков И.С., Якимов Ю.Л. Гидродинамические силы при ударе тупых тел о поверхность сжимаемой жидкости. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1980, №6, с.44-51.
[32] Ерошин В.А., Плюснин А.В., Созоненко Ю.А., Якимов Ю.Л. О методике исследования изгибных колебаний упругого цилиндра при входе в воду под углом к свободной поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1989, №6, с.164-167.
[33] Ерошин В.А. *Экспериментальное изучение волн сжатия, возбуждающихся в упругом цилиндре при входе в воду*. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Нижний Новгород, Ниж.ГУ, 1990, с.82-88.
[34] Серебряков И.С. *Устройство для определения ускорения*. А.с. 638897 СССР. Открытия, изобретения, пром. образцы и тов. знаки, 1978, №47.
[35] Ерошин В.А., Макаршин В.М., Константинов Г.А., Романенков Н.И., Якимов Ю.Л., Плюснин А.В. Способ определения параметров движения объекта с зеркальной поверхностью и устройство для его осуществления. А.с. 1486775 СССР. Опубл. 15.06.89, Бюл. №22.
[36] Ватульян А.О. *Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224с.
[37] Sellier M. An iterative method for the inverse elasto-static problem. *Journal of Fluids and Structures*, 2011, v.27, iss.8, pp.1461-1470.

[38] Ellabib A., Nachaoui A. An iterative approach to the solution of an inverse problem in linear elasticity. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, v.77, iss.2-3, pp.189-201.
[39] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Еголева Е.С. Численное решение обратных трехмерных задач восстановления нагрузок, действующих на композитные элементы конструкций. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, №4, с.48-59.
[40] Cowper G.R. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theor. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, v.33, №2, p.335-340.
[41] Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. *Колебания в инженерном деле*. Москва, Машиностроение, 1985. 472с.
[42] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. *Теория упругости*. Москва, Наука, 1979, 560 с.
[43] Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Ленинград, Судостроение, 1972. 376 с.
[44] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. Москва, Наука, 1977. 439с.
[45] Плюснин А.В. *Динамические процессы в упругом цилиндре при его ударе о поверхность воды*. Диссертация на соискание уч. степ. канд. физ.-мат.наук по спец. 01.02.04. механика деформируемого твердого тела. Москва, МГУ, 1991. 167с.
[46] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1979, 288 с.

Статья поступила 15.10.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Ерошин В.А., Плюснин А.В. Математические методы идентификации гидродинамических нагрузок при ударе о воду, основанные на одномерных теориях распространения упругих волн в стержнях. *Математическое моделирование и численные методы,* 2018, № 3, с. 67–94.

Ерошин Владимир Андреевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова.

Плюснин Андрей Владимирович окончил Днепропетровский государственный университет по специальности «Гидроаэродинамика» и аспирантуру кафедры «Волновая и газовая динамика» МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат. наук, доцент-совместитель кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, заместитель начальника отдела АО «ВПК «НПО машиностроения». Автор порядка 30 работ по нестационарным задачам гидрогазодинамики и теории упругости. e-mail: andrey.plusnin@gmail.com

Mathematical methods of identification of hydrodynamic loads at impact on water based on one-dimensional theories of elastic wave propagation in rods

© A.V. Eroshin[1], A.V. Plyusnin [2, 3]

[1] Institute of mechanics, Moscow state University. M. V. Lomonosov, Moscow, 119192, Russia
[2] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[3] JSC "MIC "NPO Mashinostroenia", Moscow region, Reutov-town, 143966, Russia

The problem of longitudinal and transversal oscillations of elastic cylinder generated by high velocity impact of the forward end on the water surface is considered from the point of the identification of hydrodynamic forces by treating optical measuring data of the opposite end motions. The statements of the direct and reverse problems are derived, based on the one-dimensional theories of Saint-Venan and Timoshenko, which provides the hyperbolicity of the governing equations. The results of the direct problem calculations by the finite-difference method are compared with the available experimental traces and show rather accurate qualitative coincidence.

Keywords: *water impact, elastic waves, finite-difference scheme.*

REFERENCES

[1] Babkin A.V., Kolpakov B.I., Okhitin V.N., Selivanov V.V. *Chislennye metody v zadachah vzryva i udara* [Numerical methods in explosion and shock problems]. Moscow, BMSTU Publ., 2000. 516 p.

[2] Bazhenov V.G., Kotov V.L. Matematicheskoe modelirovanie nestacionarnykh processov udara i pronikaniya isesimmetrichnykh tel i identifikacii svoistv gruntovykh sred [Mathematical modeling of unsteady impact and penetration processes of axisymmetric bodies and identification of soil media properties]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2011. 208 p.

[3] Oden J.T. *Finite elements of nonlinear continua*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1972. –464p.

