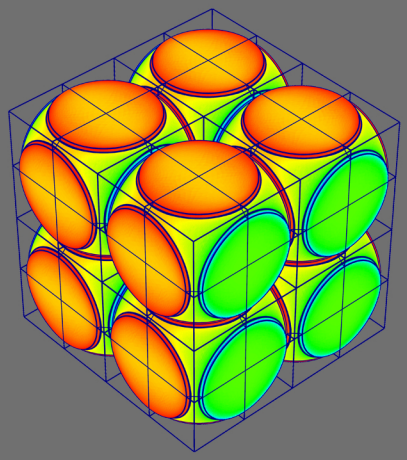
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Валишин А.А., Карташов Э.М. Математическое моделирование термических напряжений в твердом теле с внутренней трещиной. Математическое моделирование и численные методы, 2018, № 3, с. 3–21.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/169/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.62
23.11.2026 01:14:07

УДК 593.3

Математическое моделирование термических напряжений в твердом теле с внутренней трещиной

© А.А. Валишин[1, 2], Э.М. Карташов [2]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2] МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454, Россия

Цель работы – оценить влияние инерционных эффектов и их отклонение от аналогичных квазистатических результатов. Исследована роль инерционных эффектов в проблеме теплового удара на примере массивного тела с внутренней сферообразной трещиной. Изучается термическая реакция упругого пространства с внутренней сферообразной трещиной, поверхность которой, первоначально свободная от напряжений и находящаяся при температуре T0, мгновенно нагревается до температуры TC > T0 и далее поддерживается при этой температуре. Термонапряженное состояние возникает при различных режимах теплового воздействия, создающих тепловой удар. Наиболее распространены на практике три случая: температурный нагрев, тепловой нагрев и нагрев средой. Получено обобщенное уравнение динамической термоупругости для всех трех случаев в прямоугольных и криволинейных координатах. Рассмотрена термическая реакция массивного твердого тела с внутренней сферооборазной трещиной. Получено точное аналитическое решение задачи. Ранее, в работах одного из авторов, было получено решение динамической задачи в виде громоздких функциональных конструкций, что значительно усложняло их практическое использование. В настоящей работе предложено решение задачи в новых классах функций, что делает решение более удобным для численных экспериментов. Предложено обобщённое дифференциальное соотношение для динамической термоупругости, имеющее обширное поле практических приложений при изучении термической реакции на тепловой удар твердых тел различной формы. Показано, что составляющая радиального напряжения, представляет собой сферическую упругую волну, распространяющуюся от поверхности полости внутрь материала. Выполнены численные расчеты динамических эффектов и показано, что квазистатическая трактовка временных проблем в теории теплового удара не позволяет учесть основные закономерности скоротечной термоупругости и учётом инерционных эффектов.

Ключевые слова: *термоупругость, динамические напряжения, инерционные эффекты.*

Введение. Термические или температурные напряжения в твердых телах возникают по различным причинам. Например:

1.Неравномерный нагрев или охлаждение тела. В этом случае в теле появляется температурный градиент, следствием которого и являются дополнительные к механическим температурные напряжения и деформации.

2.Различие упругих и тепловых свойств материала в разных частях тела.

3.Наличие неоднородностей и дефектов материала: неоднородности структуры, посторонние включения, трещины и т.п. В частности,

наличие трещины в материале вызывает концентрацию напряжений вблизи трещины как механических так и термических, а также концентрацию теплового потока. [1]

4.В местах стыка частей конструкции из разных материалов.

Если температура локально в некоторой точке М изменяется на величину ΔТ(М) по сравнению с температурой окружающих частей, то в этой точке М возникает добавочная деформация

$$\varepsilon_{ij}^{T}(M) = \alpha(M)\Delta T(M)\delta_{ij} \qquad (1)$$

где $\alpha(M)$ – коэффициент объемного теплового расширения. Эта добавочная деформация вызывает термоупругие (термические) напряжения $\sigma_{ij}^{T}(M)$, которые добавляются к механическим напряжениям. Поэтому локальное напряженно-деформированное состояние твердого тела описывается двумя определяющими уравнениями с добавлением термических напряжений и деформаций

$$\varepsilon_{ij}(M) = \frac{1}{E}\Big((1+\nu)\sigma_{ij}(M) - (\nu\sigma_{kk}(M) - \alpha E\Delta T(M))\Big)\delta_{ij} \qquad (2a)$$

$$\sigma_{ij}(M) = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij}(M) + \left(\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}(M) - \frac{\alpha E(1+\nu)}{1-2\nu}\Delta T(M)\right)\delta_{ij}\right) \qquad (2б)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Действие термических напряжений проявляется в виде растрескивания материала, в виде пластической или для полимеров вынужденно эластической деформации и т.д. Термические напряжения могут вызывать потерю устойчивости изделия или детали конструкции, а также приводить к разрушению. Для хрупких материалов разрушение наступает, когда термическое напряжение превосходит предел прочности материала в данном месте. Для пластических материалов термические напряжения могут вызвать местную пластическую деформацию. Для полимеров и композитов на их основе внешним аналогом пластической деформации является вынужденно эластическая деформация, появление которой приводит к потере эксплуатационных свойств изделия. Термические напряжения могут релаксировать со временем. Однако вызванные ими пластические или вынужденно эластические деформации не исчезают.

Термические напряжения вносят основной вклад в значение внутренних напряжений в композиционных материалах на основе полимеров. Например, стеклопластики, т.е. полимеры, армированные стеклянными или другими волокнами. Основной вклад в значение

внутренних напряжений в таких материалах вносят именно термические напряжения. Возникновение термических напряжений обусловлено релаксационными процессами, и их значение зависит от скорости изменения температуры [2-21].

Особенно опасными являются термические напряжения, возникающие при тепловом ударе. Тепловой удар-это кратковременное воздействие большой интенсивности, порождающее резкое, возможно локальное, изменение теплового состояния тела, и как следствие этого высокие термические напряжения и различные динамические явления.

