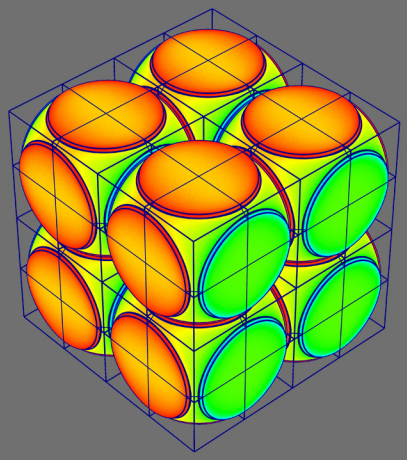
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Иванов В.А., Еркаев Н.В. Аналитическая модель колебаний ролика, движущегося вдоль твердой поверхности в режиме гидродинамической. Математическое моделирование и численные методы, 2018, № 3, с. 49–66.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/172/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.22
18.11.2026 12:59:47

УДК 628.822

Аналитическая модель колебаний ролика, движущегося вдоль твердой поверхности в режиме гидродинамической

© В.А. Иванов[1], Н.В. Еркаев[2]

[1] Политехнический институт Сибирского федерального университета, Красноярск, 660074, Россия
[2] ИВМ СО РАН, Красноярск, 660036, Россия

Рассмотрена модель нормальных колебаний ролика, движущегося вдоль поверхности с постоянной скоростью при наличии жидкого слоя смазки. Распределение давления вдоль смазочного слоя получено в результате интегрирования уравнения Рейнольдса с учетом как тангенциальной, так и нормальной скорости ролика относительно опорной поверхности. Определен коэффициент демпфирования смазочного слоя, являющийся коэффициентом пропорциональности между усилением несущей способности и величиной нормальной скорости. После перехода к безразмерным переменным задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Построено аналитическое решение данного уравнения методом асимптотического разложения по сингулярному малому параметру. Решение содержит как регулярные члены разложения по степеням малого параметра, так и погранслойные функции, быстро затухающие с течением времени. Характерное время затухания этих функций пропорционально малому параметру. На основе полученного решения, рассмотрен переходный процесс к стационарному решению при резком увеличении внешней нагрузки. Характерной особенностью данного процесса является резкое увеличение пика давления сразу после скачка нагрузки, который затем плавно релаксирует к новому стационарному значению, соответствующему возросшему значению нагрузки.

Ключевые слова: *смазочный слой, гидродинамическая смазка, колебания ролика, асимптотическое разложение.*

Введение. Стационарная гидродинамическая задача контакта ролика с пластиной при наличии смазочного слоя, разделяющего поверхности, рассматривалась во многих публикациях [1-6] и достаточно хорошо изучена. Впервые эта задача была рассмотрена Капицей П. Л., который получил аналитическое стационарное решение для распределения давления в слое при отсутствии деформаций поверхностей контакта [4]. В работах [6-7] рассмотрены асимптотические методы решения стационарной задачи с учетом прогиба опорной поверхности в случае очень больших нагрузок. В то же время нестационарные аспекты гидродинамического контакта ролика с опорной поверхностью остаются в значительной мере мало исследованными [8-9]. Эта тема важна и актуальна, так как именно нестационарный контакт свойственен роликоподшипникам,

работающим при переменных нагрузках. При такой работе подшипников происходят быстрые изменения зазоров между контактирующими телами, которые приводят к резкому росту пиковых значений давления в смазочном слое.

В данной работе рассматривается асимптотический аналитический метод решения нестационарной задачи гидродинамического контакта ролика с жесткой поверхностью, основанный на разложении по сингулярному малому параметру при старшей производной [10, 11].

Схема контактного взаимодействия цилиндрического ролика с твердой поверхностью, покрытой слоем смазочного материала, представлена на рис. 1.

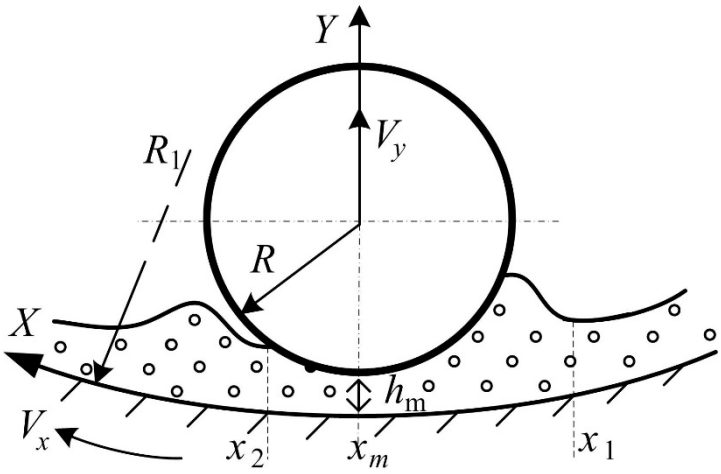


Рис. 1. Схема расположения ролика и слоя жидкого смазочного материала

Расчет давления в смазочном слое. Рассмотрим идеализированную модель контакта ролика с поверхностью при постоянном коэффициенте вязкости в смазочном слое [12, 13]. В этом случае распределение давления определяется из уравнения Рейнольдса:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 6\mu V \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2}{V}\frac{\partial h}{\partial t} \right). \qquad (1)$$

где P – давление в смазочном слое, V – тангенциальная скорость ролика относительно поверхности, μ - динамическая вязкость масла при нормальном давлении, h – толщина смазочного слоя, зависящая от деформации поверхностей. Ось x ориентирована вдоль поверхности контакта, как показано на рис.1. Здесь используется система отсчета,

в которой ролик имеет нулевую тангенциальную скорость, а поверхность, соответственно, движется в направлении *X*.

В предположении, что площадка контакта цилиндра и плоскости мала по сравнению с радиусом кривизны *R*, имеем следующее выражение для толщины слоя смазочного материала [2]:

$$h = h_m + (x - x_m)^2 / (2R), \tag{2}$$

где h_m – минимальная толщина смазочного слоя, x_m – координата точки минимального зазора.

