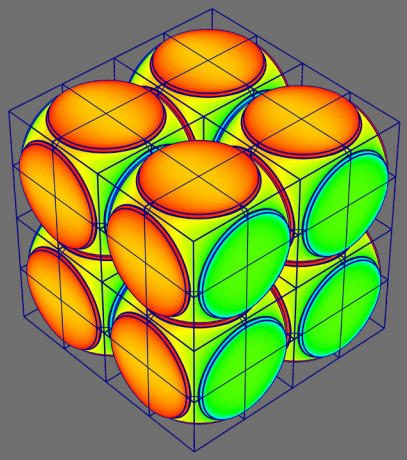
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Темис Ю.М., Худякова А.Д. Численное моделирование процессов неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов. Математическое моделирование и численные методы, 2018, № 2, с. 47–69.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/163/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.187
14.11.2026 15:02:58

УДК 539.374

Численное моделирование процессов неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов

© Ю.М. Темис[1, 2], А.Д. Худякова[1, 2]

[1] ЦИАМ им. П.И. Баранова, Москва, 111116, Россия
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен алгоритм учета уравнения поверхности нагружения при интегрировании системы определяющих соотношений инвариантной неизотермической теории пластичности, основанный на возвращении изображающей точки на поверхность нагружения на каждом шаге расчета. Исследована эффективность работы алгоритма в комбинации с различными схемами линеаризации для ряда пропорциональных и непропорциональных термомеханических траекторий деформирования. Приведены результаты моделирования процессов испытаний трубчатых образцов из никелевого сплава IN738LC по пропорциональным (растяжение-сжатие, растяжение-сжатие совместно с кручением) и непропорциональным («круг» и «ромб» с противофазным относительно изменения осевых деформаций изменением температуры) циклическим термомеханическим траекториям деформирования в диапазоне изменения рабочих температур от 450 до 950 °С.

Ключевые слова: *пластичность, численное моделирование, коррекция погрешности, модель неупругости, сложное деформирование, неизотермические условия, испытания образцов.*

Введение. Модели типа течения являются основным и наиболее широко используемым в инженерной практике классом феноменологических моделей неупругого поведения материала. Различные подходы к построению таких моделей и множество их вариантов предложены исследователями в ряде работ [1-21]. Необходимые для дальнейшей реализации в комплексах программ конечно-элементного расчета конструкций численные алгоритмы рассмотрены в работах [4,6,7,10,11,21-27]. При этом не все исследователи [4,6,7] включают уравнение поверхности нагружения в систему определяющих соотношений, подлежащих интегрированию, что может приводить к существенному отклонению изображающей точки от этой поверхности в ходе расчета. При включении уравнения поверхности нагружения в систему наравне с дифференциальными соотношениями система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) переходит в систему нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Это приводит к необходимости применять для ее решения специальные численные методы [25,26] или же разрабаты-

вать методы учета уравнения поверхности нагружения при интегрировании нелинейной системы ОДУ [10, 11, 21-24]. В настоящей работе предложен алгоритм учета уравнения поверхности нагружения при численном моделировании процессов нагружения с использованием соотношений инвариантной теории пластического течения [1,2]. Алгоритм базируется на самокорректирующемся шаговом методе [27] и является модификацией алгоритма коррекции погрешности [10,11], расширенного на случай неизотермического нагружения. Исследование эффективности предложенного численного алгоритма и все вычислительные эксперименты, результаты которых приведены в настоящей работе, проведены для никелевого сплава IN738LC [28] с использованием неизотермической модели инвариантной теории пластичности [9] и модели ползучести типа течения [29], параметры которых были определены по результатам простого циклического жесткого деформирования, полученным в работе [30], и кривым ползучести [17], соответственно, согласно алгоритмам, описанным в работах [9,10].

Определяющие соотношения неупругости. В соответствии с представлениями теории течения, примем, что приращения деформаций упругости $d\varepsilon_{ij}^{e}$, пластичности $d\varepsilon_{ij}^{p}$ и ползучести $d\varepsilon_{ij}^{c}$ являются независимыми и в сумме представляют собой приращения полных деформаций $d\varepsilon_{ij}$. Будем рассматривать неизотермическое деформирование однородных и начально изотропных материалов, изменение объема которых происходит упруго.

Приращения упругих деформаций определим согласно обобщенному закону Гука, а приращения пластических деформаций – согласно инвариантной теории пластичности [1,2]. Для определения приращения деформаций ползучести используем теорию течения [29]. В результате получим следующую систему определяющих соотношений модели:

$$
\begin{gathered}
d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p} + d\varepsilon_{ij}^{c}, \\
d\varepsilon_{ij}^{e} = A_{ijkl}\, d\sigma_{kl} + \left(\frac{\partial A_{ijkl}}{\partial T}\sigma_{kl} + \alpha(T)\delta_{ij} \right) dT, \quad d\varepsilon_{ij}^{p} = C_{ijkl}^{p}\, d\sigma_{kl} + \Psi_{ij}^{p}\, dT, \\
C_{ijkl}^{p} = -\frac{1}{\varphi}\sigma_{ij}^{0}\sigma_{kl}^{0}, \quad \Psi_{ij}^{p} = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial f}{\partial T}\sigma_{ij}^{0}, \quad f = \frac{\sigma_{ij}^{0}\sigma_{ij}^{0}}{4} - \left(\sigma_{T}(\chi, T)\right)^{2} = 0, \\
d\varepsilon_{ij}^{c} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\varepsilon}_{i}^{c}}{\sigma_{i}} s_{ij}\, dt, \quad \dot{\varepsilon}_{i}^{c} = \sigma_{i}^{m(T)} B(t),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $A_{ijkl}=\frac{1+\mu(T)}{E(T)}\delta_{ik}\delta_{jl}-\frac{\mu(T)}{E(T)}\delta_{ij}\delta_{kl}$, - тензор податливости, компоненты которого зависят от температуры T, $E(T)$ - модуль упругости, $\mu(T)$ - коэффициент Пуассона, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, $\alpha(T)$ - мгновенный коэффициент температурного расширения, C^p_{ijkl} и Ψ^p_{ij} - тензоры параметров пластичности, φ - функция упрочнения [1,2], $\sigma^0_{ij}=2\left(s_{ij}-\rho_{ij}\right)$ - тензор «активных» напряжений, $s_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}$ - девиатор тензора напряжений, f - функция поверхности пластического деформирования [1,2], $\sigma_T(\chi,T)$ - параметр пластичности материала, характеризующий изотропное упрочнение, χ - параметр Одквиста, $d\chi=\left(d\varepsilon^p_{ij}d\varepsilon^p_{ij}\right)^{1/2}$, $\dot{\varepsilon}^c_i=\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^c_{ij}\dot{\varepsilon}^c_{ij}}$ и $\sigma_i=\sqrt{\frac{3}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$ - интенсивности скоростей деформаций ползучести и напряжений, соответственно, t - время, $m(T)$ и $B(t)$ - параметры ползучести материала.

