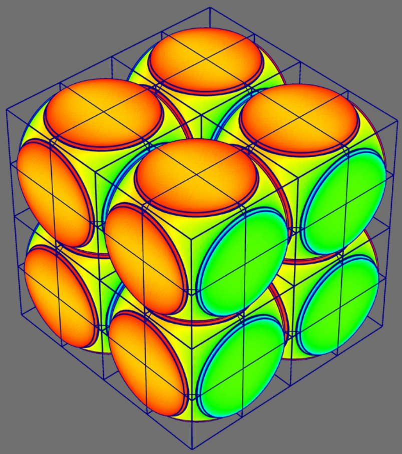
ISSN 2309-3684

Математическое моделирование и численные методы



УДК 68.32

Моделирование квазистатической надежности конструкции технической системы

© В.М. Дубровин, К.С. Семенов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматривается техническая система, содержащая несколько конструктивных элементов, работающих под действием комплекса внешних нагрузок. Для такой системы предложен метод расчёта надёжности по критерию наступления одного или нескольких предельных состояний конструкции элементов.

Ключевые слова: *техническая система, предельное состояние, прочность, устойчивость, несущая способность, нагрузка, критерий надёжности, коэффициент надёжности, относительное предельное отклонение.*

Введение. Отказом конструкции технической системы считается наступление хотя бы одного из возможных состояний: потеря прочности, потеря устойчивости, появление недопустимых упругих деформаций, появление недопустимых пластических деформаций. При этом под предельным состоянием понимается такое, при котором нагрузка, действующая на конструкцию, становится равной нагрузке, соответствующей исчерпанию несущей способности. Вероятность отсутствия предельных состояний (вероятность неразрушения) является критерием надёжности конструкции. [1-4]

Математическая модель квазистатической надёжности. Близость состояние конструкции к предельному можно характеризовать критическими параметрами, поэтому вероятность неразрушения в принципе рассчитывается как параметрическая надёжность. Критические параметры конструкции зависят одновременно от двух групп случайных факторов: факторов, определяющих нагрузку, и факторов, определяющих несущую способность. Случайный характер несущей способности обусловлен разбросом физико-механических свойств конструкционных материалов и погрешностями изготовления, в частности наличием допусков на размеры. Нагрузки, действующие на конструкцию, также имеют случайный характер, обусловленный условиями эксплуатации системы.

Случайные вариации большинства возмущающих факторов происходят во времени, поэтому нагрузки и несущая способность конструкции имеет характер случайных процессов. Однако, если этой зависимостью нагрузок и несущей способностью от времени пренебречь, полагая их консервативными случайными величинами, то будем иметь квазистатический метод расчёта надёжности конструкций. Применение квазистатических методов в расчётах надёжности может быть обосновано тем, что детерминированные расчёты конструкции на прочность и устойчивость проводится для определённых моментов времени, так называемых расчётных случаев. [5-13]

В качестве критического параметра, характеризующего близость конструкции к тому или иному предельному состоянию можно принимать либо разность между несущей способностью R и нагрузкой S, либо их отношение. В первом случае вероятность неразрушения равной вероятности того что $R\text{-}S>0$. Во втором случае критический параметром является коэффициент запаса прочности или коэффициент запаса устойчивости $\frac{R}{S}$, а вероятность неразрушения равна вероятности того, что $\frac{R}{S}>1$. [14-16]

Если рассматривать надёжность конструкции, используя в качестве критических параметров разности между несущими способностями элементов и нагрузками, что возможны при предельных состояниях:

- по прочности $U = R_1 - S_1$;
- по устойчивости $V = R_2 - S_2$;
- по деформациям $W = R_3 - S_3$.