Граничные условия в рассматриваемом случае имеют следующий вид [2]:

$$P(x_1) = P(x_2) = \frac{dP}{dx}(x_2) = 0, \tag{3}$$

где x_1 и x_2 – входная и выходная границы смазочного слоя.

Для удобства решения задачи вводим безразмерные переменные:

$$\tilde{x} = (x - x_m)/\sqrt{h_m R}, \quad q = P h_m^{1.5} / (6\mu V \sqrt{R}), \quad \upsilon = \frac{V_y}{V}\sqrt{\frac{R}{h_m}}. \tag{4}$$

Используя (4), преобразуем исходное уравнение Рейнольдса (1) к более простому виду:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\left(H(\tilde{x})^3 \frac{\partial q}{\partial \tilde{x}} \right) = \frac{\partial H(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} + 2\upsilon,$$
$$H(\tilde{x}) = 1 + \tilde{x}^2/2. \tag{5}$$

Положения входной и выходной границ будем характеризовать безразмерными параметрами *a* и *c* . Значение параметра *a* зависит от количества смазки. В случае обильной смазки полагаем $a = -\infty$ [2, 3, 14].

Интегрируя уравнение (5) и используя нулевое граничное условие (3) для производной функции давления при $x = c$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial q}{\partial \tilde{x}} = \frac{H(\tilde{x}) - H(c)}{H(\tilde{x})^3} - \frac{2\varepsilon(\tilde{x} - c)}{H(\tilde{x})^3} = \frac{(\tilde{x}^2 - c^2)/2}{(1 + \tilde{x}^2/2)^3} - \frac{2\upsilon(\tilde{x} - c)}{(1 + \tilde{x}^2/2)^3}. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) зависит от безразмерного параметра υ, который связан с нормальной скоростью перемещения ролика. Интегрируя уравнение (6) для различных значений υ, находим распределение давления в смазочном слое с учетом нормальной скорости ролика (рис. 2).

$$q(\tilde{x}) = \frac{1}{16}\left(-\frac{2\tilde{x}\left(c^2(3\tilde{x}^2+10) - 2\tilde{x}^2 + 4\right)}{\left(\tilde{x}^2+2\right)^2} - \sqrt{2}\left(3c^2-2\right)tg^{-1}\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}}\right)\right) + \\ + \frac{20c\tilde{x}^3 + 3\sqrt{2}c\left(\tilde{x}^2+2\right)^2 \arctan\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}}\right) + 20c\tilde{x} + 16}{8\left(\tilde{x}^2+2\right)^2} 2\nu \quad , \quad (7)$$

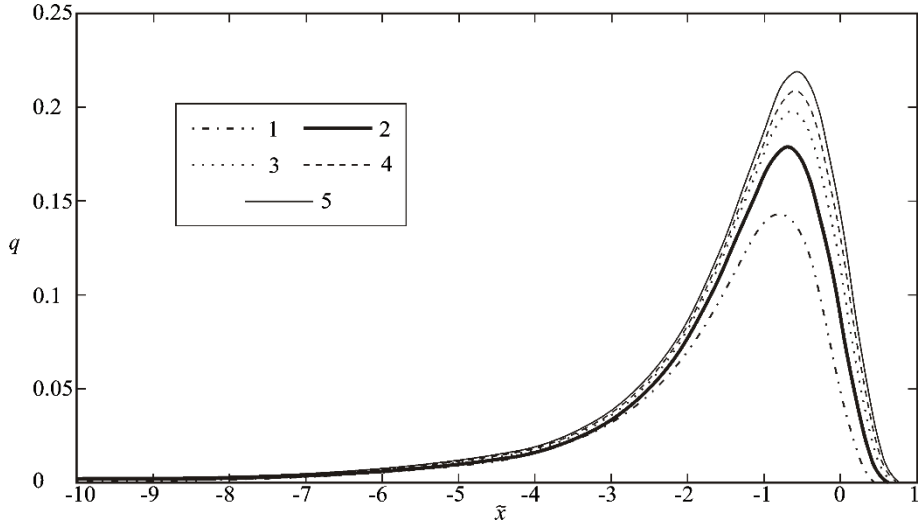


Рис. 2. Безразмерное распределение давления в смазочном слое при разных υ; 1) υ = +0,1; 2) υ = +0,05; 3) υ = 0; 4) υ = -0,05; 5) υ = -0,1

Определение коэффициента демпфирования смазочного слоя. По найденным распределениям давления определяем значения несущей способности, являющейся функцией параметра υ

$$W'(\upsilon) = \int_a^c q(x,\upsilon)dx \,, \quad (8)$$

Согласно формуле (7), давление линейно зависит от параметра υ, поэтому несущую способность также представим в виде линейной функции следующего вида

$$W' = W_0^{'} + A\upsilon \,, \quad (9)$$

где постоянные коэффициенты $W_0^{'}$ и A равны 0,401 и 1,125, соответственно.

Для перехода к размерному виду используем зависимость:

$$W = W_0^{'} \frac{6\mu VR}{h_m}, \tag{10}$$

С учетом соотношений (4) и (10), преобразуем выражение (9) к размерному виду:

$$W = W_0' \frac{6\mu VR}{h_m} + A\frac{6\mu R^{3/2}}{h_m^{3/2}} V_y \ , \tag{11}$$

Здесь первое слагаемое выражает зависимость стационарной несущей способности от зазора при нулевой нормальной скорости, а второе слагаемое учитывает влияние нормальной компоненты скорости. Коэффициент перед скоростью будем называть коэффициентом демпфирования λ:

$$\lambda = A\frac{6\mu R^{3/2}}{h_m^{3/2}} \ , \tag{12}$$

Исследования нестационарного процесса. Для исследования нестационарного процесса запишем уравнение движения ролика по нормали к поверхности:

$$m\frac{d^2 h_m}{dt^2} + \lambda(h_m)\frac{dh_m}{dt} - W_0(h_m) = -F \ , \tag{13}$$

где: m – масса ролика, F – внешняя нагрузка.