Компоненты тензоров C^p_{ijkl} и Ψ^p_{ij} отличны от нуля только в том случае, когда выполняется условие активного нагружения:

$$\left(\sigma^0_{ij}\left(ds_{ij}-\frac{\partial\rho_{ij}}{\partial T}dT\right)>2\sigma_T\frac{\partial\sigma_T}{\partial T}dT\right)\wedge\left(\frac{\sigma^0_{ij}\sigma^0_{ij}}{4}=\left(\sigma_T\right)^2\right). \qquad (2)$$

В противном случае реализуется либо разгрузка, либо нейтральное нагружение.

Рассмотрим вариант модели пластичности [9], в которой для неизотермического деформирования принято $\rho_{ij}=a(\chi,T)\xi_{ij}$, ξ_{ij} - компоненты структурного тензора, отвечающего за анизотропию, приобретенную в процессе упругопластического деформирования, $d\xi_{ij}=K\left(J_2\right)d\varepsilon^p_{ij}$, $J_2=s_{ij}s_{ij}$ - второй инвариант девиатора напряжений, $a(\chi,T)$ и $K\left(J_2\right)$ - параметры пластичности материала.

Алгоритм численной реализации соотношений неупругости. В более удобной для программной реализации матричной форме [1,2,12] первое уравнение системы определяющих соотношений (1) с учетом выражений для приращения деформаций упругости, пластичности и ползучести принимает вид

$$\left\{d\varepsilon\right\}=\left(\left[A\right]+\left[C^p\right]\right)\left\{d\sigma\right\}+\left(\left\{\Omega\right\}+\left\{\Psi^p\right\}\right)dT++\left\{\Phi\right\}dt+\left\{\alpha^T\right\}dT, \quad (3)$$

где $[A]$ и $[C^p]$ - матрицы податливости и параметров пластичности, соответственно, $\{\Omega\} = \dfrac{\partial [A]}{\partial T}\{\sigma\}$, $\{\Phi\} = \dfrac{3}{2}\sigma_i^{m-1} B\{s\}$, $\{\Psi^p\}$, $\{d\varepsilon\}$, $\{d\sigma\}$, $\{\sigma\}$ и $\{s\}$ - шестимерные векторы, поставленные в соответствие тензорам Ψ_{ij}^p, $d\varepsilon_{ij}$, $d\sigma_{ij}$, σ_{ij} и s_{ij}, $\{\alpha^T\} = \alpha\{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$.

Первые два слагаемых в правой части (3) представляют собой сумму приращений деформаций упругости и пластичности с учетом влияния на них изменения температуры, третье – приращение деформаций ползучести, а четвертое – приращение температурных деформаций (деформаций температурного объемного расширения или сжатия). Все эти приращения за исключением приращения температурных деформаций в сумме составляют приращение механических деформаций $\{d\varepsilon^{mech}\} = \{d\varepsilon\} - \{\alpha^T\} dT$, вектор $\{d\varepsilon^{mech}\}$ поставлен в соответствие тензору $d\varepsilon_{ij}^{mech} = d\varepsilon_{ij} - \alpha(T)\delta_{ij} dT$.

Условие активного нагружения (2) в матричной форме можно записать в виде

$$\left(\{\tilde{\sigma}^0\} \cdot \left(\{d\tilde{s}\} - \frac{\partial \{\tilde{\rho}\}}{\partial T} dT \right) > 2\sigma_T \frac{\partial \sigma_T}{\partial T} dT \right) \wedge \left(\frac{\{\tilde{\sigma}^0\} \cdot \{\tilde{\sigma}^0\}}{4} = (\sigma_T)^2 \right), \quad (4)$$

где $\{\tilde{\sigma}^0\}$, $\{d\tilde{s}\}$ и $\{\tilde{\rho}\}$ - шестимерные векторы, поставленные в соответствие тензорам σ_{ij}^0, ds_{ij} и ρ_{ij}, так, чтобы скалярное произведение взятых попарно векторов было равно результату свертки соответствующих тензоров второго ранга.

Программы нагружения. В зависимости от программы нагружения может быть задан либо закон изменения напряжений («мягкое» нагружение), либо закон изменения механических деформаций («жесткое» нагружение). Возможны и случаи смешанного нагружения, при котором режимы «жесткого» и «мягкого» нагружения чередуются [19,20]. Независимо от режима механического нагружения задан закон изменения температуры. Процесс моделирования состоит в определении по заданным законам изменения напряжений («мягкое» нагружение) или механических деформаций («жесткое» нагружение) и заданному закону изменения температур, которые в совокупности будем называть *законом изменения термомеханической нагрузки*, неизвестных полных деформаций и всех их составляющих («мягкое» нагружение) или неизвестных напряжений и всех составляющих деформаций («жесткое» нагружение).

Схемы линеаризации. Процесс деформирования рассматриваем как последовательное нагружение тела малыми приращениями изменяемой по заданному закону термомеханической нагрузки, реакцию тела на которую считаем линейной. Система нелинейных уравнений (3) при таком подходе должна быть линеаризована. В качестве простейшего явного метода линеаризации будем считать входящие в (3) нелинейные величины на (*k*+1)-ом шаге постоянными и определять их по напряженно-деформированному состоянию (НДС) в начале (*k*+1)-ого шага, которое совпадает с НДС в конце *k*-ого шага и является известным. При более общем подходе подлежащую линеаризации матрицу параметров пластичности $\left[C^p\right]$ на (*k*+1)-ом шаге будем заменять линейной комбинацией вида

$$\left[C^p\right] \approx \left[\hat{C}^p\right]_{k+1} = (1-\beta)\left[C^p\right]_k + \beta\left[C^p\right]_{k+1}^{m-1}, \qquad (5)$$

где $\left[\hat{C}^p\right]_{k+1}$ - полученная в результате линеаризации системы на $(k+1)$-ом шаге матрица, $\left[C^p\right]_{k+1}^{0} = \left[C^p\right]_k$ - матрица $\left[C^p\right]$, определенная по НДС конца *k*-ого шага, $\left[C^p\right]_{k+1}^{m-1}$ - матрица $\left[C^p\right]$, определенная по НДС, полученному в m-ом приближении в конце $(k+1)$-ого шага, $0 \le \beta \le 1$. Аналогично линеаризуем и остальные нелинейные величины из уравнения (3). При $\beta = 0$ возвращаемся к явной схеме.