Здесь S_1 – нагрузка, при возрастании которой возможно разрушение конструкции в результате потери прочности; R_1 – несущая способность конструкции по прочности, т.е. разрушающая нагрузка, вызывающая потерю прочности; S_2 – нагрузка, способная привести к потери устойчивости конструкции; R_2 – несущая способность конструкции по устойчивости (критическая сила); S_3 – упругая или пластическая деформация, способная привести к потере работоспособности конструкции; R_3 – несущая способность конструкции по упругим или пластическим деформациям.

Конечно, возможны и другие виды предельных состояний, например, предельное состояние по усталостной прочности в случае действия на конструкцию циклической нагрузки или длительной прочности при нахождении конструкции значительный период времени под нагрузкой. Однако при оценке квазистатической надёжности конструкций, когда рассматривается надёжность в фиксированный момент времени основными предельными состояниями являются перечисленные выше. В общем случае, вероятность неразрушения конструкции есть вероятность отсутствия всех трёх предельных состояний

$$P = вер(U > 0, V > 0, W > 0)$$

Для трёх предельных состояний вероятность неразрушения конструкции,

$$P(U > 0, V > 0, W > 0) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(u, \vartheta, w)\, du\, d\vartheta\, dw,$$

где $f(u, \vartheta, w)$ – плотность совместного распределения случайных величин *U, V, W*.

Согласно [9], маловероятны случаи нагружения конструкции, когда все три предельных состояния представляли бы в равной степени опасность. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением двух возможных предельных состояний, а иногда - только одного. Для случая двух возможных предельных состояний вероятность неразрушения равна

$$P(U > 0, V > 0) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(u, \vartheta, w)\, du\, d\vartheta,$$

где $f(u, \vartheta)$ – плотность совместного распределения случайных величин *U* и *V*.

Как показано в работах [17-19], случайные величины *U, V* распределены либо по нормальному закону, либо по закону близкому к нормальному. В общем случае их можно считать коррелированными. Тогда плотность совместного распределения двух случайных величин может быть представлена в виде

$$f(u, \vartheta) = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_\vartheta\sqrt{1 - r_{u\vartheta}^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\left(1 - r_{u\vartheta}^2\right)} \left[\left(\frac{u - m_u}{\sigma_u} \right)^2 - \frac{2r_{u\vartheta}(u - m_u)(\vartheta - m_\vartheta)}{\sigma_u\sigma_\vartheta} + \left(\frac{\vartheta - m_\vartheta}{\sigma_\vartheta} \right)^2 \right] \right\}.$$

Здесь m_u, m_ϑ – математические ожидания случайных величин; σ_u, σ_ϑ – среднее квадратическое отклонение случайных величин; $r_{u\vartheta}$ –

коэффициент корреляции случайных величин.
При этом

$$m_u = m_{R_!} - m_{s_1},$$
$$m_\vartheta = m_{R_{2!}} - m_{s_2}$$
$$\sigma_u^2 = \sigma_{R_1}^2 + \sigma_{s_1}^2 - 2r_{R_1 s_1}\sigma_{R_1}\sigma_{s_1},$$
$$\sigma_\vartheta^2 = \sigma_{R_2}^2 + \sigma_{s_2}^2 - 2r_{R_2 s_2}\sigma_{R_2}\sigma_{s_2},$$
$$r_{u\vartheta} = \frac{K_{u\vartheta}}{\sigma_u \sigma_\vartheta},$$
$$K_{u\vartheta} = r_{R_1R_2}\sigma_{R_1}\sigma_{R_2} + r_{s_1s_2}\sigma_{s_1}\sigma_{s_2} - r_{R_1s_2}\sigma_{R_1}\sigma_{s_2} - r_{R_2s_1}\sigma_{R_2}\sigma_{s_1},$$