Динамические эффекты в теории теплового удара имеют давнюю историю. Так в ранних работах Дюгамеля (1838 год) отмечалось, что в случае изменения температуры в твердом теле с достаточно малой скоростью эффект инерции не может быть значительным, и эта точка зрения считалась бесспорной на протяжении более, чем 100 лет. В середине прошлого столетия В. Даниловская вернулась к этому вопросу и детально исследовала динамические эффекты в массивных телах, находящихся в условиях теплового удара. Было показано, что в этих условиях ускорения имеют существенное значение, и квазистатический подход не применим. К аналогичным выводам привели исследования Б.Боли для балок и пластин, Т. Мура для упругого полупространства (который, по-видимому, не знал о ранней и более общей работе Даниловской), В. Новаковского для бесконечной среды с внутренними нестационарными источниками теплоты, И. Игначака для упругого полупространства с точечным тепловым источником, Е. Штернберга и И. Чакраворти для бесконечной среды со сферической полостью, Э.Карташова для упругого полупространства с движущейся во времени границей и др. (ссылки в [22]). Тем не менее, не смотря на многочисленные публикации в этой области, отраженные также в обзорах [23,24], исследования указанной проблемы не могут считаться завершёнными. Этому вопросу посвящена и настоящая публикация.

Определяющие соотношения. Пусть D – конечная или частично ограниченная область изменения пространственных переменных $M(x, y, z)$ в соответствии с геометрией и размерами твёрдого тела, в котором изучается термическая реакция на тепловой удар; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к S, вектор, непрерывно меняющийся на S; $T(M,t)$ – распределение температуры в области D при $t > 0$, T_0 – начальная температура, при которой область D находится в ненапряжённом и недеформированном состоянии; $\sigma_{ij}(M,t)$, $\varepsilon_{ij}(M,t)$, $U_i(M,t)$ $(i, j = x, y, z)$ – соответственно, компоненты тензоров напряжений, де-

формаций и вектора перемещения, удовлетворяющие в D при $t > 0$ основным уравнениям (несвязанной) динамической задачи термоупругости: уравнениям движения (без учёта объёмных сил), геометрическим уравнениям, физическим уравнениям (в индексных обозначениях) [22]

$$\sigma_{ij,j}(M,t) = \rho U_i(M,t) \tag{3}$$

$$\varepsilon_{ij}(M,t) = \frac{1}{2}\left(U_{i,j}(M,t) + U_{j,i}(M,t)\right) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij}(M,t) = 2\mu\varepsilon_{ij}(M,t) + \\ &+\left(\lambda e(M,t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T(M,t) - T_0)\right)\delta_{ij} \end{aligned} \tag{5}$$

где $\rho -$ плотность материала; $\lambda, \mu -$ изотермические коэффициенты Ламе, $\mu = G$, $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$, $2G(1+\nu) = E$ (E - модуль Юнга, G - модуль сдвига, $\nu -$ коэффициент Пуассона),

$$e(M,t) = \varepsilon_{ii}(M,t) = div\vec{U}(M,t) \tag{6}$$

объёмная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\sigma(M,t) = \sigma_{ii}(M,t)$ равенством

$$e(M,t) = \left(3\lambda + 2\mu\right)^{-1}\sigma(M,t) + 3\alpha_T(T(M,t) - T_0) \tag{7}$$

α_T – коэффициент линейного теплового расширения, $\delta_{ij} -$ символ Кронекера. Термонапряжённое состояние области D при $t > 0$ может возникать при различных режимах теплового воздействия на границу S, создающих термический удар. К ним можно отнести наиболее распространённые на практике случаи [22-24]:

- температурный нагрев

$$T(M,t) = T_c \ , \ M \in S \ , \ t > 0 \ , \ T_c > T_0, \tag{8}$$

- тепловой нагрев

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial n} = -\frac{1}{\lambda_T} q_0 \ , \ M \in S \ , t > 0, \tag{9}$$

где λ_T – теплопроводность материала, $q_0 -$ тепловой поток,

- нагрев средой

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial n} = h\left(T(M,t) - T_c\right) \ , \ M \in S \ , t > 0, \tag{10}$$

где h – относительный коэффициент теплообмена, T_C – температура

окружающей среды $T_C > T_0$. Температурная функция $T(M,t)$ удовлетворяет уравнению нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \Delta T(M,t) \tag{11}$$

и может быть найдена как решение краевой задачи в $\overline{D}$ при $t \geq 0$ для данного уравнения методами, развитыми в [25]. В практике исследований термической реакции твёрдых тел различной формы на тепловой удар рассматриваются области:

1) (z,t) в декартовых координатах *(x,y,z)* (бесконечная пластина; пространство, ограниченное изнутри плоской поверхностью и т.д. – одномерное движение) с температурной функцией *T=T(z,t)*, при этом

$$U_x = U_y = 0 \ , \ U_z = U_z(z,t) \ , \ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z,t)\delta_{ij} \ , \ i,j = x,y,z, \tag{12}$$

2) *(r,t)* в цилиндрических координатах *(r,φ,z)* (радиальный поток теплоты; неограниченный цилиндр сплошной или полый; пространство, ограниченное изнутри цилиндрической поверхностью и т.д.) с температурной функцией *T=T(r,t)* , при этом

$$U_\varphi = U_z = 0 \ , \ U_r = U_r(r,t) \ , \ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(r,t)\delta_{ij} \ \ i,j = r,\varphi,z, \tag{13}$$

3) *(r,t)* в сферических координатах *(r, φ, θ)* (нагрев в условиях центральной симметрии) с температурной функцией *T=T(r,t)*, при этом

$$U_\varphi = U_z = 0 \ , \ U_r = U_r(r,t) \ , \ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(r,t)\delta_{ij} \ , \ i,j = r,\varphi,\theta \tag{14}$$

(шар сплошной или полый; пространство, ограниченное изнутри сферической поверхностью и т.д.).