С учетом зависимостей (11) и (12) уравнение (13) принимает следующий вид:

$$m\frac{d^2 h_m}{dt^2} + A\frac{6\mu R^{3/2}}{h_m^{3/2}}\frac{dh_m}{dt} - W_0^{'}\frac{6\mu VR}{h_m} = -F \ , \tag{14}$$

Полагая равными нулю производные по времени, определяем равновесное значение зазора:

$$h_0 = \frac{6\mu VRW_0^{'}}{F}, \tag{15}$$

Принимая h_0 в качестве базового зазора, вводим безразмерные переменные:

$$h_m = h' h_0, \quad t = t' t_0, \quad t_0 = \frac{A\sqrt{Rh_0}}{VW_0^{'}}, \tag{16}$$

Используя нормировки (16), приводим уравнение динамики к безразмерному виду:

$$\varepsilon \ddot{h}' + \frac{1}{h'^{3/2}} \dot{h}' - \frac{1}{h'} + 1 = 0,$$
$$\varepsilon = \frac{mV^2 W_0^{'2}}{A^2 FR}. \tag{17}$$

Уравнение (17) определяет зависимость зазора от времени в процессе установления стационарного режима. Характерное время переходного процесса определяется параметром t_0.

Зададим начальные условия при $t = 0$.

$$h(0) = h_m / h_0 \equiv h_0^*, \quad \dot{h}(0) = 0. \tag{18}$$

Так как параметр ε при старшей производной является малым, то уравнение называется «жестким» [15] и его решение может приближенно представлено в виде асимптотического разложения по сингулярному малому параметру [8, 9, 16]:

$$h' = \overline{h}(t', \varepsilon) + \widetilde{h}(\tau, \varepsilon), \quad \tau = t'/\varepsilon,$$

где первое слагаемое

$$\overline{h}(t', \varepsilon) = \overline{h}_0(t') + \varepsilon\, \overline{h}_1(t') + \ldots + \varepsilon^k\, \overline{h}_k(t') + \ldots$$

является регулярной частью асимптотики, а второе слагаемое

$$\widetilde{h}(\tau, \varepsilon) = \widetilde{h}_0(\tau) + \varepsilon\, \widetilde{h}_1(\tau) + \ldots + \varepsilon^k\, \widetilde{h}_k(\tau) + \ldots$$

представляет собой сингулярную часть асимптотики, называемую также в литературе погранслойной асимптотикой. На пограничные функции накладываются дополнительные граничные условия затухания

$$\tau \to \infty, \quad \tilde{h}_k(\tau) \to 0. \tag{19}$$

Для первых членов асимптотики имеем выражения:

$$\begin{cases} h' = \bar{h}_0(t) + \varepsilon \bar{h}_1(t) + \varepsilon \tilde{h}_1(\tau) + \varepsilon^2 \tilde{h}_2(\tau) \\ \dot{h}' = \dot{\bar{h}}_0(t) + \dot{\tilde{h}}_1(\tau) + \varepsilon \dot{\bar{h}}_1(t) + \varepsilon \dot{\tilde{h}}_2(\tau) \\ \ddot{h}' = \frac{1}{\varepsilon} \ddot{\tilde{h}}_1(\tau) + \ddot{\bar{h}}_0(t) + \ddot{\tilde{h}}_2(\tau) + \varepsilon \ddot{\bar{h}}_1(t) \end{cases}. \tag{20}$$

Уравнения на функции регулярной и погранслойной частей асимптотики можно получить путем подстановки выражения (20) в уравнение колебаний (17) и группировки отдельно регулярных и погранслойных членов по степеням малого параметра. Полагая равными нулю сгруппированные при степенях малого параметра выражения, получаем следующую систему уравнений

$$\frac{1}{\bar{h}_0} - \frac{1}{\bar{h}_0^{3/2}} \frac{d\bar{h}_0}{dt'} - 1 = 0, \tag{21}$$

$$\frac{d\bar{h}_1}{dt'} + \frac{\bar{h}_1}{2\sqrt{\bar{h}_0}} \left(3\bar{h}_0 - 1\right) = -\ddot{\bar{h}}_0, \tag{22}$$

$$\frac{d^2\tilde{h}_1}{d\tau^2} + \frac{1}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}} \frac{d\tilde{h}_1}{d\tau} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{d^2\tilde{h}_2}{d\tau^2} + \frac{1}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}} \frac{d\tilde{h}_2}{d\tau} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{h}_1}{(\bar{h}_0^*)^2} \left[\frac{\dot{\tilde{h}}_1}{\sqrt{\bar{h}_0^*}} + \frac{1}{3}\left(1 - 3\bar{h}_0^*\right) \right]. \tag{24}$$

Интегрируя уравнение (21), получаем:

$$\bar{h}_0(t') = \left(\frac{e^t \left| \frac{\sqrt{\bar{h}_0^*} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0^*} - 1} \right| + 1}{e^t \left| \frac{\sqrt{\bar{h}_0^*} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0^*} - 1} \right| - 1} \right)^2, \tag{25}$$

Функция (25) удовлетворяет начальному условию $h(0)$, но дает ненулевую начальную скорость:

$$\dot{\bar{h}}_0(0) = \left(\frac{1}{\bar{h}_0^*} - 1\right)\left(\bar{h}_0^*\right)^{3/2}. \qquad (26)$$

Для компенсации этой скорости далее вводится погранслойное решение.