где $m_{R_!}, m_{s_1}, m_{R_{2!}}, m_{s_2}$ – математические ожидания случайных величин соответственно; $\sigma_{R_1}, \sigma_{s_1}, \sigma_{R_2}, \sigma_{s_2}$ – среднее квадратическое отклонение случайных величин; $r_{R_1 s_{12}}$ – коэффициент корреляции случайных величин R_1, S_1; $r_{R_1 s_2}$ – коэффициент корреляции случайных величин R_2, S_2; $r_{R_1R_2}$ – коэффициент корреляции случайных величин R_1, R_2; $r_{s_1s_2}$ – коэффициент корреляции случайных величин S_1, S_2; $r_{R_1s_2}$ – коэффициент корреляции случайных величин R_1, S_2; $r_{R_2s_1}$ – коэффициент корреляции случайных величин R_2, S_1; $K_{u\vartheta}$ – корреляционный момент случайных величин *U* и *V*.

Если обозначить

$$x = \frac{m_u - U}{\sigma_u}, \quad y = \frac{m_\vartheta - V}{\sigma_\vartheta},$$

то $P(U > 0, V > 0) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\beta} f(x, y)dxdy$, где $\alpha = \dfrac{m_u}{\sigma_u}$, $\beta = \dfrac{m_\vartheta}{\sigma_\vartheta}$,

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - r_{u\vartheta}^2}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2r_{u\vartheta}xy + y^2}{2\left(1 - r_{u\vartheta}^2\right)}\right\},$$

Тогда вероятность ненаступления хотя бы одного предельного состояние (вероятность неразрушения) может быть выражена с помощью табулированных функций $\Phi(x)$, $T(h, a)$ в виде

$$P(U>0,V>0)=\frac{1}{2}\Phi(\alpha)+\frac{1}{2}\Phi(\beta)-T(\alpha,a)-T(\beta,b),$$

где $a=\dfrac{\beta-\alpha r_{u\vartheta}}{\alpha\sqrt{1-r_{u\vartheta}^2}}$, $b=\dfrac{\alpha-\beta r_{u\vartheta}}{\beta\sqrt{1-r_{u\vartheta}^2}}$

Таким образом, для расчёта вероятности неразрушения в случае двух предельных состояний, достаточно знать числовые характеристики нагрузок и несущих способностей конструкции.

Если параметры U и V не коррелированы, то вероятность неразрушения.

$$P(U>0,V>0)=P(U>0)P(V>0)=\Phi(\alpha)\Phi(\beta).$$

Последнее выражение можно использовать и при наличии корреляции параметров U и V, если надёжность конструкции достаточно велика $\left(P(U>0,V>0)\approx 1\right)$. В этом случае, согласно [20,21] влияние коэффициента корреляции $r_{u\vartheta}$ мало. Для одного предельного состояния вероятность его ненаступления (вероятность неразрушения) равно

$$P(U>0)=\Phi(\alpha).$$

При расчёте надёжности конструкции можно использовать безразмерные параметры:

$\eta=\dfrac{m_R}{m_s}$ – коэффициент надёжности;

$V_R=\dfrac{\sigma_R}{m_R}$ – коэффициент вариации несущей способности;

$V_s=\dfrac{\sigma_s}{m_s}$ – коэффициент вариации нагрузки.

В случае одного предельного состояние при отсутствии корреляции между несущей способностью конструкции и нагрузкой, величина $\alpha=\dfrac{m_R-m_s}{\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_s^2}}$ может быть представлена виде

$$\alpha=\frac{\eta-1}{\sqrt{\eta^2V_R^2+V_s^2}}.$$

Тогда вероятность неразрушения будет функцией трёх переменных $P(U>0)=p(\eta,V_R,V_s)$, что иногда позволяет упростить процесс вычисления надёжности конструкции.

Для анализа влияния на надёжность конструкции вариации нагрузки и несущей способности в рассмотрение вводятся относительные предельные отклонения:

- несущей способности $\xi_R = \dfrac{\Delta_R}{m_R}$,
- нагрузки $\xi_s = \dfrac{\Delta_s}{m_s}$.

