ISSN 2309-3684

Математическое моделирование и численные методы

Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Стохастические модели двухсторонних боевых тдействий многочисленных группировок при линейных зависимостях эффективнх скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя. Математическое моделирование и численные методы, 2018, № 2, с. 122–132.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/168/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.47
13.02.2026 03:20:25

УДК 519.8

Стохастические модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок при линейных зависимостях эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя

© В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В настоящей статье представлены разработанные на основе теории марковских процессов модели двухсторонних боевых действий с линейными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя. Разработан алгоритм, позволяющий вычислить основные показатели боя многочисленных группировок. Проведено сравнение с результатами моделирования боя, полученными на основе вероятностных моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями и детерминированной моделью боя с линейными зависимостями эффективных скорострельностей от времени боя. Показаны области применимости последних.

Ключевые слова: *непрерывный марковский процесс, вероятностная модель двухсторонних боевых действий, боевая единица, эффективная скорострельность, параметр начального соотношения сил.*

Введение. На этапе проектирования новых технических систем возникает задача построения математической модели их функционирования для оценки качества их работы [1,2]. Основой оценки разрабатываемых образцов военной техники и вооружения являются показатели боевой эффективности, поскольку они в конечном итоге позволяют оценить степень приспособленности данного образца к решению конкретных боевых задач [3,4]. Основу такой оценки должны составлять модели двухсторонних боевых действий, так как они позволяют более полно и достоверно учитывать ряд факторов, влияющих на эффективность в реальных боевых условиях, чем модели без учёта ответного огня [5 - 9]. А так как бой является стохастическим процессом, в качестве основы такой оценки целесообразно использовать вероятностные модели, поскольку они позволяют отобразить процесс протекания боевых действий с большей степенью точности и полноты, чем детерминированные модели (модели динамики средних) [10 - 12].

Возможным способом построения модели двухсторонних боевых действий является применение теории непрерывных марковских процессов [13]. Процесс, протекающий в системе, называется марковским, если в каждый момент времени вероятности всех состояний системы в будущем зависят только от её состояния в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние [14].

Последовательность выстрелов, осуществляемых каждой участвующей в бою единицей, представляется в виде пуассоновского потока событий [3]. Применяется также приём, заключающийся в переходе от потока выстрелов к потоку успешных выстрелов, который также считается пуассоновским. Выстрел назовём успешным, если он поражает боевую единицу противника [4].

Основные математические зависимости и формулы. Пусть в начале боя сторона X имеет m однотипных боевых единиц, а сторона Y - n также однотипных боевых единиц, не обязательно однородных с единицами стороны X .

Введём следующие обозначения:

p_x, p_y - вероятности поражения боевой единицы противника одним выстрелом единицы сторон X и Y соответственно, λ_x, λ_y – практические скорострельности боевых единиц сторон X и Y соответственно, величины $v = p_x\lambda_x$ и $u = p_y\lambda_y$ назовем эффективными скорострельностями боевых единиц сторон.

В настоящее время разработаны марковские модели различных по численности группировок [15 - 17]. Однако большинство этих моделей имеют достаточно серьёзный недостаток – эффективные скорострельности боевых единиц сторон считаются в течение всего боя постоянными (то есть $v = const, u = const$), что не всегда приемлемо при отображении реальных боевых действий. При отражении атаки противника, а также при наступлении на его позиции происходит сближение сторон, приводящее к уменьшению дальности стрельбы, что может привести к значительному увеличению эффективных скорострельностей боевых единиц обеих сторон. В ряде случаев они хорошо аппроксимируются линейными функциями времени боя, то есть

$$\begin{cases} v = k_x\left(1 + a_x t\right) \\ u = k_y\left(1 + a_y t\right). \end{cases}$$

Полагая, что противоборствующие стороны начинают боевые действия одновременно, получаем следующую систему уравнений для описания процесса боевых действий.