Для интегрирования системы определяющих соотношений неупругости исследователи применяют как явную схему Эйлера с выбором шага [6,7], так и более сложные методы, например, метод Рунге-Кутта 4 порядка точности с автоматическим выбором шага [4]. Однако кроме соотношений связи приращений деформаций с приращениями напряжений с систему определяющих соотношений (1) входит и уравнение поверхности нагружения $f = 0$. При интегрировании системы (3) без учета этого уравнения накопление погрешности от шага к шагу приводит к нарушению условия активности нагружения (2). Устранить это нарушение путем выбора более точной схемы интегрирования не удается.

Алгоритм учета уравнения поверхности нагружения. Для компенсации отклонения значения f от нуля в [11] предложен вариант коррекции погрешности для изотермических моделей упругопластичности, основанный на введении дополнительного условия равенства нулю функции *f* и его учета на каждом шаге упругопластического расчета, путем добавления этого условия в линеаризованную систему (3)

с помощью метода множителей Лагранжа. Использование метода множителей Лагранжа для включения в систему условия коррекции, несмотря на удобство применения, может приводить к нарушению закона пластического течения, ассоциированного с поверхностью нагружения, так как направление вектора пластических деформаций при решении модифицированной системы не контролируется. В настоящей работе предложено учитывать дополнительное корректирующее условие, рассмотренное в [11], другим способом, основанным на варьировании длины вектора пластических деформаций, без изменения его направления, полученного в основном расчете [2].

Рассмотрим модифицированный вариант алгоритма коррекции погрешности, расширенный на случай неизотермического нагружения на примере модели [9]. Обозначим через f_k значение функции f, вычисленное по НДС, полученному в конце шага с номером k, $f_k \neq 0$. Запишем в конце $(k+1)$-ого шага выражение для f_{k+1} и потребуем, чтобы было соблюдено условие $f_{k+1} = 0$:

$$f_{k+1} = \left(\{\tilde{s}\}_{k+1} - a(\chi_{k+1}, T_{k+1})\left\{\tilde{\xi}\right\}_{k+1}\right)\cdot\left(\{\tilde{s}\}_{k+1} - a(\chi_{k+1}, T_{k+1})\left\{\tilde{\xi}\right\}_{k+1}\right) - \\ -\left(\sigma(\chi_{k+1}, T_{k+1})\right)^2 = 0, \tag{6}$$

где $\{\tilde{s}\}$, и $\left\{\tilde{\xi}\right\}$ - шестимерные векторы, поставленные в соответствие тензорам s_{ij} и ξ_{ij} так, чтобы их скалярное произведение было равно результату свертки соответствующих тензоров второго ранга.

Раскладываем в ряд Тейлора в точке (χ_k, T_k) функции $a(\chi, T)$ и $\sigma(\chi, T)$ и, пренебрегая членами второго порядка малости, получаем условие

$$\underbrace{\left(\{\tilde{s}\}_k - a\big|_k \left\{\tilde{\xi}\right\}_k\right)\cdot\left(\{\tilde{s}\}_k - a\big|_k \left\{\tilde{\xi}\right\}_k\right) - \left(\sigma_T\big|_k\right)^2}_{f_k} + \\ + \left\{\tilde{\sigma}^0\right\}_k \cdot \left(\left\{\Delta\tilde{s}\right\}_{k+1} - a\big|_k K\big|_k \left\{\Delta\tilde{\varepsilon}^p\right\}_{k+1}\right) - \\ - \left(\left.\frac{\partial a}{\partial T}\right|_k \left\{\tilde{\sigma}^0\right\}_k \cdot \left\{\tilde{\xi}\right\}_k + 2\sigma_T \left.\frac{\partial \sigma_T}{\partial T}\right|_k\right)\Delta T_{k+1} - \\ - \left(\left.\frac{\partial a}{\partial \chi}\right|_k \left\{\tilde{\sigma}^0\right\}_k \cdot \left\{\tilde{\xi}\right\}_k + 2\sigma_T \left.\frac{\partial \sigma_T}{\partial \chi}\right|_k\right)\Delta\chi_{k+1} = 0, \tag{7}$$

где $\left\{\tilde{\sigma}^0\right\} = 2\left(\left\{\tilde{s}\right\} - a\left\{\tilde{\xi}\right\}\right)$, а первые два слагаемых представляют собой величину f_k. После несложных преобразований получаем итоговое дополнительное нелинейное условие связи между приращениями девиатора напряжений и приращениями пластических деформаций

$$\begin{aligned} & f_k + \left\{\tilde{\sigma}^0\right\}_k \cdot \left\{\Delta s\right\}_{k+1} - a\big|_k K\big|_k \left\{\tilde{\sigma}^0\right\}_k \cdot \left\{\Delta\tilde{\varepsilon}^p\right\}_{k+1} - \\ & - \left(\left.\frac{\partial a}{\partial T}\right|_k \left\{\tilde{\sigma}^0\right\}_k \left\{\tilde{\xi}\right\}_k + 2\sigma_T \left.\frac{\partial \sigma_T}{\partial T}\right|_k \right) \Delta T_{k+1} - \\ & - \left(\left.\frac{\partial a}{\partial \chi}\right|_k \left\{\tilde{\sigma}^0\right\}_k \left\{\tilde{\xi}\right\}_k + 2\sigma_T \left.\frac{\partial \sigma_T}{\partial \chi}\right|_k \right) \sqrt{\left\{\Delta\tilde{\varepsilon}^p\right\}_{k+1} \cdot \left\{\Delta\tilde{\varepsilon}^p\right\}_{k+1}} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Это условие обычно не выполняется в конце шага расчета.

Для коррекции погрешности вычислений в упругопластическом расчете по аналогии с самокорректирующимся шаговым методом [27] запишем линеаризованное в конечных приращениях соотношение (3) и введем весовой множитель λ:

$$\begin{aligned} \left\{\Delta\varepsilon\right\}_{k+1} = \left\{\Delta\varepsilon^e\right\}_{k+1} + \underbrace{\lambda\left(\left[\hat{C}^p\right]_{k+1}\left\{\Delta\sigma\right\}_{k+1} + \left\{\hat{\Psi}^p\right\}_{k+1}\Delta T_{k+1}\right)}_{\left\{\Delta\varepsilon^p\right\}_{k+1}} + \\ + \left\{\hat{\Phi}\right\}_{k+1} dt + \left\{\hat{\alpha}^T\right\}_{k+1}\Delta T_{k+1}. \end{aligned} \tag{9}$$