Далее переходим к определению второго члена регулярной части асимптотики. Для этого преобразуем уравнение (22) к виду:

$$-\frac{1}{h_0^2}\bar{h}_1 + \frac{3}{2}\frac{1}{h_0^{5/2}}\bar{h}_1\dot{\bar{h}}_0 - \frac{1}{h_0^{3/2}}\dot{\bar{h}}_1 = \ddot{\bar{h}}_0. \qquad (27)$$

где:

$$\dot{\bar{h}}_0 = \left(1 - \bar{h}_0\right)\sqrt{\bar{h}_0}\,. \qquad (28)$$

Подставляя (28) в (27) и выполняя алгебраические преобразования, получаем:

$$\dot{\bar{h}}_1 + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_0}}\left(3\bar{h}_0 - 1\right)\bar{h}_1 = -\ddot{\bar{h}}_0\bar{h}_0^{3/2}. \qquad (29)$$

Введем замену:

$$\dot{\bar{h}}_1 = \frac{d\bar{h}_1}{dt'} = \frac{d\bar{h}_1}{d\bar{h}_0}\frac{d\bar{h}_0}{dt'} = \frac{d\bar{h}_1}{d\bar{h}_0}\dot{\bar{h}}_0, \quad \ddot{\bar{h}}_0 = \frac{d\dot{\bar{h}}_0}{d\bar{h}_0}\dot{\bar{h}}_0 = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\bar{h}}_0^{\,2}}{d\bar{h}_0}. \qquad (30)$$

Подставляя (30) в (29), получим следующее выражение:

$$\frac{d\bar{h}_1}{d\bar{h}_0}\dot{\bar{h}}_0 + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_0}}\left(3\bar{h}_0 - 1\right)\bar{h}_1 = -\frac{d\dot{\bar{h}}_0}{d\bar{h}_0}\dot{\bar{h}}_0\bar{h}_0^{3/2} = -\frac{1}{2}\frac{d\,\dot{\bar{h}}_0^{\,2}}{d\,\bar{h}_0}\bar{h}_0^{3/2}, \qquad (31)$$

Следовательно:

$$\frac{d}{d\bar{h}_0}\dot{\bar{h}}_0^{\,2} = \left(1 - \bar{h}_0\right)\left(1 - 2\bar{h}_0\right). \qquad (32)$$

Выражение (31) с учетом (32) и примет вид:

$$\frac{d\bar{h}_1}{dh_0}\sqrt{\bar{h}_0}\left(1 - \bar{h}_0\right) + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_0}}\left(3\bar{h}_0 - 1\right)\bar{h}_1 = -\frac{1}{2}\left(1 - \bar{h}_0\right)\left(1 - 2\bar{h}_0\right)\bar{h}_0^{3/2}. \qquad (33)$$

Разделив уравнение (33) на коэффициент при старшей производной, получим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{d\bar{h}_1}{d\bar{h}_0}+\frac{1}{2\bar{h}_0}\frac{\left(3\bar{h}_0-1\right)}{\left(1-\bar{h}_0\right)}\bar{h}_1=-\frac{1}{2}\left(1-2\bar{h}_0\right)\bar{h}_0. \tag{34}$$

Общим решением уравнения (34) является функция:

$$\bar{h}_1=\bar{G}(\bar{h}_0)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}\frac{(3s-1)}{s(1-s)}ds\right]. \tag{35}$$

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}\frac{(3s-1)}{\bar{h}_0(1-s)}ds&=\int_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}\left(\frac{1}{2s}-\frac{1}{1-s}\right)ds=\left[\frac{1}{2}\ln s+\ln(1-s)\right]\Bigg|_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}=\\&=\ln\left[(1-s)\sqrt{s}\right]\Big|_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}=\ln\left[\frac{(1-\bar{h}_0)\sqrt{\bar{h}_0}}{(1-\bar{h}_0^*)\sqrt{\bar{h}_0^*}}\right]\end{aligned} \tag{36}$$

Тогда уравнение (35) с учетом (36) примет вид:

$$\bar{h}_1=\bar{G}(\bar{h}_0)\frac{(1-\bar{h}_0)\sqrt{\bar{h}_0}}{(1-\bar{h}_0^*)\sqrt{\bar{h}_0^*}}=G(\bar{h}_0)(1-\bar{h}_0)\sqrt{\bar{h}_0}\ , \tag{37}$$

где G – неизвестная функция, определяющаяся интегрированием следующего уравнения:

$$\frac{d\,G(\bar{h}_0)}{d\,\bar{h}_0}=-\frac{1}{2}\frac{\left(1-2\bar{h}_0\right)\sqrt{\bar{h}_0}}{\left(1-\bar{h}_0\right)}. \tag{38}$$

Вычисляя интеграл, находим:

$$G(\bar{h}_0)=-\frac{1}{2}\int_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}\frac{(1-2s)\sqrt{s}}{(1-s)}ds+C_0=-\int_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}\sqrt{s}ds+\frac{1}{2}\int_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}\frac{\sqrt{s}}{1-s}ds+C_0. \tag{39}$$

В подынтегральном выражении второго слагаемого уравнения (39) применяем замену переменных $u=\sqrt{s}$ и выполняем

алгебраические преобразования

$$\int \frac{\sqrt{s}}{1-s} ds = 2\int \frac{u^2}{1-u^2} du = \int \frac{1}{u+1} du - \int \frac{1}{u-1} du - 2\int du \,. \qquad (40)$$

Интегрируя (40) и производя обратную замену переменных, получим выражение:

$$G(\bar{h}_0) = -\frac{2}{3}\bar{h}_0^{3/2} + \frac{2}{3}\left(\bar{h}_0^*\right)^{3/2} + \sqrt{\bar{h}_0} - \sqrt{\bar{h}_0^*} - \frac{1}{2} Ln \frac{\sqrt{\bar{h}_0}+1}{\sqrt{\bar{h}_0}-1} + \\ + \frac{1}{2} Ln \frac{\sqrt{\bar{h}_0^*}+1}{\sqrt{\bar{h}_0^*}-1} + C_0. \qquad (41)$$

С учетом уравнения (41) уравнение (37) примет вид:

$$\bar{h}_1 = \left(1-\bar{h}_0\right)\sqrt{\bar{h}_0}\left(-\frac{2}{3}\bar{h}_0^{3/2} + \frac{2}{3}\left(\bar{h}_0^*\right)^{3/2} + \sqrt{\bar{h}_0} - \sqrt{\bar{h}_0^*} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} Ln \frac{\sqrt{\bar{h}_0}+1}{\sqrt{\bar{h}_0}-1} + \frac{1}{2} Ln \frac{\sqrt{\bar{h}_0^*}+1}{\sqrt{\bar{h}_0^*}-1} + C_0 \right). \qquad (42)$$