В указанных условиях температурного состояния всех трёх областей, исключая в формулах (3) – (5) напряжения и деформации, после серии длительных преобразований приходим к следующему (основному) обобщённому уравнению динамической термоупругости относительно вектора перемещения $\vec{U}(M,t)$

$$grad(div\vec{U}(M,t)) - \frac{1}{v_p^2}\vec{U}(M,t) = \frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\alpha_T grad(T(M,t)-T_0), \tag{15}$$

где

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \tag{16}$$

– скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука в материале.

В первом случае соотношение (15) даёт

$$\frac{\partial^2 U_z(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2 U_z(z,t)}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T \frac{\partial\left(T(z,t)-T_0\right)}{\partial z}. \qquad (17)$$

Во втором случае из (15) следует

$$\frac{\partial^2 U_r(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r(r,t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2}U_r(r,t) - \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2 U_r(r,t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T \frac{\partial\left(T(r,t)-T_0\right)}{\partial r}. \qquad (18)$$

В третьем случае находим

$$\frac{\partial^2 U_r(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U_r(r,t)}{\partial r} - \frac{2}{r^2}U_r(r,t) - \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2 U_r(r,t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T \frac{\partial\left(T(r,t)-T_0\right)}{\partial r}. \qquad (19)$$

Термическая реакция массивного тела с внутренней сферообразной трещиной. Среди работ этого направления сформулированная задача занимает особое место, учитывая её прикладное значение для науки и техники [22-24]. В работах [26] и [27] эта задача была рассмотрена в квазистатической постановке; Джеффрис рассмотрел более простую задачу для случая внезапного равномерного давления поверхности сферической полости (ссылки в [23,24]). В работах [22] и [27] была рассмотрена динамическая модель указанной задачи, однако точные аналитические решения динамической задачи, предложенные авторами, имели вид громоздких функциональных конструкций и при этом в терминах функций ошибок комплексных аргументов, что значительно усложняло возможность практического использования полученных результатов. В настоящей работе предлагается точное аналитическое решение задачи в иных классах функций, что значительно устраняет громоздкость в записи решения и делает решение более удобным для численных экспериментов.

Изучается термическая реакция упругого пространства (r,φ,θ) $r \geq R$ с внутренней сферообразной трещиной $0 \leq r \leq R$, поверхность которой $r = R$, первоначально свободная от напряжений и находящаяся при температуре T_0, мгновенно нагревается до температуры $T_C > T_0$ и

далее поддерживается при этой температуре. Возникающие вследствие наличия температурного градиента $grad\,T(r,t)$ напряжения и деформации будут зависеть только от r и t, то есть $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(r,t)$, $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(r,t)$, $(i,j=r,\varphi,\theta)$; при этом отличной от нуля является только радиальная компонента вектора перемещения, то есть величина $U(r,t)$, удовлетворяющая согласно уравнению (15) соотношению:

$$\frac{\partial^2 U_r(r,t)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U(r,t)}{\partial r}-\frac{2}{r^2}U(r,t)-\frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2 U(r,t)}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T\frac{\partial\left(T(r,t)-T_0\right)}{\partial r},\quad r>R\ ,\ t>0 \tag{20}$$

Исходную модель запишем как это обычно принято в термомеханике в безразмерных переменных:

$$\rho=\frac{r}{R};\ \tau=\frac{at}{R^2};\gamma=\frac{a}{v_p R};$$
$$U_\rho(\rho,\tau)=\frac{(1-\nu)U(r,t)}{(1+\nu)R\alpha_T(T_c-T_0)};$$
$$W(\rho,\tau)=\frac{T(r,t)-T_0}{T_c-T_0};$$
$$\sigma_{\rho\rho}(\rho,\tau)=\frac{(1-2\nu)\sigma_{rr}(r,t)}{E\alpha_T(T_c-T_0)};\quad p=\frac{1-2\nu}{1-\nu};$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\tau)=\sigma_{\theta\theta}(\rho,\tau)=\frac{(1-2\nu)\sigma_{\varphi\varphi}(r,t)}{E\alpha_T(T_c-T_0)}=\frac{(1-2\nu)\sigma_{\theta\theta}(r,t)}{E\alpha_T(T_c-T_0)};$$
$$v_p=\sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}. \tag{21}$$

Имеем

$$\frac{\partial^2 U_\rho}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial U_\rho}{\partial\rho}-\frac{2}{\rho^2}U_\rho-\gamma^2\frac{\partial^2 U_\rho}{\partial\tau^2}=\frac{\partial W}{\partial\rho}\ \ ;\ \rho>1\ ,\ \tau>0. \tag{22}$$

Начальные и граничные условия для этого уравнения таковы

$$U_\rho(\rho,\tau)|_{\tau=0}=\frac{\partial U_\rho(\rho,\tau)}{\partial\tau}|_{\tau=0}=0,\ \ \rho\ge 1,$$
$$\left(\frac{\partial U_\rho(\rho,\tau)}{\partial\rho}+2(1-p)\frac{1}{\rho}U_\rho(\rho,\tau)-W(\rho,\tau)\right)|_{\rho=1}=0,\ \ \tau>0, \qquad (23)$$
$$\left|U_\rho(\rho,\tau)\right|<+\infty,\ \ \rho\ge 1,\ \ \tau\ge 0.$$

Безразмерная температурная функция $W(\rho,\tau)$ является решением краевой задачи

$$\frac{\partial W}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 W}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho},\ \ \rho>1,\ \tau>0,$$
$$W(\rho,\tau)|_{\tau=0}=0,\ \ \rho\ge 1;\ \ W(\rho,\tau)|_{\rho=1}=1,\ \ \tau>0, \qquad (24)$$
$$\left|W(\rho,\tau)\right|<+\infty,\ \ \rho\ge 1,\ \ \tau\ge 0.$$

В пространстве изображений по Лапласу она имеет вид

$$\overline{W}(\rho,s)=\frac{1}{\rho s}\exp\left(-(\rho-1)\sqrt{s}\right), \qquad (25)$$

здесь s – лапласовская переменная.