Здесь Δ_R и Δ_s предельные отклонения несущей способности и нагрузки. Для нормального распределения параметров с учётом правила «трёх сигм» имеем

$$\Delta_R = 3\sigma_R,\ \Delta_s = 3\sigma_s.$$

Результаты численного моделирования. На рис. 1 – 4 представлены зависимости надёжности конструкций от относительных предельных отклонений нагрузки и несущей способности для различных значений коэффициента надёжности η. Как следует из этих графиков влияние относительных предельных отклонений на надёжность конструкции снижается при увеличении коэффициента надёжности и относительного предельного отклонения нагрузки ξ_R и уменьшения относительного предельного отклонения несущей способности ξ_s.

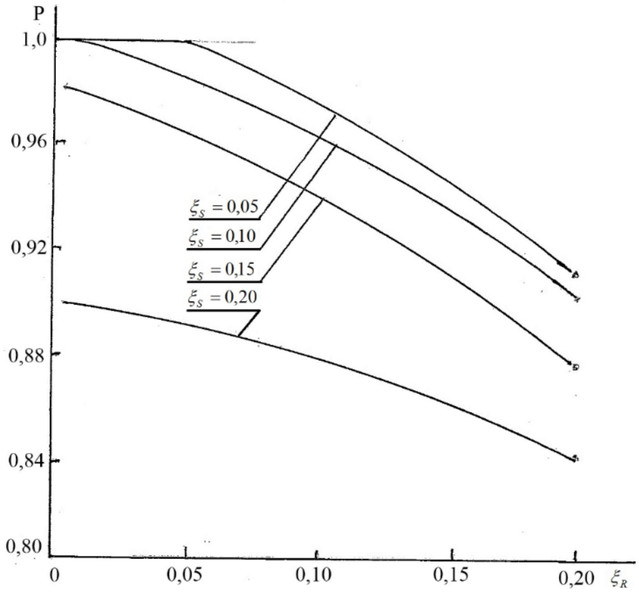


Рис. 1. Зависимость надежности конструкции от относительных отклонений нагрузки и несущей способности (коэффициент надежности $\eta = 1,1$)

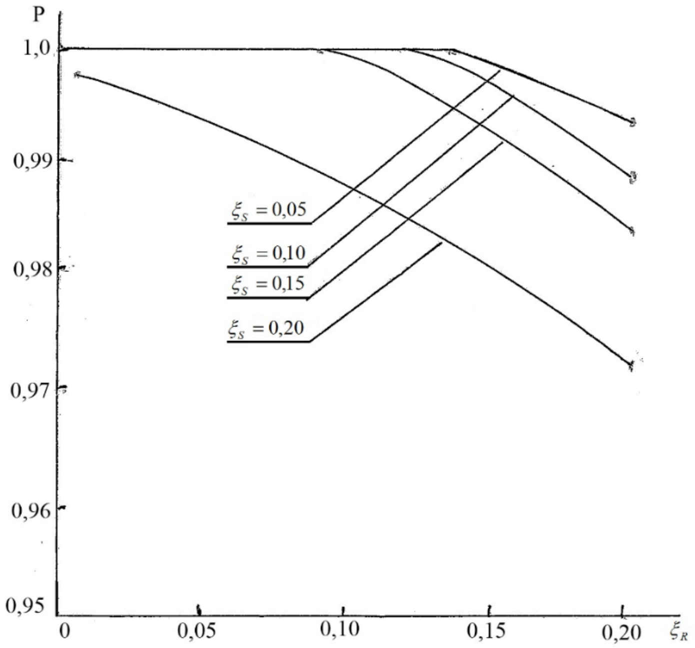


Рис. 2. Зависимость надежности конструкции от относительных отклонений нагрузки и несущей способности (коэффициент надежности $\eta = 1{,}2$)