$$F'_{i0}(t) = ik_x(1+a_x t)F_{i1}(t), \quad i=\overline{1,m},$$
$$F'_{0j}(t) = jk_y(1+a_y t)F_{1j}(t), \quad j=\overline{1,n},$$
$$F'_{ij}(t) = -\left(ik_x(1+a_x t) + jk_y(1+a_y t)\right)F_{ij}(t) + ik_x(1+a_x t)F_{i,j+1}(t) +$$
$$+ jk_y(1+a_y t)F_{i+1,j}(t), \quad \begin{cases} i=\overline{1,m-1} \\ j=\overline{1,n-1} \end{cases},$$
$$F'_{mj}(t) = -\left(mk_x(1+a_x t) + jk_y(1+a_y t)\right)F_{mj}(t) +$$
$$+mk_x(1+a_x t)F_{m,j+1}(t), \; j=\overline{1,n-1},$$
$$F'_{in}(t) = -\left(ik_x(1+a_x t) + nk_y(1+a_y t)\right)F_{in}(t) +$$
$$+nk_y(1+a_y t)F_{i+1,n}(t), \; i=\overline{1,m-1},$$
$$F'_{mn}(t) = -\left(mk_x(1+a_x t) + nk_y(1+a_y t)\right)F_{mn}(t),$$

с начальными условиями $F_{mn}(0)=1, \quad F_{ij}(0)=0$ при $i+j<m+n$, где $F_{ij}(t)$ - вероятности того, что в момент времени t сохранились i единиц стороны X и j единиц стороны Y (вероятность состояния $i:j$), $F'_{ij}(t)$ - их производные по времени.

Полагая, что бой ведётся до полного уничтожения одной из противоборствующих сторон, получаем, что окончательными состояниями системы являются (1:0),..(i:0),…(m:0), (0:1),…(0: j),…(0: n).

Авторами разработан численный алгоритм, который позволяет вычислить вероятности всех состояний системы в любой момент времени боя, а также вероятности окончательных состояний и основные показатели боя. К таковым в первую очередь относятся вероятности победы P_{0x} и P_{0y} сторон X и Y соответственно и математические ожидания M_x и M_y относительных количеств сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя.

Для боя $m:n$ эти величины вычисляются следующим образом.

$$P_{0x} = \sum_{i=1}^{m} F_{i0}(\infty),$$
$$P_{0y} = \sum_{j=1}^{n} F_{0j}(\infty),$$

$$M_x = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} iF_{i0}(\infty),$$
$$M_y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} jF_{0j}(\infty),$$

где $F_{ij}(\infty)$ - вероятности того, что к концу боя сохранились i единиц стороны X и j единиц стороны Y.

Формулы для вычисления вероятностей текущих и окончательных состояний, а также основных показателей дуэльного боя двух единиц приведены в [18].

Для дуэльного боя имеем:

$$P_{0x} = M_x = F_{10}(\infty),$$
$$P_{0y} = M_y = F_{01}(\infty).$$

Анализ результатов расчётов. Исследуем возможность использования для решения военно-технических и военно-тактических задач более простых моделей боевых действий: модели динамики средних с линейными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя [19] и вероятностных моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями боевых единиц [20]. Для этого проведём сравнение результатов моделирования боя при использовании различных моделей.

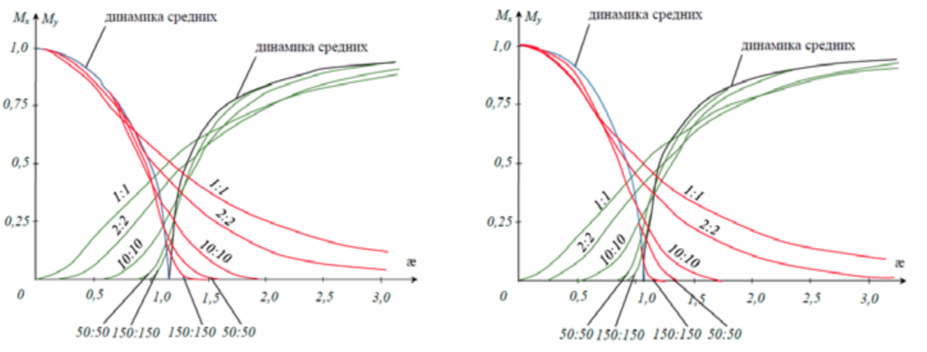
Введём обозначения:

$$\mu = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{a_x + a_y},\ \nu = \frac{a_y}{a_x + a_y},\ æ = \frac{n}{m}\sqrt{\frac{k_y}{k_x}}.$$