Находим из (22), (23) лапласовское изображение для перемещения $\overline{U}_\rho(\rho,s)$:

$$\overline{U}_\rho(\rho,s)=\frac{1+\rho\sqrt{s}}{\rho^2 s^2(\gamma^2 s-1)}\exp\left(-(\rho-1)\sqrt{s}\right)-$$
$$-\frac{(1+\rho\gamma s)\left(\gamma^2 s^2+2p(1+\sqrt{s})\right)}{\rho^2 s^2(\gamma^2 s-1)\left((\gamma s+p)^2+q^2\right)}\exp\left(-(\rho-1)\gamma s\right), \qquad (26)$$

где $q=\dfrac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu}$.

Радиальная компонента напряжения $\sigma_{\rho\rho}(\rho,\tau)$ связана с перемещением $U_\rho(\rho,\tau)$ соотношением:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho,\tau)=\frac{\partial U_\rho}{\partial\rho}+\frac{2(1-p)}{p}U_\rho-W. \qquad (27)$$

Из (26) и (27) (в пространстве изображений) находим:

$$\overline{\sigma}_{\rho\rho}(\rho,s)=\frac{\gamma^2p^2s^2+2p\rho\sqrt{s}+2p}{\rho^3s^2(1-\gamma^2s)}\exp\left(-(\rho-1)\sqrt{s}\right)-$$
$$-\frac{\left((p+\rho\gamma s)^2+q^2\right)\left(\gamma^2s^2+2p(1+\sqrt{s})\right)}{\rho^3s^2(1-\gamma^2s)\left((\gamma s+p)^2+q^2\right)}\exp\left(-(\rho-1)\gamma s\right). \qquad (28)$$

Заметим, что при такой форме записи изображения $\overline{\sigma}_{\rho\rho}(\rho,s)$ легко проверяется выполнение граничного условия $\overline{\sigma}_{\rho\rho}(1,s)=0$. Переход к оригиналам в (28) представляет собой достаточно сложную и громоздкую задачу. Для нахождения оригиналов используем равенство

$$\gamma^2s^2+2p\sqrt{s}+2p=\left((\gamma s+p)^2+q^2\right)+2p\sqrt{s}(1-\gamma\sqrt{s}) \qquad (29)$$

и далее введём новые в теории теплового удара функции:

$$K_n^*(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x\tau}\frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{(1+\gamma^2x)(\gamma^2x^2-2p\gamma x+2p)}dx;\ n=0,1,2. \qquad (30)$$

Эти функции дают оригиналы выражений

$$K_n^*(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}e^{s\tau}\frac{(-1)^n s^{n-\frac{1}{2}}}{(1+\gamma\sqrt{s})(\gamma^2s^2+2p\gamma s+2p)}ds \qquad (31)$$

и найдены путём вычисления контурных интегралов Римана-Меллина (31) от изображений, имеющих точку ветвления при $s=0$. Введём также функцию

$$2\psi_1(\rho,\tau)=\exp\left(\frac{\tau}{\gamma^2}-\frac{\rho-1}{\gamma}\right)\Phi^*\left(\frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}}-\frac{\sqrt{\tau}}{\gamma}\right)+$$
$$\exp\left(\frac{\tau}{\gamma^2}+\frac{\rho-1}{\gamma}\right)\Phi^*\left(\frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}}+\frac{\sqrt{\tau}}{\gamma}\right)+\frac{1}{s-\frac{1}{\gamma^2}}\exp\left(-(\rho-1)\sqrt{s}\right). \qquad (32)$$

Опуская длительные вычислительные процедуры, находим искомый оригинал для $\sigma_{\rho\rho}(\rho,\tau)$:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho,\tau)=\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho,\tau)+\begin{cases}0, & \tau<(\rho-1)\gamma\\ \sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\rho,\tau-(\rho-1)\gamma), & \tau>(\rho-1)\gamma\end{cases}, \tag{33}$$

где

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho,\tau)=-\frac{1}{\rho}\psi_1(\rho,\tau)+\frac{4p}{\rho^2\gamma^2\sqrt{\pi}}\int_0^\tau\psi_1(\rho,x)\sqrt{\tau-x}dx-$$
$$-\frac{2p}{\rho^3\gamma^2}\int_0^\tau\psi_1(\rho,x)(\tau-x)\,dx, \tag{34}$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\rho,\tau)=\frac{2p\gamma^2(2p-1+\gamma^2)}{\rho^3}K_1^*(\tau)-\frac{4p^2\gamma}{\rho^2}K_0^*(\tau)-$$
$$-\frac{2p\gamma^3}{\rho^3}K_2^*(\tau)-\frac{2p}{\rho^3}\left(2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}+(\gamma-1)\exp\left(\frac{\tau}{\gamma^2}\right)\Phi^*\left(\frac{\sqrt{\tau}}{\gamma}\right)-\gamma\right)+ \tag{35}$$
$$+\frac{\rho^2+2p\gamma(\gamma+\rho)}{\rho^2}\exp\left(\frac{\tau}{\gamma^2}\right)-\frac{2p(\gamma^2+\tau-\gamma(\rho-1)+\gamma\rho}{\rho^3}.$$

Здесь:

$$\Phi^*(z)=1-\Phi(z),\quad \Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-y^2}dy \tag{36}$$

– функция Лапласа. Остальные функции указаны в (30) и (32). Из (28) при $\gamma=0$ находим квазистатическое решение:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho,\tau)=\frac{2p}{\rho^3}\left(\begin{array}{l}(\rho-1)\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\exp\left(-\frac{\rho-1}{4\tau}\right)+\\ +\left(\tau+\frac{1-\rho^2}{2}\right)\Phi^*\left(\frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}}\right)-\left(2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}+\tau\right)\end{array}\right). \tag{37}$$

Компонента $\sigma_{\theta\theta}(\rho,\tau)$ связана с перемещением $U_\rho(\rho,\tau)$ соотношением:

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho,\tau)=(1-p)\frac{\partial U_\rho(\rho,\tau)}{\partial\rho}+\frac{2-p}{\rho}U_\rho(\rho,\tau)-W(\rho,\tau) \tag{38}$$

откуда и из (27) находим

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho,\tau)=\sigma_{\rho\rho}(\rho,\tau)-p\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}U_{\rho}(\rho,\tau)\right), \tag{39}$$