С учетом (9) получим следующие соотношения для определения $\left\{\Delta\sigma\right\}$ и $\left\{\Delta\varepsilon^p\right\}$:

$$\begin{aligned} & \left\{\Delta\sigma\right\}_{k+1} = \left(\left[\hat{A}\right]_{k+1} + \lambda\left[\hat{C}^p\right]_{k+1}\right)^{-1}\left(\left\{\Delta\varepsilon^{mech}\right\}_{k+1} - \right. \\ & \left. - \left(\left\{\hat{\Omega}\right\}_{k+1} + \lambda\left\{\hat{\Psi}^p\right\}_{k+1}\right)\Delta T_{k+1} - \left\{\hat{\Phi}\right\}_{k+1}\Delta t_{k+1}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\left\{\Delta\varepsilon^p\right\}_{k+1} = \lambda\left(\left[\hat{C}^p\right]_{k+1}\left\{\Delta\sigma\right\}_{k+1} + \left\{\hat{\Psi}^p\right\}_{k+1}\Delta T_{k+1}\right). \tag{11}$$

При подстановке вычисленных таким образом приращений в условие (8) в конце $(k+1)$-ого шага получаем алгебраическое нелинейное уравнение относительно введенного весового множителя λ. Все остальные входящие в (8) величины либо имеют индекс *k*, то есть вычислены в конце предыдущего, *k*-ого шага, либо заданы в начале $(k+1)$-ого шага как приращения с индексом $k+1$, либо определены в упругопластическом расчете без коррекции. Полученное уравнение решаем методом Ньютона с начальным приближением $\lambda = 1$.

В качестве другого варианта сокращения отклонения значения f от нуля с использованием условия (8) при линеаризации соотношений по схеме (5) на каждом шаге можно выбирать оптимальный параметр β, решая задачу минимизации

$$\left| f_{k+1}(\beta) \right| \to \min, \ 0 \le \beta \le 1. \qquad (12)$$

Методы коррекции погрешности, основанные на «возвращении» на поверхность нагружения на каждом шаге, при интегрировании системы определяющих соотношений неупругости позволяют учитывать все уравнения системы (1), включая и уравнение поверхности нагружения.

Организация счета. При организации процесса численного моделирования необходимо осуществить учет условия активности нагружения (4) и дополнительного условия коррекции (8), что удобно делать, разбивая временной шаг на «прогнозирующий» и «корректирующие» этапы. В работах [21,22] применяется метод «упругий предиктор/пластический корректор»: на каждом временном шаге после «прогнозирующего» упругого расчета на основе полученного в его результате НДС выполняют «корректирующий» чисто пластический расчет, в результате которого осуществляется «посадка» изображающей точки на поверхность нагружения.

В настоящей работе для учета условия активности нагружения (4) в начале (k+1)-ого шага после задания Δt_{k+1}, $t_{k+1} = \Delta t_k + \Delta t_{k+1}$, и соответствующего ему приращения термомеханической нагрузки осуществляем предварительный «прогнозирующий» упругий расчет по формуле (10) при $\left[C^p \right] \equiv 0$, $\left\{ \Psi^p \right\} \equiv 0$, после чего проверяем условие (4) для полученного в результате упругого расчета НДС. Если условие активности нагружения (4) выполнено, переходим к упругопластическому расчету по формулам (10)-(11), определению из условия (8) оптимальных параметров β и λ и итоговому «корректирующему» упругопластическому расчету с использованием оптимальных параметров.

В противном случае полученные в «прогнозирующем» упругом расчете приращения напряжений, полных деформаций и деформаций упругости и ползучести считаем итоговыми, а шаг расчета – упругим. Блок-схема описанного алгоритма для случая «жесткого» нагружения представлена на рис. 1.

Исследование эффективности алгоритма численной реализации. С целью выбора оптимальной схемы линеаризации и исследования эффективности предложенного алгоритма учета уравнения поверхности нагружения было проведено моделирование процессов

деформирования образцов из никелевого сплава IN738LC[28] по различным термомеханическим траекториям, экспериментальные исследования которых описаны в работах [13-19].