Далее интегрируя уравнение (23) с учетом условия затухания при $\tau \to \infty$, получаем выражение

$$\frac{d\tilde{h}_1}{d\tau} = C_1 \exp(-\tau/(\bar{h}_0^*)^{3/2}) \,. \qquad (43)$$

Постоянная интегрирования C_1 определяется из условия нулевой начальной скорости для полного решения, представляющего собой сумму регулярной и погранслойной асимптотик. Так как первый член регулярной асимптотики дает ненулевое начальное значение скорости

$$\frac{d\bar{h}_0}{dt} = \left(1 - \frac{1}{\bar{h}_0^*}\right)(\bar{h}_0^*)^{3/2}, \qquad (44)$$

то подбираем постоянную C_1 таким образом, чтобы погранслойное решение компенсировало значение (26) при $\tau = 0$

$$C_1 = \left(\frac{1}{\bar{h}_0^*} - 1 \right) (\bar{h}_0^*)^{3/2} \ . \tag{45}$$

Подставляя найденное значение в выражение (44) и повторно интегрируя, находим выражение погранслойной части асимптотики

$$\tilde{h}_1 = -\left(\bar{h}_0^* - 1\right)\left(\bar{h}_0^*\right)^2 \exp\left(-\frac{\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}} \right) + C_2 . \tag{46}$$

Константа C_2 подбирается таким образом, чтобы решение удовлетворяло нулевому граничному условию при $\tau \to \infty$ (C_2=0).

Найденная погранслойная функция дает ненулевое возмущение порядка ε в начальный момент времени, которое можно скомпенсировать подбором постоянной интегрирования C_0 в выражении второго члена регулярной асимптотики.

$$C_0 = \left(1 - \bar{h}_0(t)\right)\sqrt{\bar{h}_0(t)}\,\frac{(\bar{h}_0^*)^{3/2}\left|\bar{h}_0^* - 1\right|}{\left(1 - \bar{h}_0^*\right)} . \tag{47}$$

В результате итоговое выражение принимает вид:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\ 1} = \left(\bar{h}_0(t) - 1\right)\sqrt{\bar{h}_0}\Bigg(& \frac{2}{3}(\bar{h}_0\,(t))^{3/2} - \frac{2}{3}\left(\bar{h}_0^*\right)^{3/2} - \sqrt{\bar{h}_0(t)} + \sqrt{\bar{h}_0^*} + \\ & + \frac{1}{2} Ln \frac{\sqrt{\bar{h}_0(t)} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0(t)} - 1} - \frac{1}{2} Ln \frac{\sqrt{\bar{h}_0^*} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0^*} - 1} \Bigg) + \\ & + \left(1 - \bar{h}_0(t)\right)\sqrt{\bar{h}_0(t)}\,\frac{(\bar{h}_0^*)^{3/2}\left|\bar{h}_0^* - 1\right|}{\left(1 - \bar{h}_0^*\right)} . \end{aligned} \tag{48}$$

Найденная регулярная часть асимптотики дает ненулевую начальную скорость порядка ε, для компенсации которой вводится погранслойная функция второго порядка. Для определения этой функции интегрируем уравнение (24) с условием затухания $\tau \to \infty$ и получаем выражение:

$$\dot{\tilde{h}}_2 = \exp\left(-\frac{\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right)\left[C_3 + \tilde{A}\tau + \tilde{B}(\bar{h}_0^*)^{3/2} - \right.$$
$$\left. -\tilde{B}(\bar{h}_0^*)^{3/2}\exp\left(-\frac{\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right)\right]. \tag{49}$$

где:

$$\tilde{A} = \left(1-\bar{h}_0^*\right)\left(2-\frac{3}{2}\bar{h}_0^*\right), \quad \tilde{B} = \left(1-\bar{h}_0^*\right)\left(-\frac{3}{2}\bar{h}_0^*\right). \tag{50}$$

Постоянная интегрирования C_3 определяется из условия нулевой начальной скорости :

$$\dot{\bar{h}}_1(0) + \frac{d\tilde{h}_2(0)}{d\tau} = 0\,. \tag{51}$$

где:

$$\dot{\bar{h}}_1(0) = \left(\bar{h}_0^*\right)^2 + 2\bar{h}_0^*\left(\bar{h}_0^* - 1\right), \tag{52}$$

тогда:

$$C_3 = \frac{-\left[\left(\bar{h}_0^*\right)^2 + 2\bar{h}_0^*\left(\bar{h}_0^* - 1\right)\right]}{\exp\left(-\frac{2\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right)} - \tag{53}$$
$$-\left[\tilde{A}\tau + \tilde{B}(\bar{h}_0^*)^{3/2} - \tilde{B}(\bar{h}_0^*)^{3/2}\exp\left(-\frac{\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right)\right].$$

Интегрируя уравнение (49) получим выражение погранслойной функции второго порядка:

$$\tilde{h}_2 = -(\bar{h}_0^*)^{3/2}\left(C_3 + \tilde{B}(\bar{h}_0^*)^{3/2}\right)\exp\left(-\frac{\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right) - \tag{54}$$
$$-\tilde{A}(\bar{h}_0^*)^{3/2}\left(1+\tau\right)\exp\left(-\frac{\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right) + \frac{1}{2}\tilde{B}(\bar{h}_0^*)^3\exp\left(-\frac{2\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right).$$

Найденная функция полностью удовлетворяет условию нулевой начальной скорости и дает очень малое возмущение начального условия порядка ε^2. В принципе, его можно скомпенсировать учетом дальнейшего регулярного члена асимптотики порядка ε^2.

После определения всех функций регулярной и погранслойной частей асимптотики уравнения (20), построим график зависимости зазора от времени для различных начальных значений (рис. 3).