что даёт в пространстве изображений

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_{\theta\theta}(\rho,s)=\overline{\sigma}_{\rho\rho}(\rho,s)+\frac{p\left(3(1+\rho\sqrt{s})+\rho^2 s\right)}{\rho^3 s^2(\gamma^2 s-1)}\exp\left(-(\rho-1)\sqrt{s}\right)-\\ -\frac{p\left(3(1+\rho\gamma s)+\rho^2\gamma^2 s^2\right)\left(\gamma^2 s^2+2p(1+\sqrt{s})\right)}{\rho^3 s^2(\gamma^2 s-1)\left((\gamma s+p)^2+q^2\right)}\exp\left(-(\rho-1)\gamma s\right),\end{aligned} \tag{40}$$

где $\overline{\sigma}_{\rho\rho}(\rho,s)$ - расписано в формуле (28).

Исходный оригинал для $\sigma_{\theta\theta}(\rho,\tau)$ имеет вид:

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho,\tau)=\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\rho,\tau)+\begin{cases}0, & \tau<(\rho-1)\gamma\\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)}\left(\rho,\tau-(\rho-1)\gamma\right) & \tau>(\rho-1)\gamma\end{cases}, \tag{41}$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\rho,\tau)=\frac{2p}{\rho^3\gamma^2}\int_0^{\tau}\psi_1(\rho,x)(\tau-x)dx+\frac{p-1}{\rho}\psi_1(\rho,\tau)+\\ +\frac{2p}{\rho^3\gamma^2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\psi_1(\rho,x)\sqrt{\tau-x}\,dx-\frac{p}{\rho}\Phi^*\left(\frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}}\right),\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\rho,\theta)=\frac{p\gamma^2\left|2\rho^2(1-p)-(2p-1)\right|}{\rho^3}K_1^*(\tau)+\\ +\frac{2p^2\gamma}{\rho^2}K_0^*(\tau)+\frac{p\gamma^3}{\rho^3}K_2^*(\tau)+\\ +\frac{p}{\rho^3}\left(2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}+(\gamma-1)\exp\left(\frac{\tau}{\gamma^2}\right)\Phi^*\left(\frac{\sqrt{\tau}}{\gamma}\right)-\gamma\right)+\\ +\frac{\rho^2(1-p)-p\gamma(\gamma+\rho)}{\rho^3}\exp\left(\frac{\tau}{\gamma^2}\right)+\frac{p(\tau+\gamma^2+\gamma\rho)}{\rho^3}.\end{aligned} \tag{43}$$

Функции, входящие в (42), (43) указаны выше. Из (40) при $\gamma=0$ находим квазистатическое решение:

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho,\tau)=\frac{p}{\rho^3}\left(\begin{array}{l}\tau+2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}-(\rho+1)\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\exp\left(-\frac{(\rho-1)^2}{4\tau}\right)-\\ -\frac{1}{2}\left(\tau+7\rho^2-12\rho+7\right)\Phi^*\left(\frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}}\right)\end{array}\right). \qquad (44)$$

Численные расчеты и обсуждение. Как указывалось, цель работы – оценить влияние инерционных эффектов и их отклонение от аналогичных квазистатических результатов. Как видно из выражения (33) составляющая радиального напряжения, выражаемая функцией $\sigma_{\rho\rho}^{(1)}$ представляет собой сферическую упругую волну, распространяющуюся от поверхности полости внутрь материала со скоростью v_p. Рассмотрим произвольную точку (ρ,τ) внутри пространства. Вначале в ней возникает только составляющая напряжения $\sigma_{\rho\rho}^{(1)}$ и напряжение растёт от нуля до некоторого отрицательного значения, оставаясь сжимающим; в момент времени $\tau=(p-1)\gamma$ к этой точке приходит волна, соответствующая функции $\sigma_{\rho\rho}^{(2)}$, происходит суперпозиция волн, приводящая к скачкообразному изменению напряжения и его дальнейшему спаду до квазистатических значений. Представляет интерес рассчитать величину скачка напряжений на фронте термоупругой волны, используя теорему запаздывания для слагаемого вида $\overline{Q}(s)\exp(-(\rho-1)\gamma s)$ в операционном решении (28). Находим для $\sigma_{\rho\rho}(\rho,\tau)$:

$$|\Delta|=\lim_{\tau\to(\rho-1)\gamma+0}Q(\tau-(\rho-1)\gamma s)=\lim_{\tau\to 0+}Q(\tau)=\lim_{s\to\infty}s\overline{Q}(s)=\frac{1}{\rho}. \qquad (45)$$

В координатах (r,t) находим для $\sigma_{rr}(r,t)$:

$$|\Delta|=\frac{E\alpha_T(T_c-T_0)}{(1-2\nu)}\cdot\frac{R}{r}. \qquad (46)$$

На рис. 1 приведено рассчитанное изменение напряжения $\sigma_{\rho\rho}(\rho,\tau)$ в сечении $\rho=2$ в зависимости от τ для $\nu=0.25,\ \gamma=1$ (значение γ принято достаточно большим, что позволяет отчётливо выявить особенности динамических эффектов), вычисленное по формулам (33)-(35) и квазистатическая кривая (37).

Как видно из графика, в результате действия сил инерции в сечении $\rho=2$ при $\tau<\gamma$ возникает сжимающее напряжение, изменяющееся

от 0 до значения (-0.54) при $\tau = \gamma$, что значительно превосходит квазистатическое значение (37). В момент времени $\tau = \gamma$ под действием упомянутой выше упругой волны расширения происходит скачкообразное изменение $\sigma_{\rho\rho}$ на величину $|\Delta| = 0.5$ и после прохождения волны расширения напряжение, оставаясь сжимающим, быстро уменьшается, приближаясь к квазистатическому значению и далее обе кривые, в свою очередь, стремятся к стационарной асимптоте. Следует подчеркнуть важное прикладное значение соотношения (46) для исходного (в системе *(r,t)*) радиального напряжения $\sigma_{rr}(r,t)$. Видно, что величина скачка определяется тепловыми и упругими свойствами материала, зависит от величины нагрева сферической полости, её размера и может служить верхней оценкой максимальной величины радиального напряжения в конкретном сферическом сечении *r=const*. На рис. 2 приведено распределение напряжения $\sigma_{\rho\rho}(\rho,\tau)$ по текущей толщине от сферической поверхности вглубь материала для различных τ при тех же значениях *ν* и *γ*. Фронт волны находится в точке $\rho = \tau + 1$, скачок напряжения имеет величину $|\Delta| = 1/(\tau + 1)$.