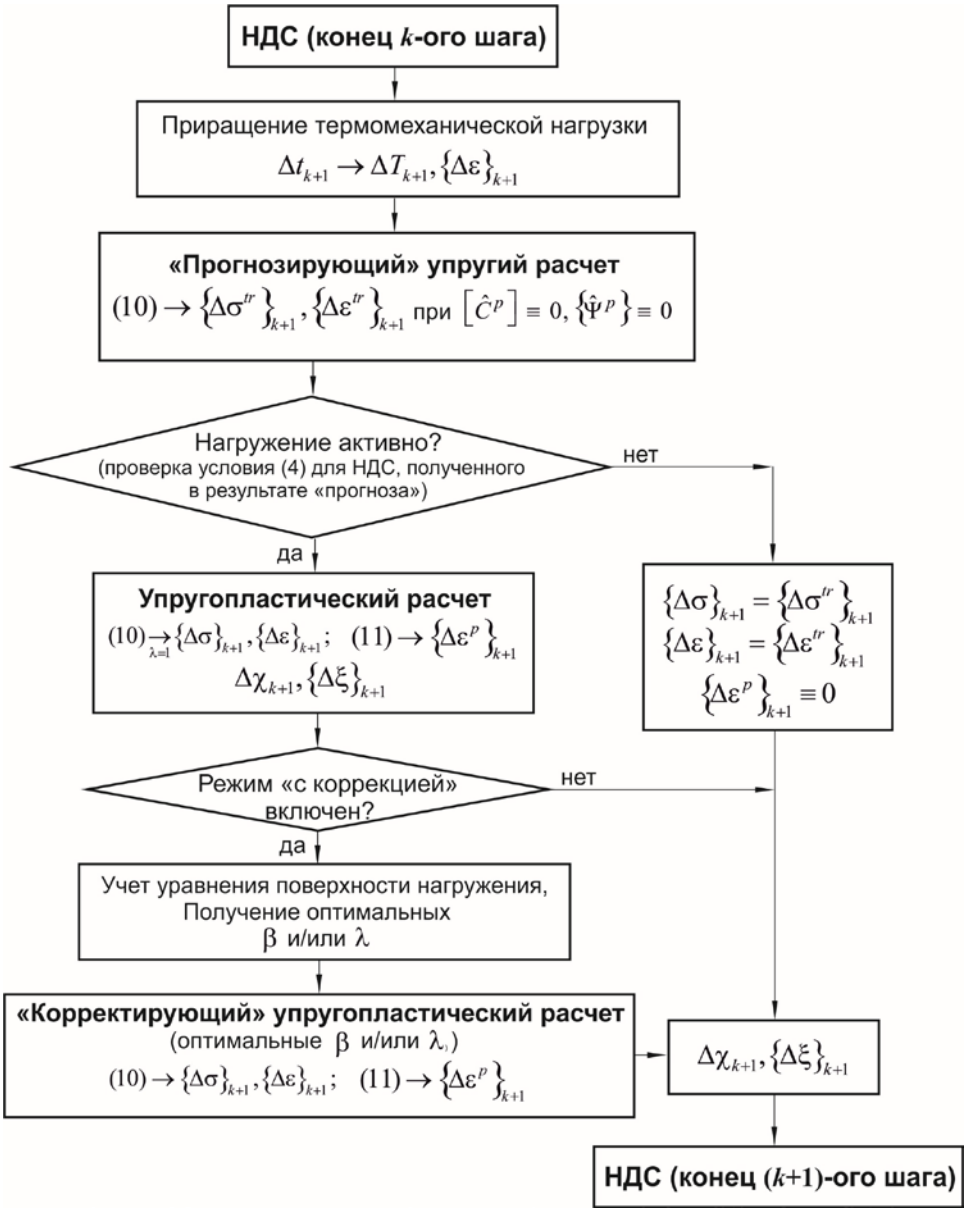


Рис. 1. Блок-схема алгоритма «жесткого» нагружения

Термомеханические траектории. Рассмотренные законы изменения осевых $\varepsilon = \varepsilon_{11}^{mech}$ и сдвиговых $\gamma = 2\varepsilon_{12}^{mech}$ механических деформа-

ций представлены на рис.2 в двух вариантах: 1 - траектория деформирования на плоскости $\varepsilon - \gamma/\sqrt{3}$; 2 - законы изменения ε и $\gamma/\sqrt{3}$ по времени. На рис. 3 приведены рассмотренные в сочетании с траекториями механического деформирования законы изменения температуры процесса по времени.

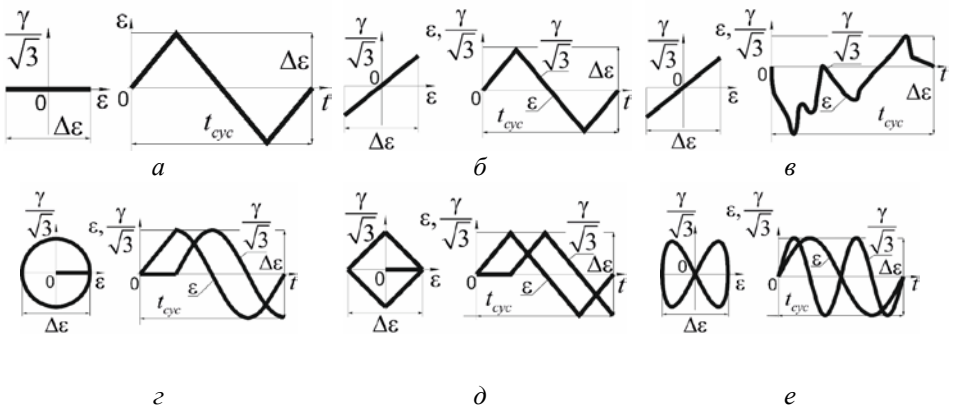


Рис. 2. Траектории изменения осевых и сдвиговых механических деформаций

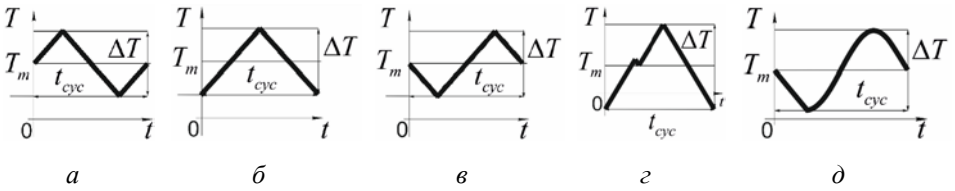


Рис. 3. Законы изменения температуры

Кроме вида траектории механического деформирования и закона изменения температуры для осуществления процесса моделирования необходимо задать размах механических деформаций $\Delta\varepsilon$, время осуществления полного цикла деформирования t_{cyc}, которое при заданном размахе деформаций определяет скорость приращений деформаций ползучести, размах температур ΔT и среднее значение температуры в цикле T_m. Описание и характеристики пятнадцати рассмотренных термомеханических траекторий приведены в табл. 1. Для всех температурных режимов, кроме режима постоянной температуры $T = T_m = const$, было выбрано $\Delta T = 500°\text{C}$.

Демонстрация работы алгоритма численной реализации. Предложенный метод коррекции позволяет существенно сократить накапливающуюся в ходе упругопластического расчета погрешность, «возвращая» на каждом шаге изображающую точку на поверхность нагружения $f = 0$. В качестве иллюстрации этого процесса на рис. 4 приведены графики изменения значения функции f в ходе расчета

(рис. 4*а* и рис. 4*в*) и траектория изменения напряжений в координатах $\sigma - \sqrt{3}\tau$, $\sigma = \sigma_{11}$, $\tau = \sigma_{12}$ для двух режимов: «без коррекции» ($\lambda = 1$) – черная линия и «с коррекцией» (выбор λ из условия (8)) – красная линия (рис. 4*б* и рис. 4*г*).

Таблица 1

Рассмотренные термомеханические траектории

Тип деформирования		№	Закон изменения ε	Закон изменения T	$\Delta\varepsilon$,%	t_{cyc}, с	T_m ,°C
Одноосное		1	Рис. 2а	Изотермическое	1.2	2400	450
		2				24	850
		3		Рис. 3а		2400	700
		4		Рис. 3б		2400	700
		5		Рис. 3в		240	700
Пропорциональное		6	Рис. 2б	Изотермическое	0.84	24	850
		7		Рис. 3б	0.84	240	700
		8	Рис. 2в	Рис. 3г	0.87	269	700
Непропорциональное	«Круг»	9	Рис. 2г	Изотермическое	1.2	240	450
		10				24	850
		11				240	850
	«Ромб»	12	Рис. 2д			24	850
	«Бабочка»	13	Рис. 2е		0.96	135	850
	«Круг»	14	Рис. 2г	Рис. 3д	1.2	240	700
	«Ромб»	15	Рис. 2д	Рис. 3в	1.2	240	700

Графики получены при моделировании процесса циклического деформирования трубчатого образца из никелевого сплава IN738LC по термомеханическим траекториям №10 (рис. 4а,б) и № 12 (рис. 4в,г) (табл. 1). Шаг по времени постоянен и составляет 0.1с. По горизонтальной оси отмечены номера циклов деформирования N, всего было промоделировано 20 циклов. Точками на рис. 4б обозначена траектория изменения напряжений, полученная в предельном стабильном цикле в эксперименте [15]. При расчете использована полностью явная схема линеаризации ($\beta = 0$).

Согласно рис. 4 при расчете в режиме «без коррекции» значение функции f сильно отклоняется от нуля не только на участках с упругим расчетом (в этом случае $f < 0$), но и при упругопластическом расчете, что и является следствием накопления погрешности в совокупности с отсутствием учета уравнения поверхности нагружения $f = 0$.