Параметр μ характеризует степень роста интенсивности протекания боя (чем больше μ, тем медленнее возрастает интенсивность его протекания). В реальных боевых условиях $\mu \geq 1$ (как правило, $\mu \geq 2$). Параметр ν характеризует относительную скорость изменения эффективных скорострельностей боевых единиц одной из сторон относительно другой в процессе протекания боя, ν меняется в пределах от нуля до единицы. При $\nu = 0$ имеем $a_y = 0$ (то есть эффективные скорострельности боевых единиц стороны Y в течение боя не меняются), при $\nu = 1$ величина $a_x = 0$ (то есть постоянными являются эффективные скорострельности боевых единиц стороны X), а при $\nu = 0,5$ получаем $a_x = a_y$. Параметр æ назовём параметром начального соотношения сил. Отметим, что для модели динамики средних с постоянными эффективными скорострельностями значение $æ = 1$ является условием равенства сил противоборствующих группировок [19].

На рис. 1 – 3 представлены результаты расчётов, полученные с использованием разработанного авторами численного алгоритма вычисления основных показателей боя на основе представленных в настоящей статье моделей. Значения M_x и M_y относительных численностей, сохранившихся к концу боя единиц сторон X и Y , показаны соответственно красными и зелёными линиями, значения M_x и M_y , полученные методом динамики средних, - синими и чёрными линиями.

Рис. 1*а* и 1*б* соответствуют равным начальным численностям группировок ($m = n$), рис. 2*а* и 2*б* соответствуют ситуации, когда начальные численности стороны Y в пять раз превосходят начальные численности стороны X ($n = 5m$), а рис. 3*а* и 3*б* – ситуации, когда начальные численности стороны X в пять раз превосходят начальные численности стороны Y ($m = 5n$). Рис. 1*а*, 2*а* и 3*а* соответствуют значению $\mu = 1$, а рисунки 1*б*, 2*б* и 3*б* – значению $\mu = 4$. Все рисунки соответствуют значению $\nu = 0$ ($a_y = 0$), то есть значению ν , которое наиболее сильно влияет на ход протекания боя и его основные показатели. Для значения $\nu = 1$ ($a_x = 0$) получаем аналогичные результаты.

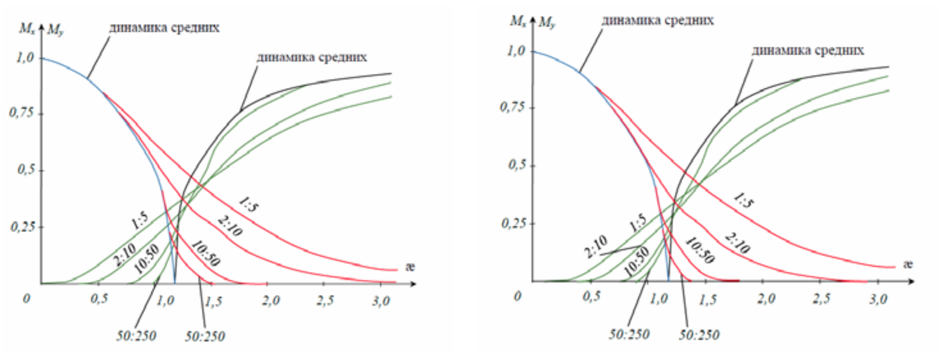


а *б*

Рис. 1. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя ($m = n$):
а – при $\mu = 1$, б – при $\mu = 4$