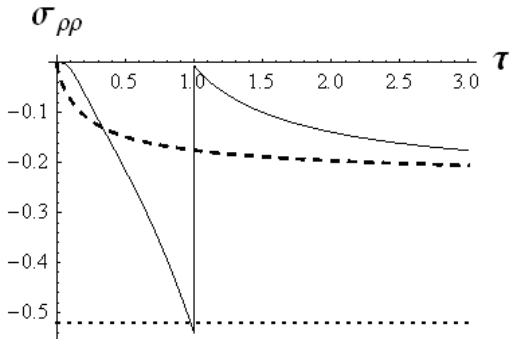


Рис. 1. Временная зависимость $\sigma_{\rho\rho}(\rho,\tau)$ при $\rho = 2$, $\nu = 0.25$: —— – динамическая кривая при $\gamma = 1$; ---- – квазистатическая кривая при $\gamma = 0$; ····· – стационарная асимптота

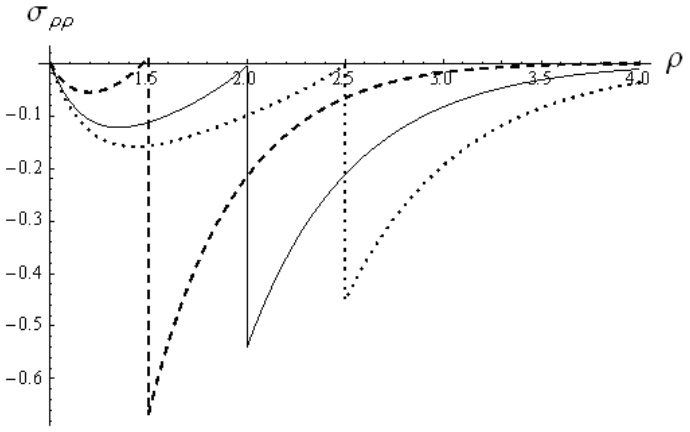


Рис. 2. Зависимость радиального напряжения по текущей толщине в разные моменты времени при $\gamma = 1$, $\nu = 0.25$: ---- – $\tau = 0.5$; —— – $\tau = 1$; ····· – $\tau = 1{,}5$

Видно, что максимальная амплитуда напряжения уменьшается с течением времени τ и возрастает для времён микросекундной длительности. На рис. 3 приведена временная зависимость $\sigma_{\theta\theta}(\rho,\tau)$ при ρ=2, γ=0.2, ν=0.25, рассчитанная по формулам (41)-(43), а также квазистатическая кривая (44).

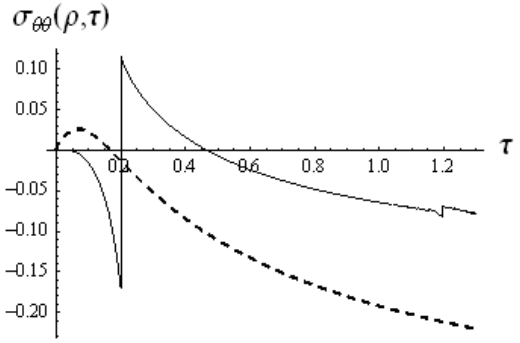


Рис. 3. Временная зависимость $\sigma_{\theta\theta}(\rho,\tau)$ при $\rho=2$, $\nu=0.25$: —— – динамическая кривая при $\gamma=0.2$; ---- – квазистатическая кривая при $\gamma=0$

Как видно из графика, пиковое значение динамической кривой отражает скачок на фронте волны (величиной $|\Delta|=(1-\rho)/\rho$) и также значительно превосходит квазистатическое значение. Как и следовало ожидать, динамическая кривая на рис. 3 близка по графике кривой $\sigma_{\rho\rho}$ на рис. 1 и не повторяет аналогичных результатов численного эксперимента, приведённых в [28] при тех же значениях параметров.

Выводы. 1. Предложено обобщённое дифференциальное соотношение для динамической термоупругости, имеющее обширное поле практических приложений при изучении термической реакции на тепловой удар твердых тел различной канонической формы.

2. Приведены численные расчеты динамических эффектов и показано, что квазистатическая трактовка временных проблем в теории теплового удара не позволяет учесть основные закономерности скоротечной термоупругости и учётом инерционных эффектов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Валишин А.А. Возмущение температурного поля трещиной. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, выпуск №11(71).

[2] Dimitrienko Yu.I. Heat- Mass-Transport and Thermal Stresses in Porous Charring Materials. *Journal of Transport in Porous Media*, 1997, vol.27, no. 2, pp. 143-170.

[3] Dimitrienko Yu.I. Modelling of Mechanical Properties of Composite Materials under High Temperatures. Part 1. Matrix and Fibres. *Int. Journal of Applied Composite Materials*, 1997, vol.4, no. 4, pp. 219-237.

[4] Dimitrienko Yu.I. Modelling of Mechanical Properties of Composite Materials under High Temperatures. Part 2. Unidirectional Composites. *Int. Journal of Applied Composite Materials*, 1997, vol.4, no. 4, pp. 239-261.

[5] Dimitrienko Yu.I. Thermomechanical Behaviour of Composite Materials and Structures under High Temperatures. Part 1. Materials. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1997, vol. 28A, pp. 453-461.