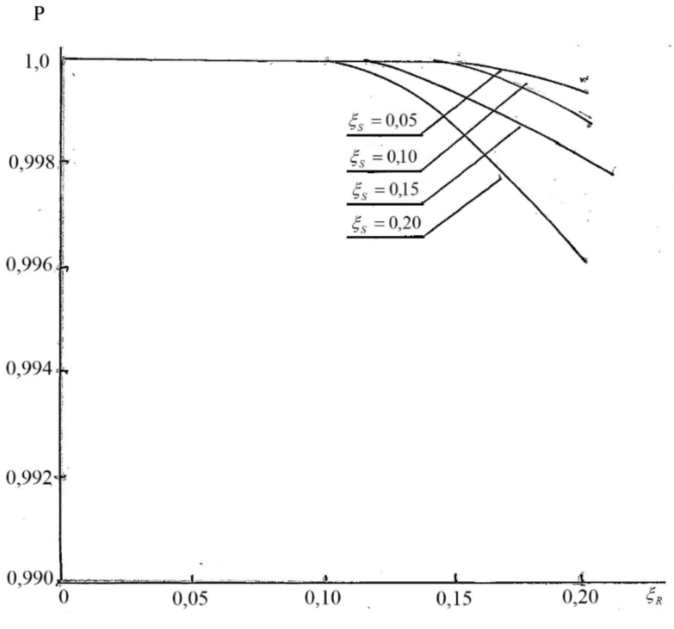


Рис. 3. Зависимость надежности конструкции от относительных отклонений нагрузки и несущей способности (коэффициент надежности $\eta = 1{,}3$)

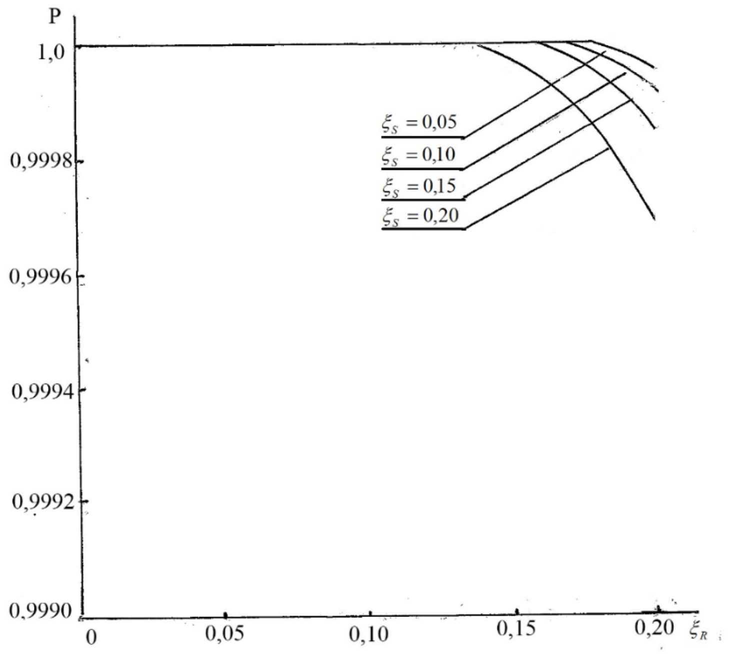


Рис. 4. Зависимость надежности конструкции от относительных отклонений нагрузки и несущей способности (коэффициент надежности $\eta = 1,4$)

Предложенный метод может быть использован для оценки надёжности любой другой технической системы, работоспособность которой зависит от наступления или не наступления нескольких предельных состояний. При этом под несущей способностью системы понимается предельный уровень воздействия на систему, при котором она не теряет работоспособности (продолжает функционировать). Под нагрузкой понимается уровень воздействия внешних факторов, влияющих на работу способность системы.

Выводы. 1. Предложенный метод позволяет оценить надёжность технической системы, работоспособность который определяется несколькими предельными состояниями.

2. Получены зависимости надёжности системы от относительных предельных отклонений нагрузки и несущей способности для различных значений коэффициенты надёжности.