[4] Alyev G.A. *Izv. AN SSSR, MJG – News of the USSR AS. FGM*, 1988, no. 1, pp.17-20.

[5] Terentev A.G., Chechnev A.V. *Izv. AN SSSR, MJG – News of the USSR AS. FGM*, 1985, no. 2, pp.104-107.

[6] Nigmatulin R.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Kinematika. Dinamika. Termodinamika. Statisticheskaya dinamika* [Continuum Mechanics. Kinematics. Dynamics. Thermodynamics. Statistical Dynamics]. Moscow, GEOTARMedia Publ., 2014, 640 p.

[7] Dimitrienko Yu.I. *Tensor Analysis and Nonlinear Tensor Functions*. Kluwer Academic Publishers, 2002. 662p.

[8] Dimitrienko Y.I. *Nelineinaya mehanika sploshnoi sredy* [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow, PHYSMATH, 2009, 629 p.

[9] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovymekaniki tverdykh sred* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of mechanics of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[10] Kuvyrkin G.N. *Termomekhanika deformiruemogo tverdogo tela pri vysokointensivnom nagruzhenii* [Thermomechanics of a deformable solid body during high-intensity loading]. Moscow, BMSTU Publ., 1993. 142 p.
[11] Selivanov V.V. *Mekhanika razrusheniya deformirovaniya tela* [Fracture mechanics of deformable body]. Moscow, BMSTU Publ., 2006. 424 p.
[12] Eroshin V.A. *Izv. RAN, MJG – News of the RAS. FGM*, 1992, no. 5, pp. 20-30.
[13] Shorygin O.P. *Pogruzhenie v zhidkost tel vrasheniya prosteishikh form pod uglom k svobodnoi poverkhnosti. Neustonovivsheecya techeniya vody s bolshimi skorostyami* [Immersion in liquid bodies of rotation of the simplest forms at an angle to the free surface. The transient flow of water at high speeds]. Moscow, Nauka Publ., 1973, pp. 397-403.
[14] Bivin Yu.K., Glukhov Yu.M., Permyakov Yu.V. *Izv. AN SSSR, MJG – News of the USSR AS. FGM*, 1985, no. 6, pp.3-9.
[15] Sedov L.I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Flat problems of hydrodynamics and aerodynamics]. Moscow, Nauka Publ.. 1980. 440 p.
[16] Logvinovich G.V., Yakimov Yu.L. *Pogruzheniet tel v zhidkost s bolshimi skorostyami. Neustonovivsheecya techeniya vody s bolshimi skorostyami* [Immersion of solids in liquid at high speeds. The transient flow of water at high speeds]. Moscow, Nauka Publ., 1973, pp. 85-92.
[17] Sagomonyan A.Ya. *Vestnik MGU, matem., mekh. – Bulletin MSU, mathem., mech.*, 1959, no. 2, pp. 49-53.
[18] Poruchikov V.B. *PMM – AMM*, 1964, vol. 28, issue 4, pp. 797-800.
[19] Poruchikov V.B. *PMM – AMM*, 1973, vol. 37, issue 1, pp. 180-187.
[20] Zhuravlev Yu.F. *Sb. rabot po gidridinamike – Sat. works on hydrodynamics*, 1959, pp. 227-232.
[21] Osminin R.I. *Trudy TSAGI – Processing of the TSAGI*, 1976, issue 1741, pp. 19-23.
[22] Eroshin V.A., Konstantinov G.A., Romenenkov N.I. Yakimov Yu.L. *Izv. AN SSSR, MJG – News of the USSR AS. FGM*, 1988, no. 2, pp. 21-25.
[23] Eroshin V.A., Konstantinov G.A., Romenenkov N.I. Yakimov Yu.L. *Izv. AN SSSR, MJG – News of the USSR AS. FGM*, 1990, no. 5, pp. 88-94.
[24] Eroshin V.A., Samsonov V.A. *PMM – AMM*, 2016, no. 5, pp. 1020-1027.
[25] Grumondz V.T., Zhuravlev Yu.F., Paryshev E.V., Sokolyanskiy V.P., Shorygin V.P. *Gidrodinamika i dinamika vysokoskorostnogo dvizheniya tel v zhidkosti* [Hydrodynamics and dynamics of high-speed motion of bodies in fluid]. Moscow, Nauka Publ., 2013, 574 p.
[26] Grumondz V.T., Polovinkin V.V., Yakovlev G.A. *Teoriya dvizheniya dvusrednykh apparatov. Matematicheskie modeli i metody issledovaniya* [Theory of motion of two-medium devices. Mathematical models and research methods]. Moscow, Vuzovskaya kniga Publ., 2012. 644 p.
[27] Grumondz V.T. *Unmanned Vehicle Configuration. Multicriteria Approaches in Mechanical Engineering. Multicriteria Design. Optimization and Identification*. Dordrecht; Boston; L.; Kluwer Acad. Publ., 2000, p.73-80.
[28] Tarasov E.V., Uvarov G.V. *Vysokoskorostnaya podvodnaya raketa. Problemy i algoritmy proekt-nyh issledovanij sistemy «kaverna – podvodnaya raketa»* [High-speed underwater missile. Problems and algorithms of design studies of the "kaverna – underwater rocket" system»]. Moscow, Vuzovskaya kniga Publ., 2013. 252 p.
[29] Gurevich M.I. Teoriya struj ideal'noj zhidkosti [Theory of jets in an ideal fluid]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 536 p.
[30] Yakimov YU.L., Eroshin V.A., Romanenkov N.I. Modelirovanie dvizheniya tela v vode s uchetom ee szhimaemosti. Nekotorye voprosy mekhaniki sploshnoj