[6] Dimitrienko Yu.I. Thermomechanical Behaviour of Composite Materials and Structures under High Temperatures. Part 2. Structures. Composites. *Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1997, vol.28A, pp. 463-471.
[7] Dimitrienko Yu.I. Effect of Finite Deformations on Heat-Mass Transfer in Elastomer Ablating Materials. *Int. Journal of Heat Mass Transfer*, 1997, vol.40, no. 3, pp. 699-709.
[8] Dimitrienko Yu.I. Internal Heat-Mass-Transfer and Stresses in Thin-Walled Structures of Ablating Materials. *Int. Journal of Heat Mass Transfer*, 1997, vol.40, no. 7, pp. 1701-1711.
[9] Dimitrienko Yu.I. Mechanics of Porous Media with Phase Transformations and Periodical Structure. Part 1. Method of Asymptotic Averaging. *European Journal of Mechanics. A: Solids*, 1998, vol.17, no. 2, pp. 305-322.
[10] Dimitrienko Yu.I. Mechanics of Porous Media with Phase Transformations and Periodical Structure. Part 2. Solutions of Local and Global Problems. *European Journal of Mechanics. A: Solids*, 1998, vol.17, no. 2, pp. 323-337.
[11] Dimitrienko Yu.I**.** Modelling of Mechanical Properties of Composite Materials under High Temperatures. Part 3. Textile Composites. *Int. Journal of Applied Composite Materials*, 1998, vol.5, no. 4, pp. 257-272.
[12] Dimitrienko Yu.I. A structural thermomechanical model of textile composite materials at high temperatures. *Composite science and technologies*, 1999, vol.59, pp. 1041-1053.
[13] Dimitrienko Yu.I. Modelling of carbon - carbon composite manufacturing processes. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1999, vol.30A.
[14] Dimitrienko Yu.I. Dynamic Transport Phenomena in Porous Polymer Materials Under Impulse Thermal Effects. *Journal of Transport in Porous Media*, 1999, vol.35, no. 2.
[15] Dimitrienko Yu.I. Thermomechanical behaviour of composites under local intense heating by irradiation. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2000, vol.31A, pp. 591-598.
[16] Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Корепанов А.С. Численное моделирование термонапряжений и тепломассопереноса в оболочечных композитных конструкциях при локальном лазерном нагреве. *Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки*, 2005, №1, с.102-116.
[17] Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е.К. Моделирование термомеханических процессов в композитных оболочках при локальном нагреве излучением. Механика композиционных материалов и конструкций, 2011, т. 17, №1, с.71-91.
[18] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V., Syzdykov E.K. Modeling of the thermomechanical processes in composite shells in local radiation heating. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2011, vol.2, issue 2, pp.147-169.
[19] Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е.К**.**Моделирование внутреннего тепломассопереноса и термонапряжений в композитных оболочках при локальном нагреве. *Математическое моделирование*, 2011, т. 23, № 9, с.14-32.
[20] Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е.К. Численное моделирование процессов тепломассопереноса и кинетики напряжений в термодеструктирующих композитных оболочках. *Вычислительные технологии*, 2012, т.17, №2, с.44-60.
[21] Димитриенко Ю. И., Коряков М. Н., Захаров А. А., Строганов А. С. Численное моделирование сопряженных аэрогазодинамических и термомеханических процессов в композитных конструкциях высокоскоростных летательных аппаратов. *Математическое моделирование и численные методы*,

2014, №3 (3), с. 3-24
[22] Карташов Э.М., Кудинов В.А. *Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости*. Москва, изд-во URSS. 2012. 970 с.
[23] Карташов Э.М., Бартенев Г.М. Динамические эффекты в твёрдых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии (Обзор). *Итоги науки и техники, серия Химия и технология ВМС*, 1988, т.25, с.3-88.
[24] Карташов Э.М., Партон В.З. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара. (Обзор *Итоги науки и техники, серия Химия и технология ВМС*, 1991, т.22, с.55-127.
[25] Карташов Э.М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*. Москва, Высшая школа. 2001. 540 с.
[26] Паркус Г. *Неустановившиеся температурные напряжения*. Москва, Изд-во Физмат. 1963. 252 с.
[27] Карташов Э.М. Термическая реакция вязкоупругих тел на тепловой удар. *Тепловые процессы в технике*, 2012, т.4, №3, с. 125-131.
[28] Sternberg E., Chakravorty J. Thermal shock in an elastic body with a spherical cavity. *Quart. Appl. Math*., 1959, vol. 17, pp. 205-218.
[29] Карташов Э.М., Кудинов В.А. *Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений*. URSS/2018.1100 с.

Статья поступила 03.06.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Валишин А.А., Карташов Э.М. Математическое моделирование термических напряжений в твердом теле с внутренней трещиной. *Математическое моделирование и численные методы,* 2018, № 3, с. 3–21.

Валишин Анатолий Анатольевич – физико-математических наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» (ФН-11) Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. e-mail: enf@mail.ru

Карташов Эдуард Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный деятель науки. Московский технологический университет. (Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова.)

Mathematical modeling of thermal stresses in a solid with an internal crack

© A.A. Valishin[1, 2], E.M. Kartashov[2]

[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2] MIREA – Russian University of technology, Moscow, 119454, Russia

The purpose of this study was to evaluate the influence of the inertial effects and their deviation from the same quasi-static results. The role of inertial effects in the problem of thermal shock is studied on the example of a massive body with an internal spherical crack. We study the thermal reaction of an elastic space with an internal spherical crack whose surface, initially stress-free and at a temperature of T0, is instantly heated to a temperature

of TC > T0 and then maintained at that temperature. Thermal stress state occurs under different modes of heat exposure, creating heat stroke. The most common in practice, three cases: temperature heating, thermal heating and heating medium. The generalized dynamic thermoelasticity equation for all three cases in rectangular and curvilinear coordinates is obtained. Considered the thermal response of a massive rigid body with internal spiroborate crack. The exact analytical solution of the problem is obtained. Earlier in the works of one of the authors the solution of the dynamic problem in the form of bulky functional structures was obtained, which greatly complicated their practical use. In this paper, we propose a solution to the problem in new classes of functions, which makes the solution more convenient for numerical experiments. A generalized differential relation for dynamic thermoelasticity is proposed, which has an extensive field of practical applications in the study of thermal response to heat stroke of solids of different shapes. It is shown that the component of the radial stress is a spherical elastic wave propagating from the cavity surface into the material. Numerical calculations of dynamic effects are performed and it is shown that the quasi-static interpretation of time problems in the theory of heat stroke does not allow to take into account the basic laws of transient thermoelasticity and inertial effects.