При расчете в режиме «с коррекцией» отклонения на упругопластических участках устранены.

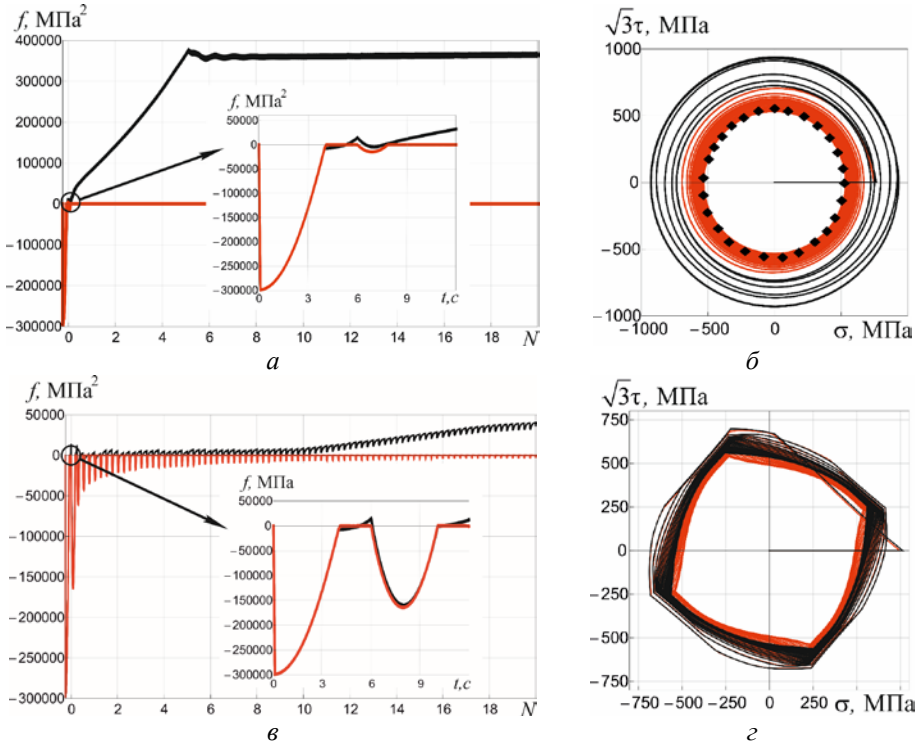


Рис. 4. Моделирование процесса деформирования с использованием полностью явной схемы; режим «без коррекции» - черная линия, режим «с коррекцией» - красная линия, точки – эксперимент [15]:

а – термомеханическая траектория №10, отклонение значения функции *f* от нуля в ходе расчета;
б – термомеханическая траектория №10, траектория изменения напряжений;
в – термомеханическая траектория №12, отклонение значения функции *f* от нуля в ходе расчета
г – термомеханическая траектория №12, траектория изменения напряжений

Выбор схемы линеаризации. Были рассмотрены три схемы линеаризации, каждая из них в режимах «без коррекции» и «с коррекцией»: полностью явная схема ($\beta = 0$), полунеявная схема ($\beta = 0.5$), полунеявная схема с оптимальным выбором β на каждом шаге согласно (12).

Основным критерием определения эффективности алгоритма была выбрана его способность не допускать существенных отклонений значения f от нуля при упругопластическом расчете на протяжении всего процесса моделирования. За «наихудший вариант» условно была выбрана явная схема линеаризации ($\beta = 0$) при расчете «без коррекции». Остальные методы расчета сравнивались с «наихудшим вариантом» посредством вычисления и сравнения соотношений $|f|_{\max} / |f^0|_{\max}$ и $|\overline{f}| / |\overline{f}^0|$, где $|f|_{\max}$, $|\overline{f}|$ и $|f^0|_{\max}$, $|\overline{f}^0|$ отклонения значения *f* от нуля, максимальные и средние, при упругопластическом

расчете рассматриваемым методом и «наихудшим вариантом», соответственно. Работа алгоритма в режиме «с коррекцией» сводится к решению нелинейного алгебраического уравнения методом Ньютона, который не всегда обладает сходимостью при начальном приближении $\lambda = 1$, соответствующем полученному НДС при расчете «без коррекции». На данном этапе предложено пропускать проблемный шаг расчета, оставляя его без коррекции, а вопрос о прохождении «сложных» точек траектории – открытым. Сведения о доле N^{nc} таких шагов среди всех шагов упругопластического расчета при использовании разных схем линеаризации так же были подвергнуты анализу, а отклонения значения f от нуля в таких точках не исключались из рассмотрения при сравнении методов расчета.

На первом этапе моделирование процесса циклического деформирования (20 циклов деформирования) по каждой из термомеханических траекторий (табл. 1) было проведено с использованием полностью явной схемы ($\beta = 0$). Согласно полученным результатам, применение «режима коррекции» оказалось наиболее действенным для траекторий № 1, 2, 6 и 10 ($N^{nc} < 0.5\%$) и позволило существенно уменьшить величину максимального и среднего отклонений более чем на 75% и 97% соответственно. При этом можно выявить и проблемные траектории (№9, 11, 14), для которых «сложных» точек в режиме «с коррекцией» для явной схемы линеаризации оказалось слишком много ($N^{nc} \geq 15\%$). Одна из таких траекторий (№9) была выбрана для сравнения эффективности остальных методов, результаты сравнения которых с «наихудшим вариантом» приведены в табл. 2, N^e - доля шагов упругого расчета среди всех шагов, $\overline{n}$ - среднее количество итераций метода Ньютона в режиме «с коррекцией». Как следует из приведенных в табл. 2 результатов, для любого из рассмотренных вариантов линеаризации, расчет в режиме «с коррекцией» сокращает как максимальное, так и среднее отклонение значения f от нуля. Наилучшим при этом, несмотря на не самое низкое количество точек с отсутствием сходимости алгоритма коррекции ($N^{nc} = 5\%$), показал себя алгоритм с использованием полунеявной схемой линеаризации с оптимальным выбором β, который и был выбран для всех дальнейших расчетов.

Для выбранного алгоритма приближение к поверхности $f = 0$ происходит в два этапа: I - после определения по НДС, полученному в первом приближении согласно (5), матрицы параметров пластичности $\left[C^p\right]_{k+1}^1$ и остальных подлежащих линеаризации величин решаем задачу минимизации (12); II - после использования в (5) полученного в результате этой минимизации β, решаем нелинейное алгебраическое

уравнение (8) относительно λ. Полученное λ и используем для получения итогового НДС в конце шага.