sredy [Modeling of body motion in water taking into account its compressibility. Some questions of continuum mechanics]. Moscow, MSU Publ., 1978, pp. 29-33

[31] Eroshin V.A., Romanenkov N.I., Serebryakov I.S., Yakimov Yu.L. *Izv. AN SSSR, MJG – News of the USSR AS. FGM*, 1980, no. 6, pp.44-51.

[32] Eroshin V.A., Plyusnin A.V., Sozonenko YU.A., Yakimov Yu.L. *Izv. AN SSSR, MJG – News of the USSR AS. FGM*, 1989, no. 6, pp.164-167.

[33] Eroshin V.A. *Ehksperimental'noe izuchenie voln szhatiya, vozbuzhdayushchihsya v uprugom cilindre pri vhode v vodu*. Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti [Experimental study of compression waves excited in an elastic cylinder at the entrance to water. Applied problems of strength and plasticity]. Nizhnij Novgorod, Nizh.GU Publ., 1990, pp.82-88.

[34] Serebryakov I.S. *Ustrojstvo dlya opredeleniya uskoreniya* [Device for determining acceleration]. A.s. 638897 SSSR. Otkrytiya, izobreteniya, prom. obrazcy i tov. znaki, 1978, №47.

[35] Eroshin V.A., Makarshin V.M., Konstantinov G.A., Romanenkov N.I., Yakimov Yu.L., Plyusnin A.V. *Sposob opredeleniya parametrov dvizheniya ob"ekta s zerkal'noj poverhnost'yu i ustrojstvo dlya ego osushchestvleniya* [A method for determining the parameters of motion of an object with a mirror surface and a device for its implementation]. A.s. 1486775 SSSR. 15.06.89, B. №22.

[36] Vatul'yan A.O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse problems in solid mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 224 p.

[37] Sellier M. An iterative method for the inverse elasto-static problem. *Journal of Fluids and Structures*, 2011, v.27, iss.8, pp.1461-1470.

[38] Ellabib A., Nachaoui A. An iterative approach to the solution of an inverse problem in linear elasticity. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, v.77, iss.2-3, pp.189-201.

[39] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Egoleva E.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 4, pp. 48-59.

[40] Cowper G.R. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theor. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, v.33, №2, p.335-340.

[41] Timoshenko S.P., Yang D.H., Uiver U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Fluctuations in engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 472 p.

[42] Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Education, 1970, 608 p. [In Russ.: Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Teoriya uprugosti*. Moscow, Nauka Publ., 1979, 560 p.].

[43] Slepyan L.I. Nestacionarnye uprugie volny [Non-stationary elastic waves]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1979. 376 p.

[44] Godunov S.K., Ryaben'kij V.S. Raznostnye skhemy. Vvedenie v teoriyu [Difference scheme. Introduction to theory]. Moscow, Nauka Publ., 439 p.

[45] Plyusnin A.V. Dinamicheskie processy v uprugom cilindre pri ego udare o poverhnost' vody [Dynamic processes in an elastic cylinder with its impact on the surface of the water]. The dissertation on competition Uch. step. kand. Fiz.-Mat.Sciences on special. 01.02.04. mechanics of deformable solid. Moscow, Moscow state University, 1991. 167s.

[46] Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving incorrect problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 288 p.

Eroshin A.V. Doctor Of Physics And Mathematics, leading researcher at the Institute of mechanics of Moscow state University. M. V. Lomonosov.

Plyusnin A.V., graduated from Dnepropetrovsk State University, majoring in Aerohydrodynamics and obtained a degree in the Department of Wave and Gas Dynamics, Lomonosov Moscow State University. Cand. Sci. (Phys. & Math.), Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University, Deputy Director of the Department in at JSC "MIC "Mashinostroeniya". Author of approximately 30 publications in the field of nonstationary problems of hydrodynamics, gasdynamics and theory of elasticity.
e-mail: andrey.plusnin@gmail.com