Keywords: *thermoelasticity, dynamic voltage, inertial effects.*

REFERENCES

[1] Valishin A.A. *Inzhenernyy zhurnal: Nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2017, no. 11(71).

[2] Dimitrienko Yu.I**.** Heat- Mass-Transport and Thermal Stresses in Porous Charring Materials. *Journal of Transport in Porous Media*, 1997, vol.27, no. 2, pp. 143-170.

[3] Dimitrienko Yu.I. Modelling of Mechanical Properties of Composite Materials under High Temperatures. Part 1. Matrix and Fibres. *Int. Journal of Applied Composite Materials*, 1997, vol.4, no. 4, pp. 219-237.

[4] Dimitrienko Yu.I**.** Modelling of Mechanical Properties of Composite Materials under High Temperatures. Part 2. Unidirectional Composites. *Int. Journal of Applied Composite Materials*, 1997, vol.4, no. 4, pp. 239-261.

[5] Dimitrienko Yu.I. Thermomechanical Behaviour of Composite Materials and Structures under High Temperatures. Part 1. Materials. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1997, vol. 28A, pp. 453-461.

[6] Dimitrienko Yu.I. Thermomechanical Behaviour of Composite Materials and Structures under High Temperatures. Part 2. Structures. Composites. *Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1997, vol.28A, pp. 463-471.

[7] Dimitrienko Yu.I. Effect of Finite Deformations on Heat-Mass Transfer in Elastomer Ablating Materials. *Int. Journal of Heat Mass Transfer*, 1997, vol.40, no. 3, pp. 699-709.

[8] Dimitrienko Yu.I. Internal Heat-Mass-Transfer and Stresses in Thin-Walled Structures of Ablating Materials. *Int. Journal of Heat Mass Transfer*, 1997, vol.40, no. 7, pp. 1701-1711.

[9] Dimitrienko Yu.I. Mechanics of Porous Media with Phase Transformations and Periodical Structure. Part 1. Method of Asymptotic Averaging. *European Journal of Mechanics. A: Solids*, 1998, vol.17, no. 2, pp. 305-322.

[10] Dimitrienko Yu.I. Mechanics of Porous Media with Phase Transformations and Periodical Structure. Part 2. Solutions of Local and Global Problems. *European Journal of Mechanics. A: Solids*, 1998, vol.17, no. 2, pp. 323-337.

[11] Dimitrienko Yu.I**.** Modelling of Mechanical Properties of Composite Materials under High Temperatures. Part 3. Textile Composites. *Int. Journal of Applied Composite Materials*, 1998, vol.5, no. 4, pp. 257-272.

[12] Dimitrienko Yu.I. A structural thermomechanical model of textile composite materials at high temperatures. *Composite science and technologies*, 1999, vol.59, pp. 1041-1053.

[13] Dimitrienko Yu.I. Modelling of carbon - carbon composite manufacturing processes. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1999, vol.30A.

[14] Dimitrienko Yu.I. Dynamic Transport Phenomena in Porous Polymer Materials Under Impulse Thermal Effects. *Journal of Transport in Porous Media*, 1999, vol.35, no. 2.

[15] Dimitrienko Yu.I. Thermomechanical behaviour of composites under local intense heating by irradiation. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2000, vol.31A, pp. 591-598.

[16] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V., Korepanov A.S. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2005, no. 1, pp.102-116.

[17] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V., Syzdzykov E.K. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy — Mathematical modeling and Computational Methods*, 2011, vol. 17, no. 1, pp.71-91.

[18] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V., Syzdykov E.K. Modeling of the thermomechanical processes in composite shells in local radiation heating. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2011, vol.2, issue 2, pp.147-169.

[19] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V., Syzdykov E.K. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical modeling*, 2011, vol. 23, no. 9, pp.14-32.

[20] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V., Syzdykov E.K. *Vychislitelnye tekhnologii – Computing*, 2012, vol.17, no. 2, pp.44-60.

[21] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A., Stroganov A.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 3, pp. 3–24.

[22] Kartashov E. M., Kudinov V.A.. Analiticheskaya teoriya teploprovodnosti i nprikladnoi termouprugosti [*Analytical theory of thermal conductivity and applied thermoelasticity]*. Moscow, URSS Publ.. 2012. 970 p.

[23] Kartashov E. M., Bartenev G.M. *Itogi nauki i nekhniki, seriya Khimiya i tekhnologiya VMS – Results of science and technology, series Chemistry and technology VMS*, 1988, vol. 25, pp.3-88.

[24] Kartashov E. M., Parton V.Z. *Itogi nauki i nekhniki, seriya Khimiya i tekhnologiya VMS – Results of science and technology, series Chemistry and technology VMS*, 1991, vol.22, pp.55-127.

[25] Kartashov E. M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow, Vyshaya Shkola Publ., 2001. 540 p.

[26] Parkus G. *Neustanivivshiesya temperaturnye napryazeniya* [Transient thermal stresses]. Moscow, FizMat Publ. 1963. 252 p.

[27] Kartashov E. M. Neplovye process v tekhnike – *Thermal processes in engineering*, 2012, vol.4, no. 3, pp. 125-131.

[28] Sternberg E., Chakravorty J. Thermal shock in an elastic body with a spherical cavity. *Quart. Appl. Math*., 1959, vol. 17, pp. 205-218.

[29] Kartashov E. M., Kudinov V.A. *Analiticheskie metody teorii teploprovodnosti i ee prilozeniya* [Analytical methods of heat conduction theory and its applications]. URSS/2018.1100 p.

Valishin A.A., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. e-mail: enf@mail.ru

Kartashov E.M,– Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor. Honored worker of science. MIREA – Russian University of technology.