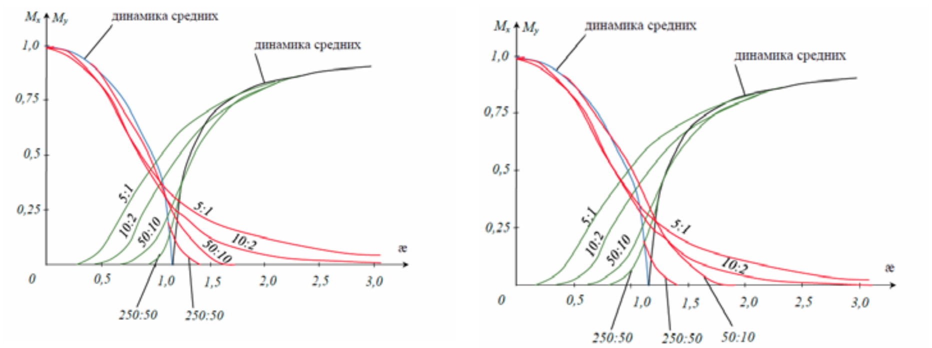
Как показали результаты расчётов, на ошибки метода динамики средних влияет в первую очередь соотношение сил противоборствующих группировок, а не их начальные численности. Например, для боя

“100:100” при $\mu = 1, \nu = 0,25$ и $æ = 1,05$ ошибка в вычислении величины M_y превосходит 10%, а при $\mu = 2, \nu = 0,3$ и $æ = 1,05$ аналогичная ошибка получается при вычислении величины M_x. Вместе с тем, при достаточно большом превосходстве одной из сторон ($æ < 0,45$ и $æ > 2,2$) ошибки в вычислении величин M_x и M_y не превосходят 2% даже для боя небольших по численности группировок ($m \geq 10, n \geq 10$).



а *б*

Рис. 2. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя ($n = 5m$):
а – при $\mu = 1$, б – при $\mu = 4$



а *б*

Рис. 3. Математические ожидания M_x и M_y относительных численностей сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя ($m = 5n$):
а – при $\mu = 1$, б – при $\mu = 4$

Использование вероятностных моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями также может в отдельных случаях привести к существенным ошибкам в вычислении его основных показателей. Так, для боя “25:25” при $k_x = 0,02, k_y = 0,0288, a_x = 0,0216$ и $a_y = 0,0024$ (при этом $\mu = 1; \nu = 0,1;$ $æ = 1,2$) получаем

$M_x = 0{,}151; M_y = 0{,}327; P_{0x} = 0{,}373$ и $P_{0y} = 0{,}627$. Если принять эффективные скорострельности равными их значениям в начале боя, получаем $M_x = 0{,}051; M_y = 0{,}498; P_{0x} = 0{,}131$ и $P_{0y} = 0{,}869$. Если же принять их равными своим средним значениям в течение боя, то есть $v = 0{,}046; u = 0{,}033$ (при этом $æ = 0{,}847$), получаем $M_x = 0{,}476; M_y = 0{,}060; P_{0x} = 0{,}847$ и $P_{0y} = 0{,}153$.

А для боя “10:50” при $k_x = 0{,}05, k_y = 0{,}00242, a_x = 0{,}00495$ и $a_y = 0{,}00055$ (при этом $\mu = 2; v = 0{,}1; æ = 1{,}1$) получаем $M_x = M_y = 0{,}256; P_{0x} = 0{,}503$ и $P_{0y} = 0{,}497$. Если принять эффективные скорострельности равными их значениям в начале боя, получаем $M_x = 0{,}173; M_y = 0{,}341; P_{0x} = 0{,}348$ и $P_{0y} = 0{,}652$. Если же принять их равными своим средним значениям в течение боя, то есть $v = 0{,}087125; u = 0{,}00262$ (при этом $æ = 0{,}867$), получаем $M_x = 0{,}475; M_y = 0{,}092; P_{0x} = 0{,}787$ и $P_{0y} = 0{,}213$.