3. Влияние относительных предельных отклонений на надёжность системы снижается при увеличении коэффициента надёжности и относительного предельного отклонений нагрузки и уменьшения относительного предельного отклонения несущей способности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. Москва, Советское радио, 1969. 488 с.

[2] Садыхов Г.С. Критерии оценок безопасной эксплуатации технических объектов. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2005, № 1, с. 119–122.

[3] Садыхов Г.С., Кузнецов В.И. Основы выбора безопасных периодов эксплуатации объектов. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2005, №4, с. 96-99.

[4] Дубровин В.М., Дубровин С.В. Надежность конструкции при сложном комбинированным нагружении. *Надежность и контроль качества*, 1999, №2, с.19-24.

[5] Острейковский В.А. *Теория надежности*. Москва, Высшая школа, 2003, 463 с.

[6] Алон Н., Спенсер Дж. *Вероятностный метод*. Москва, БИНОМ, 2011. 320 с.

[7] Аксенчик А.В. *Теория вероятностей и математическая статистика*. Минск, БГУИР, 2011. 184 с.

[8] Половко А.М., Гуров С.Вс. СПб., БХВ-Петербург, 2006. 702 с.

[9] Дубровин В. М., Бутина Т. А. Моделирование динамической устойчивости цилиндрической оболочки при действии осевой сжимающей нагрузки. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, №2 (6), с. 46-57.

[10] Дубровин В. М., Бутина Т. А. Моделирование динамической устойчивости цилиндрической оболочки при циклическом осевом воздействии. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, №3 (11), с. 24-32.

[11] Дубровин В. М., Бутина Т. А., Полякова Н. С. Моделирование процесса взаимодействия ударной волны с цилиндрической оболочкой с учетом волны излучения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, №4 (8), с. 38-52.

[12] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Европин С.В. Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления. Часть 1. Численное моделирование накопления повреждений. *Известия ВУЗов. Машиностроение*, 2013, №11, с.3-11.

[13] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Шиверский Е.А. Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления. Часть 2. Численное статистическое моделирование. Известия ВУЗов. Машиностроение, 2013, №12, с.12-19.

[14] Александровская Л.Н., Афанасьев А.П., Лисов А.А. *Современные методы обеспечения безотказности сложных технических систем*. Москва, Логос, 2001, 208 с.

[15] Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва, Физматлит, 2002. 496 с.

[16] Алгазин О.Д., Бутина Т.А., Дубровин В.М. К вопросу об оценке надежности и работоспособности конструкций при импульсном нагружении. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана спец. выпуск «Математическое моделирование»*, 2011, 3 с.

[17] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физмат, 2009, 629 с.

[18] Димитриенко Ю.И. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды, Т2. Москва, изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 559 с.

[19] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Москва, Издательский центр «Академия», 2003. 464 с.

[20] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. Москва, Физматлит, 2005. 408 с.

[21] Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и

научных работников. Москва, Физматлит, 2006. 816 с.

Статья поступила 15.10.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Дубровин В.М., Семенов К.С. Моделирование квазистатической надежности конструкции технической системы. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 3, с. 38–48.

Дубровин Виктор Митрофанович родился в 1934 г., окончил Саратовский государственный университет в 1958г. Канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. Автор пяти изобретений. e-mail: dubrovinvm1934@yandex.ru

Семёнов Кирилл Сергеевич родился в 1989 г., окончил МГТУ им Н.Э. Баумана. Специалист в области управления сложными техническими системами и разработке математических моделей. Является инженером I категории на РКК «Энергия» в Центре Управления Полетами. e-mail: semyonof@gmail.com

Modelling of quasi-static reliability of technical system design

© V.M. Dubrovin, К.S. Semenov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

We consider the technical system, comprising a plurality of structural elements operating under the influence of a complex external loads. For such a system, we proposed a method for calculating the reliability criterion for the occurrence of one or more of the limit states design elements.