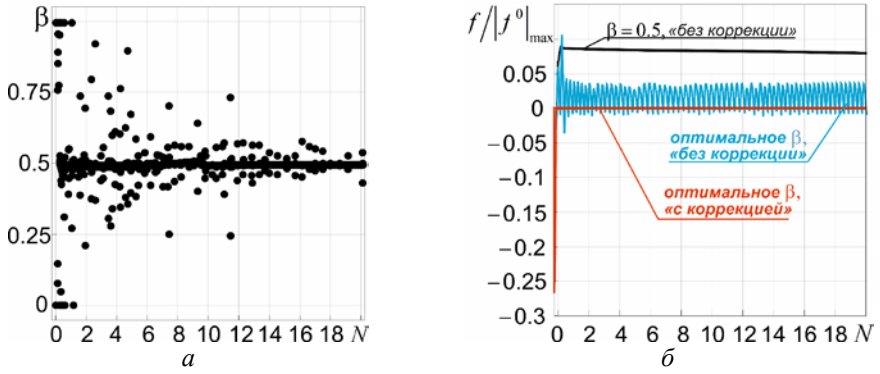
Таблица 2

Результаты сравнения схем линеаризации

Метод	$\beta = 0$		$\beta = 0.5$		Оптимальный выбор β	
Коррекция	-	+	-	+	-	+
$\lvert f\rvert_{\max} / \lvert f^0\rvert_{\max}$	1	0.9924	0.0932	0.0023	0.1063	0.0019
$\lvert\overline{f}\rvert / \lvert\overline{f}_0\rvert$	1	0.8675	0.1469	0.0001	0.0291	0.0001
N^e, %	15%	9%	1%	1%	1%	1%
N^{nc}, %	-	99%	-	0%	-	5%
$\overline{n}$	-	5	-	2	-	2

Значения β, полученные в результате моделировании 20 циклов деформирования по термомеханической траектории №9 с временным шагом 1с, представлены на рис. 5*а*, а демонстрация работы метода с оптимальным выбором β в сравнении с двумя другими – на рис. 5*б*. Черной сплошной линией на рис. 5*б* изображена зависимость нормированного значения f от номера цикла полученная при использовании полунеявной схемы ($\beta = 0.5$) в режиме «без коррекции», голубой сплошной линией – та же зависимость для метода с оптимальным выбором β в режиме «без коррекции» и красной сплошной линией – для метода с оптимальным выбором β в режиме «с коррекцией».

При сравнении черного и голубого графиков можно оценить работу первого этапа метода с оптимальным выбором β, на котором решается задача минимизации (12) при сравнении голубого и красного – работу второго этапа, режима «с коррекцией».

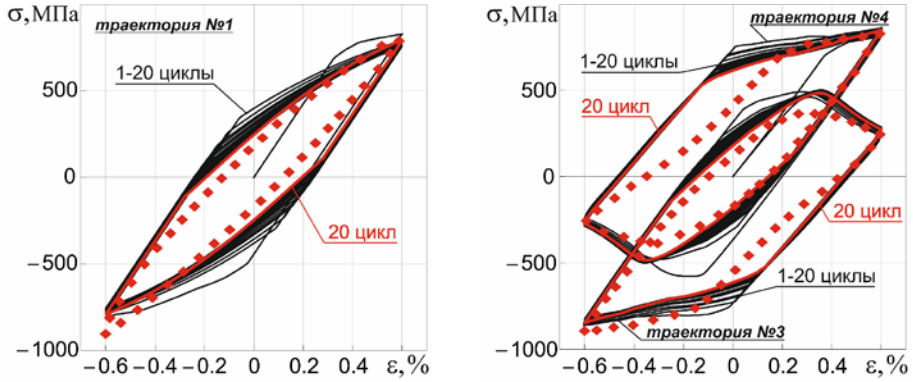


а *б*

Рис. 5. Работа полунеявной схемы линеаризации с оптимальным выбором β

Численное моделирование процессов испытаний образцов из сплава IN738LC. В работах [13-18] приведены результаты экспериментального исследования процессов испытаний трубчатых образцов из никелевого сплава IN738LC по некоторым из рассмотренных термомеханических траекторий (табл. 1).

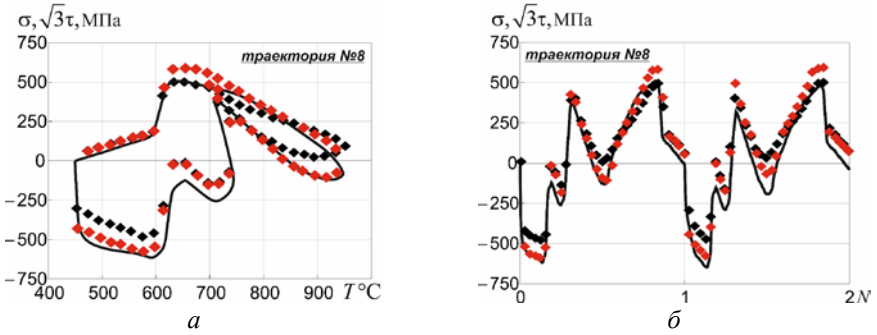
На рис. 6 приведены петли циклического деформирования, полученные в результате моделирования процесса деформирования по термомеханическим траекториям №1 (изотермическое осевое, рис. 6*а*), №3 и №4 (неизотермическое осевое, рис. 6*б*), черными линиями изображены 1-20-е циклы расчета, красными – 20-е циклы расчета, точками – предельные стабильные циклы, полученные в результате эксперимента [17] (рис. 6*а*), [16] (рис. 6б).



а *б*

Рис. 6. Петли осевого циклического деформирования:
1-20 циклы, расчет – черные линии;
20 цикл, расчет – красные линии;
а – изотермические условия, точки – эксперимент [17];
б – неизотермические условия, точки – эксперимент [16]

В работах [14-16] описана термомеханическая траектория (траектория №8), характерная для точки передней кромки лопатки первой ступени газовой турбины, включающая в себя этапы разогрева, разгона, базовой нагрузки, замедления и отключения. Нагружение в этом случае является неизотермическим, но пропорциональным: и ε, и $\gamma/\sqrt{3}$ изменяются во времени по одному и тому же закону. На рис. 7*а* и 7*б* в координатах $T-\sigma$ и $N-\sigma$, соответственно, черной линией показаны траектории изменения осевых σ и сдвиговых $\sqrt{3}\tau$ напряжений, полученные в результате моделирования 1-ого цикла по термомеханической траектории №8 (они совпадают, как и ожидалось для пропорционального нагружения), а точками отмечены результаты эксперимента [16]: черными – осевые напряжения, красными – сдвиговые напряжения.