На ошибки вероятностных моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями влияет в первую очередь значение величины v, а также значения величин μ и $æ$. При $0{,}45 < æ < 0{,}54$ ошибки в вычислении величин M_x и M_y не превосходят 5% при любых значениях μ и $æ$. Аналогичная картина наблюдается и при больших значениях μ ($\mu \geq 5$), а также при значительном превосходстве одной из противоборствующих сторон ($æ \leq 0{,}45$ и $æ \geq 2{,}2$). Отметим, что при одинаковых показателях роста эффективных скорострельностей боевых единиц сторон $(a_x = a_y, v = 0{,}5)$ значения M_x, M_y, P_{0x} и P_{0y} не меняются при использовании различных вероятностных моделей боя. Изменяется только ожидаемое время протекания боя.

Выводы. Результаты настоящей статьи позволяют сделать следующие выводы.

1. На основе теории непрерывных марковских процессов разработаны вероятностные модели двухсторонних боевых действий с линейными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц противоборствующих сторон от времени боя. Разработан численный алгоритм, позволяющий вычислить основные показатели боя многочисленных группировок.

2. Показано, что использование модели динамики средних может привести к значительным ошибкам в вычислении основных показателей боя достаточно близких по силам группировок даже при их боль-

ших начальных численностях. При существенном превосходстве одной из противоборствующих сторон для описания боя даже небольших по численности группировок можно использовать модели динамики средних, что не приведёт к достаточно большим ошибкам в вычислении его основных показателей.

3. Установлено, что использование вероятностных моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями боевых единиц сторон может привести в отдельных случаях к существенным ошибкам в вычислении его основных показателей. Но при достаточно близких показателях роста эффективных скорострельностей, а также при достаточно большом превосходстве одной из противоборствующих сторон использование моделей данного типа не приведёт к сколь заметным ошибкам в вычислении основных показателей боя.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров А.А., Димитриенко Ю.И. Математическое и компьютерное моделирование — основа современных инженерных наук. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1 (1), с. 3–4.

[2] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

[3] Чуев Ю.В. *Исследование операций в военном деле*. Москва, Воениздат, 1970, 270 с.

[4] Вентцель Е.С. *Исследование операций: задачи, принципы и методология*. Москва, УРСС, 2006, 432 с.

[5] Глушков И.Н. Выбор математической схемы при построении модели боевых действий. *Программные продукты и системы*, 2010. №1. С. 1 – 9.

[6] Ильин В.А. Моделирование боевых действий сил флота. *Программные продукты и системы*, 2006, № 1, с. 23–27.

[7] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to operations research*. New York, MeGrew-Hill, 2005, 998 p.

[8] Winston W.L. *Operations research: applications and algorithms*. Belmont, Duxbury Press, 2001, 128 p.

[9] Chen X., Jing Y., Li C., Li M. Warfare command stratagem analysis for winning based on Lanchester attrition models. *Journal of Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21 (1), pp. 94–105.

[10] Ткаченко П.Н. *Математические модели боевых действий*. Москва, Советское радио, 1969, 240 с.

[11] Jaswall N.K. *Military Operations research: quantitative decision making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, 388 p.

[12] Shamahan L. *Dynamics of model battles*. New York, Physics Department, State University of New York, 2005, pp. 1–43.

[13] Алексеев О.Г., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. *Марковские модели боя*. Москва, Министерство обороны СССР, 1985, 85 с.

[14] Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, КноРус, 2016, 658 с.

[15] Чуев В.Ю. Вероятностная модель боя многочисленных группировок. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011. Спец. выпуск «Математическое моделирование», с. 223–232.

[16] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1, с. 89–104.

[17] Чуев В.Ю., Дубограй И.В., Дьякова Л.Н. «Смешанные» вероятностные модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 1, с. 91–101.

[18] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Стохастические модели дуэльного боя двух единиц. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2 (10), с. 69–84.

[19] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. *Модели динамики средних двухсторонних боевых действий многочисленных группировок*. LAPLAMBERT Academic Publishing, 2014, 72 с.