Keywords: *technical system, limit state, strength, stability, load carrying capacity, load, reliability test, reliability factor, the relative deviation limit.*

REFERENCES

[1] Barlou R., Proshan F. Matematicheskaya teoriya nadezhnosti [Mathematical theory of reliability]. Mosvow, Soviet Radio Publ., 1969. 188 p.
[2] Sadykhov G.S. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin – Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2005, no. 1, pp. 119-122.
[3] Sadykhov G.S., Kuznetsov V.I. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin – Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2005, no. 4, pp. 96-99.
[4] Dubrovin V.M., Dubrovin S.V. *Nadezhnost i control kachestva – Reliability and quality control, 1999, no. 2, pp.19-24.*

[5] Ostreikovskii V.A. *Teoriya nadezhnosti* [Reliability theory]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2003, 463 p.

[6] Alon N., Spencer J. *Veriyatnostnyi metod* [Probabilistic method]. Moscow, BI-NOM Publ., 2011. 320 p.

[7] Aksenchik A.V. Teoriya veroztnostei i matematicheskaya statistika [Probability theory and mathematical statistics]. Minsk, BSUIR, 2011. 184 p.

[8] Polovko A.M., Gurov S.V. Osnovy *teorii nadezhnosti* [Fundamentals of reliability theory]. Spb., BHV-Peterburg Publ., 2006. 702 p.

[9] Dubrovin V.M., Butina T.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 2, pp. 46–57.

[10] Dubrovin V.M., Butina T.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 3, pp. 24–32.

[11] Dubrovin V.M., Butina T.A., Polyakova N.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 4, pp. 38–52.

[12] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Evropin S.V. *Izvestiya Vuzov. Mashinstroenie – News of Universities. Engineering*, 2013, no. 11, pp.3-11.

[13] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Shiverskii E.A., *Izvestiya Vuzov. Mashinstroenie – News of Universities. Engineering*, 2013, no. 12, pp.12-19.

[14] Alexandrovskaya L.N., Afanasyev A.P., Lisov A.A. *Sovremennye metidy obespecheniya bezotkaznosti slozhnyh tehnicheskikh sistem* [Modern methods of ensuring reliability of complex technical systems]. Moscow, Logos, 2001, 208 p.

[15] Pugachev V.S. *Teoriya veroyaztnosti i matematicheskaya statistika* [Probability theory and mathematical statistics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 496 p.

[16] Algazin O.D., Butina. T.A., Dubrovin V.M. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Spec. vypusk. Mathematicheskoe modelirovanie – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Sp. Mathematical Modeling*, 2011,3 s.

[17] Dimitrienko Y.I. *Nelineinaya mehanika sploshnoi sredy* [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow, PHYSMATH, 2009, 629 p.

[18] Dimitrienko Yu.I. *Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki. T. 2.* [Universal laws of continuum mechanics and electrodynamics. V.2]. 2011, BMSTU Publ., 559 p.

[19] Ventcel E.S., Ovcharov L.A. Teoriya veroyatnostei i eyo in*zhenernye priloxheniya* [Probability theory and its engineering applications]. Moscow, AC-DEMIYA Publ., 2003. 464 p.

[20] Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh processov* [Random process theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 408 p.

[21] Kobzar A.I. Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov I nauchnykh rabotnikov. [Applied mathematical statistics. For engineers and scientists.] Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 816 p.

Dubrovin V.M. (b. 1989) graduated from MSTU N.Uh. Bauman. Specialist in management of complex technical systems and developing mathematical models. Engineer of I category at RSC Energia in the mission Control Center. e-mail: dubrovinvm1934@yandex.ru

Semenov K.S. (b. 1989) graduated from the Bauman Moscow State Technical University. He is a specialist in the management of complex technical systems. He is the 1st category engineer at RSC "Energy" in the mission control center. e-mail: semyonof@gmail.com