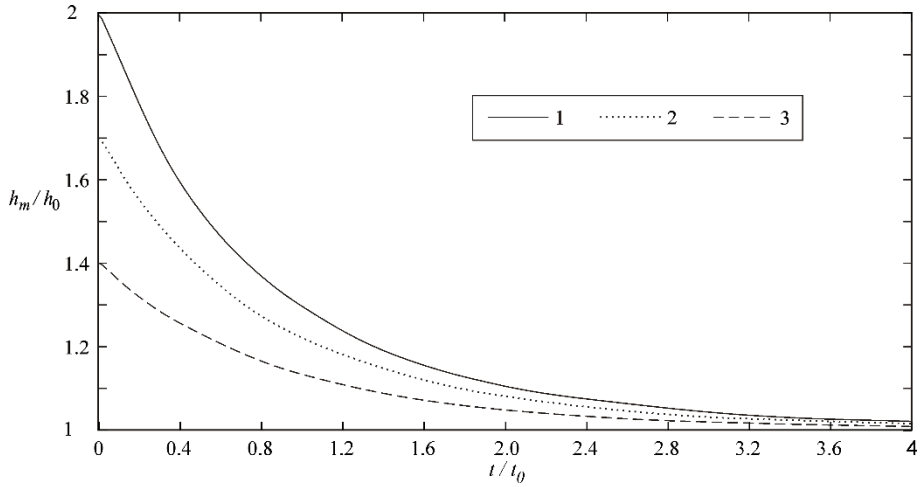


Рис. 3. Зависимость зазора от времени при ε = 0.01 для различных начальных условий; 1) $h'(0) = 2$; 2) $h'(0) = 1.7$; 3) $h'(0) = 1.4$

Рис. 3 показывает, что после любого внезапного скачка нагрузки, который характеризуется безразмерным параметром $h'(0)$, величина зазора стремится к новому равновесному значению. При этом скорость изменения зазора тем больше, чем больше начальное отклонение зазора от равновесного значения. На рис. 4 представлен график изменения относительной скорости сближения поверхностей между контактирующими телами со временем для начального условия $h'(0) = 2$.

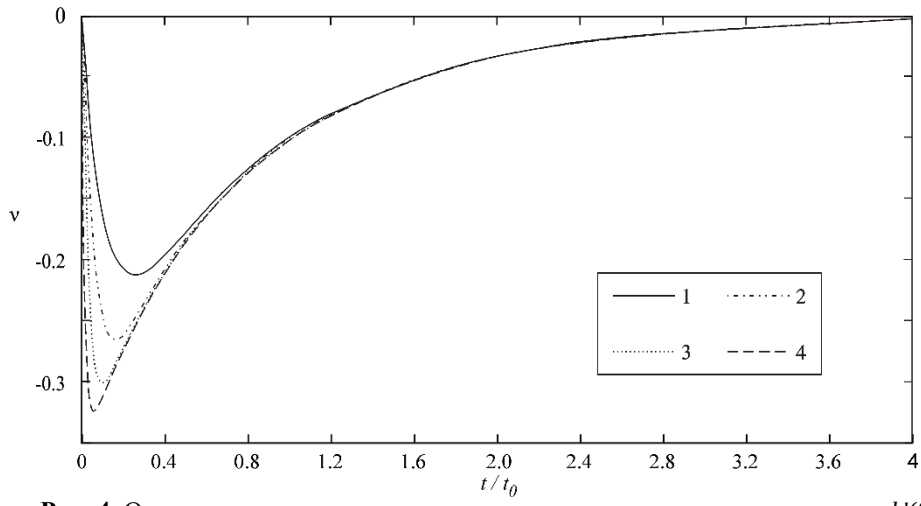


Рис. 4. Относительная скорость изменения зазора при начальном условии *h*'(0) = 2 для различных значений малого параметра;
1) ε = 0,04; 2) ε = 0,02; 3) ε = 0,01; 4) ε = 0,005

Рис. 4 показывает, что увеличение параметра ε приводит к более плавному изменению вертикальной скорости (*dh'/dt'*). При этом для очень малых значений ε скорость изменения зазора возрастает практически мгновенно, что в свою очередь вызывает резкий и большой скачок давления.

Зная зависимость зазора от времени, построим график изменения максимума давления (рис. 5).

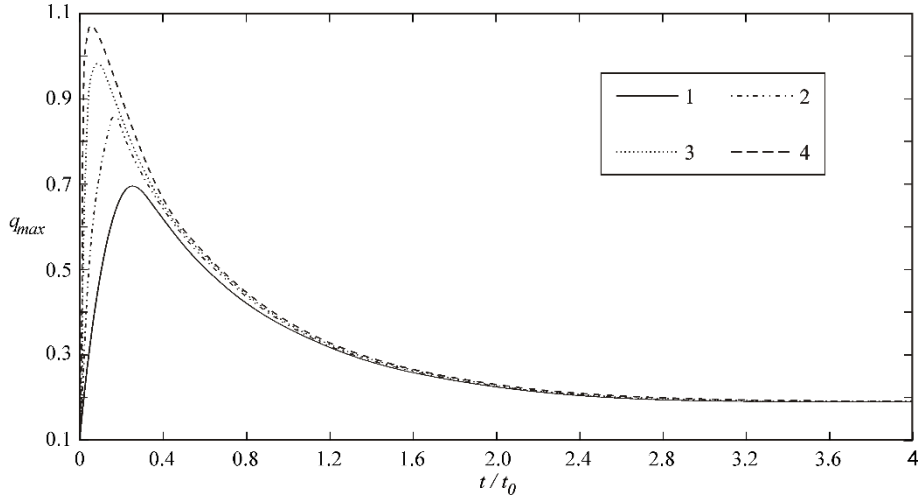


Рис. 5. Зависимость максимума давления от времени;
1) ε = 0,04; 2) ε = 0,02; 3) ε = 0,01; 4) ε = 0,005

Из рис. 5 видно, что процесс установления можно охарактеризовать двумя временными интервалами. На первом

интервале отмечается очень быстрый рост давления. Амплитуда и длительность роста давления определяется параметром ε. Чем меньше малый параметр ε, тем быстрее увеличивается со временем давление в смазочном слое. На втором временном интервале происходит процесс плавного спада давления к стационарному значению, соответствующему установившемуся состоянию смазочного слоя при постоянной нагрузке. На рис. 6 представлен график нелинейной зависимости пикового значения давления от величины начального зазора, отнесенного к равновесному значению. Данный график показывает, что чем больше малый параметр ε и чем больше отклонение он равновесного зазора, тем сильнее проявляется нелинейность увеличения пикового давления. Величина h_m/h_0 обратно пропорциональна скачку внешней нагрузки (отношению действующих сил F_1/F_0).