[20] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Стохастизм и детерминизм при моделировании двухсторонних боевых действий. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2017, №4 с. 16 – 25.

Статья поступила 28.05.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Стохастические модели двухсторонних боевых тдействий многочисленных группировок при линейных зависимостях эффективнх скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 2, с. 122–132.

Чуев Василий Юрьевич – канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области прикладной математики. e-mail: vacilious@mail.ru

Дубограй Ирина Валерьевна – доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области прикладной математики. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

Stochastic models of bilateral hostilities of numerous groups while linear dependence of military units' effective firing rate on the duration of the battle

© V. Yu. Chuev, I. V. Dubograi

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article presents developed on the basis of the theory of Markov's processes the models of bilateral hostilities with the linear dependence of effective firing rate of military units on the time of the battle. Developed the algorithm allows to calculate the main indicators of the battle of numerous groups. Fulfilled the comparison with the results of a battle simulation, received on the basis of probabilistic models of the battle with constant effective firing rate and the deterministic model of a combat with a linear dependency of effective firing rate on the time of the battle. The range of the last models applicability presented.

Keywords: *continuous Markov process, probabilistic model of bilateral hostilities, combat unit, the effective firing rate, the parameter of the initial balance of forces.*

REFERENCES

[1] Aleksandrov A.A., Dimitrienko Yu.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1 (1), pp. 3–4.

[2] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 5–17.

[3] Chuev Yu.V. *Issledovanie operatsiy v voennom dele* [Investigation of military operations]. Moscow, Voenizdat Publ., 1970, 270 p.

[4] Venttsel E.S. *Issledovanie operatsiy: zadachi, printsipy i metodologiya* [Research operations: tasks, principles and methodology]. Moscow, URSS Publ., 2006, 432 p.

[5] Glushkov I.N. *Programnye produkty i sistemy – Software and systems*, 2010. №1. P. 1 – 9.

[6] Ilin V.A. *Programnye produkty i sistemy – Software and systems*, 2006, № 1, c. 23–27.

[7] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to operations research*. New York, MeGrew-Hill, 2005, 998 p.

[8] Winston W.L. *Operations research: applications and algorithms*. Belmont, Duxbury Press, 2001, 128 p.

[9] Chen X., Jing Y., Li C., Li M. Warfare command stratagem analysis for winning based on Lanchester attrition models. *Journal of Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21 (1), pp. 94–105.

[10] Tkachenko P.N. *Matematicheskie modeli boevykh deystviy* [Mathematical models of military operations]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1969, 240 p.

[11] Jaswall N.K. *Military Operations research: quantitative decision making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, 388 p.

[12] Shamahan L. *Dynamics of model battles*. New York, Physics Department, State University of New York, 2005, pp. 1–43.

[13] Alekseev O.G., Anisimov V.G., Anisimov E.G. *Markovskie modeli boya* [Markov's combat models]. Moscow, the USSR Ministry of Defense, 1985, 85 p.

[14] Venttsel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability Theory]. Moscow, KnoRus, 2016, 658 p.

[15] Chuev V.Yu. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki. Spets. vypusk “Matematicheskoe modelirovanie” — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences, Spec. issue “Mathematical Modeling”*, 2011, pp. 223–232.

[16] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1, pp. 89–104.

[17] Chuev V.Yu., Dubogray I.V., Dyakova L.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 1, pp. 91–101.

[18] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2 (10), pp. 69–84.

[19] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Modeli dinamiki srednikh dvukhstoronnikh boevykh deystviy mnogochislennykh gruppirovok* [Dynamics models of the average bilateral military operations of numerous groupings]. Saarbryukken, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 72 p.
[20] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki. Spets. vypusk "Matematicheskoe modelirovanie" — Herald of the Bauman Moscow State Technical University.*, 2017, no 4, pp. 16 – 25.

Chuev V.Yu., Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 scientific papers in the field of applied mathematics. e-mail: vacilious@mail.ru

Dubogray I.V., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of scientific papers in the field of applied mathematics.
e-mail: irina.dubograi@yandex.ru