Рис. 5 и 6 показывают, насколько важно учитывать нестационарные переходные процессы в узлах трения. Например, при медленном (квазистационарном) увеличении нагрузки в 2 раза максимальное по слою давление увеличивается в 2,2 раза. Однако после внезапного скачка нагрузки в 2 раза во время переходного процесса максимальное по слою давление кратковременно возрастает в 13 раз. Такой резкий скачок давления в смазочном слое между контактирующими поверхностями критически сказывается на ресурсе всего узла трения.

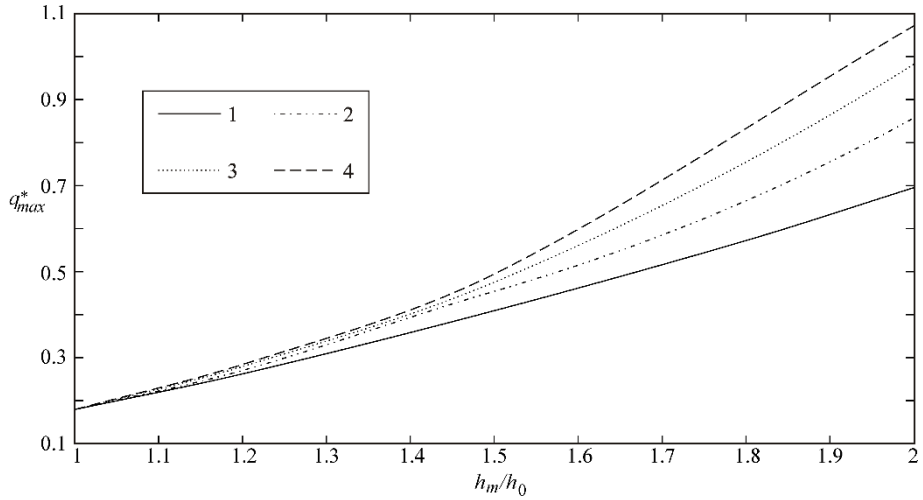


Рис. 6. Влияние начального условия на изменение пика давления для различных ε;
1) ε = 0,04; 2) ε = 0,02; 3) ε = 0,01; 4) ε = 0,005

Заключение. Построено асимптотическое аналитическое решение задачи нестационарного контактного взаимодействия ролика

с твердой поверхностью при наличии смазочного слоя в зоне контакта. Показано, что процесс установления решения после резкого скачка нагрузки характеризуется двумя временными масштабами. Первый – определяет резкий рост максимума давления сразу после скачка нагрузки. Второй – отражает процесс плавной релаксации давления к стационарному значению, соответствующему возросшему значению нагрузки. Полученные результаты обосновывают важность учета нестационарных переходных процессов в узлах трения при их проектировании и разработке математических моделей [17,18]. Например, в случае внезапного скачка нагрузки в 2 раза максимальное по слою давление во время переходного процесса кратковременно возрастает более чем на порядок. В то же время, при аналогичном медленном увеличении нагрузки максимум давления возрастет лишь вдвое. Такие значительные скачки давления, возникающие в переходных нестационарных процессах, могут вызывать преждевременный износ узла трения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kantha Shoba M., Manikandan M. Parametric optimization of cylindrical roller bearing and compare with FEA. *International Journal of Innovative Research in Technology, Science & Engineering*, 2016, vol. 2, no. 5.

[2] Галахов М. А., Усов П. П. *Дифференциальные и интегральные уравнения математической модели теории трения*. Москва, Наука. Физматлит, 1990. 280 с.

[3] Терентьев В. Ф., Еркаев Н. В. *Трибонадежность подшипниковых узлов в присутствии модифицированных смазочных композиций*. Новосибирск, Наука, 2003. 142 с.

[4] Капица П. Л. Гидродинамическая теория смазки при качении. *Журнал тех. физики*, 1955, т. 25, № 4, с. 747-762.

[5] Левандовский В.А., Нестеренко В.И., Гундарь В.П. Применение гидродинамической теории смазки для прогнозирования характеристик ротационных гидравлических гасителей колебаний. Вестник СНУ им. В. Даля, 2011, т.1, № 4 (158), с. 95-100.

[6] Беспорточный А. И. *Асимптотические методы в контактной гидродинамике*: дис. канд. физ.-мат. наук. Москва, МФТИ, 2014. 225 с.

[7] Беспорточный А.И. Асимптотические режимы гидродинамического контакта жестких цилиндров, покрытых тонкими упругими слоями. *Труды МФТИ*, 2011, т. 3, № 1, с. 28-34.

[8] Ciulli E., Bassani R. Influence of vibrations and noise on experimental results of lubricated non-conformal contacts. *Engineering Tribology*, 2006, vol. 220, pp. 319-331.

[9] Stacke L-E., Fritzson D. Dynamic behaviour of rolling bearings: simulations and experiments. *Proc Instn Mech Engrs*, 2001, vol. 215, pp. 499-508.

[10] Васильева А. Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*. Москва, Высшая школа, 1990, 208 с.

[11] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*. Москва, Наука. 1973. 272 с.

[12] Беспорточный А.И., Галахов М.А. *Математическое моделирование в триботехнике*. Москва, МФТИ, 1991, 88 с.
[13] Галин Л. А. *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости*. Москва, Физматлит, 1980, 304 с.
[14] Галахов М. А., Гусятников П. Б., Новиков А.П. *Математические модели контактной гидродинамики*. Москва, Физматлит, 1985, 296 с.
[15] Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры. *Математический сборник*, 1952, т. 31(73), № 3, с. 575-586.
[16] Васильева А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. *Успехи математических наук*, 1963, 18, № 3, с. 15-86.
[17] Александров А.А., Димитриенко Ю.И. Математическое и компьютерное моделирование — основа современных инженерных наук. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1 (1), с. 3–4.
[18] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

Статья поступила 07.10.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Иванов В.А., Еркаев Н.В. Аналитическая модель колебаний ролика, движущегося вдоль твердой поверхности в режиме гидродинамической. *Математическое моделирование и численные методы,* 2018, № 3, с. 49–66.

Иванов Виктор Андреевич – ассистент кафедры «Прикладная механика» Политехнического института Сибирского федерального университета. e-mail: Vintextrim@yandex.ru

Еркаев Николай Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом Института вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук. e-mail: nerkaev@gmail.com

Analytical model of oscillations of the roller moving along a surface in a hydrodynamic lubrication regime

© V.A. Ivanov[1], N.V. Erkaev [2]

[1] Polytechnic Institute of the Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660074, Russia
[2] ICM SB RAS, Krasnoyarsk, 660036, Russia

This article deals with the model of normal oscillations of the roller moving along the surface with a constant velocity in a presence of a liquid lubrication layer. Pressure distribution along the lubrication layer is obtained as a result of integration of the Reynolds equation taking into account both tangential and normal velocities of the roller with respect to the surface. A damping coefficient is determined as that of proportionality between the normal velocity and corresponding variation of the carrying capacity. After special normalizations, the problem is reduced to the stiff ordinary differential equation with small parameter multiplied on the highest order derivative term. For this equation, analytical

solution is derived by method of asymptotic expansion on a singular small parameter. This solution contains regular terms of series expansion, as well as boundary layer functions decreasing rapidly with time. Characteristic decreasing time for these functions is proportional to the small parameter. The obtained analytical solutions is applied for the problem of roller relaxation to the new equilibrium state after sharp increase of the external loading. A peculiarity of this process is a rapid increase of the pressure peak just after the loading jump, which afterwards is gradually relaxing to the new stationary value corresponding to the increase external loading.

Keywords: *lubrication layer, hydrodynamic lubrication, roller oscillation, asymptotic series expansion.*

REFERENCES

[1] Kantha Shoba M., Manikandan M. Parametric optimization of cylindrical roller bearing and compare with FEA. *International Journal of Innovative Research in Technology, Science & Engineering*, 2016, vol. 2, no. 5.

[2] Galakhov M.A, Usov P.P. *Differentsial'nye i integral'nye uravneniya matematicheskoy modeli teorii treniya* [Differential and integral equations of the mathematical model of the friction theory]. Moscow. Nauka, Fizmatlit Publ., 1990. 280 p.

[3] Terent'ev V.F, Erkaev N.V. *Tribonadezhnost' podshipnikovykh uzlov v prisutstvii modifitsirovannykh smazochnykh kompozitsiy* [Tribo-durability of bearing units in a presence of modified lubricant compositions]. Novosibirsk, Nauka, 2003. 142 p.

[4] Kapitsa P.L. *Zhurnal tekh. Fiziki – Journal of engineering physics*, 1955, vol. 25, no. 4, pp. 747-762.

[5] Levandovskiy V.A., Nesterenko V.I., Gundar' V.P. *Vestnik SNU im. V. Dalya – Bulletin of the SNU Dahl*, 2011, vol.1, no. 4 (158), pp. 95-100.

[6] Besportochnyy A.I. *Asimptoticheskie metody v kontaktnoy gidrodinamike.* [Asymptotic methods in fluid mechanics contact]: dis. kand. fiz.-mat. nauk. Moscow. MFTI, 2014. 225 p.

[7] Besportochnyy A.I. *Trudy MFTI – Proceedings of MIPT*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 28-34.

[8] Ciulli E., Bassani R. Influence of vibrations and noise on experimental results of lubricated non-conformal contacts. *Engineering Tribology*, 2006, vol. 220, pp. 319-331.

[9] Stacke L-E., Fritzson D. Dynamic behaviour of rolling bearings: simulations and experiments. *Proc Instn Mech Engrs*, 2001, vol. 215, pp. 499-508.

[10] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnykh vozmushcheniy* [Asymptotic methods in the theory of singular perturbations]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1990. 208 p.

[11] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskie razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy*. [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]. Moscow. Nauka, 1973. 272 p.

[12] Besportochnyy A.I., Galakhov M.A. *Matematicheskoe modelirovanie v tribotekhnike.* [Mathematical modeling in tribology] Moscow. MFTI, 1991. 88 p.

[13] Galin L.A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti*. [Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1980. 304 p.

[14] Galakhov M.A., Gusyatnikov P. B., Novikov A.P. *Matematicheskie modeli kontaktnoy gidrodinamiki.* [Mathematical models of contact hydrodynamics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1985. 296 p.
[15] Tikhonov A. N. Matematicheskii sbornik – Mathematical collection, , 1952, vol. 31(73), no. 3, pp. 575-586.
[16] Vasil'eva A. B. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Math.*, 1963, 18, vol. 3, pp. 15-86.
[17] Aleksandrov A.A., Dimitrienko Yu.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1 (1), pp. 3–4.
[18] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 5–17.

Ivanov V.A. – assistant of «Applied mechanics» Polytechnic Institute of the Siberian Federal University. e-mail: Vintextrim@yandex.ru.

Erkaev N.V. – doctor of physical and matematical sciences, professor, head of department, Institute of Computational Modelling, Siberian branch of the Russian Academy of Sciences. e-mail: nerkaev@gmail.com