а *б*

Рис. 7. Траектории изменения напряжений при деформировании образца по термомеханической траектории №8: осевые и сдвиговые напряжения, расчет – черные линии; осевые напряжения, эксперимент [16] – черные точки; сдвиговые напряжения, эксперимент [16] – красные точки.

На рис. 8 приведены результаты моделирования процесса непропорционального деформирования по термомеханической траектории №14 (неизотермическое деформирование по траектории «круг» с противофазным относительно осевых деформаций изменением температуры). Траектория напряжений для 1-ого и 2-ого циклов расчета представлена на рис. 8*а*, черной линией изображения расчетная траектория, черными точками – эксперимент [14]. На рис. 8*б* представлена траектория напряжений с 1-ого по 10-ый циклы расчета. На рис. 8*в* и 8*г* в координатах $\varepsilon - \sigma$ и $\gamma/\sqrt{3} - \sqrt{3}\tau$, соответственно, изображены петли циклического деформирования: черной линией - с 1-ого по 10-ый циклы расчета, красной линией – 1-ый цикл расчета, красными точками - 1-ый цикл эксперимента [14].

На рис. 9 приведены результаты моделирования процесса непропорционального деформирования по термомеханической траектории №15 (неизотермическое деформирование по траектории «ромб» с противофазным относительно осевых деформаций изменением температуры).

Траектория напряжений для 1-ого и 2-ого циклов расчета представлена на рис. 9*а*, черной линией изображения расчетная траектория, черными точками – эксперимент [18]. На рис. 9*б* представлена траектория напряжений с 1-ого по 10-ый циклы расчета. На рис. 9*в* и 9*г* в координатах $\varepsilon - \sigma$ и $\gamma/\sqrt{3} - \sqrt{3}\tau$, соответственно, изображены петли циклического деформирования: черной линией - с 1-ого по 10-ый циклы расчета, красной линией – 1-ый цикл расчета, красными точками - 1-ый цикл эксперимента [18].

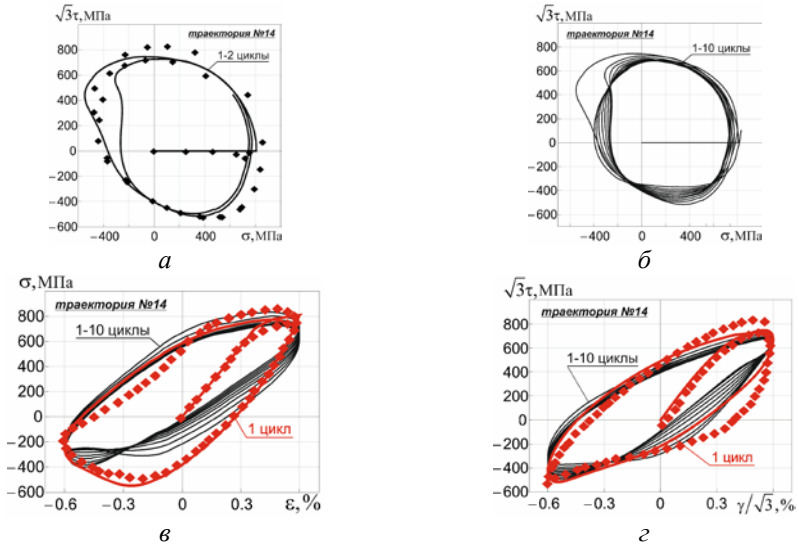


Рис. 8. Деформирование образца по термомеханической траектории №14: траектория изменения напряжений:

а – 1-2 циклы, расчет – черные линии; 1-2 циклы, эксперимент [14] – черные точки;
б – 1-10 циклы, расчет – черные линии; петли циклического деформирования;
в – осевые компоненты, 1-10 циклы, расчет – черные линии; 1 цикл, расчет – красные линии; 1 цикл, эксперимент [14] – красные точки;
г – сдвиговые компоненты, 1-10 циклы, расчет – черные линии; 1 цикл, расчет – красные линии; 1 цикл, эксперимент [14] – красные точки.

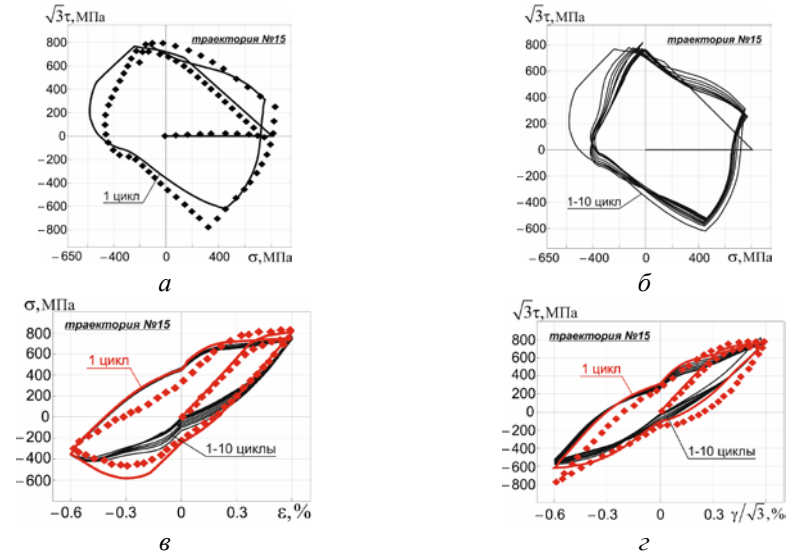


Рис. 9. Деформирование образца по термомеханической траектории №15: траектория изменения напряжений:

а – 1-2 циклы, расчет – черные линии; 1-2 циклы, эксперимент [15] – черные точки;
б – 1-10 циклы, расчет – черные линии; петли циклического деформирования;
в – осевые компоненты, 1-10 циклы, расчет – черные линии; 1 цикл, расчет – красные линии; 1 цикл, эксперимент [15] – красные точки;
г – сдвиговые компоненты, 1-10 циклы, расчет – черные линии; 1 цикл, расчет – красные линии; 1 цикл, эксперимент [15] – красные точки.

Заключение. Учет уравнения поверхности нагружения при интегрировании системы определяющих соотношений неупругости обеспечивает «возвращение» изображающей точки на поверхность нагружения на каждом шаге. Это «возвращение» необходимо для компенсации погрешности, накапливающейся в упругопластическом расчете в результате линеаризации соотношений, особенно при моделировании длительных, например циклических, процессов или процессов сложного нагружения с небольшим количеством точек упругого расчета. Рассмотренные в работе алгоритмы коррекции погрешности позволяют существенно сократить отклонение от поверхности нагружения на протяжении всего процесса циклического деформирования. Наиболее действенным методом в смысле сокращения отклонения от поверхности оказался комбинированный алгоритм, основанный и на варьировании длины полученного в основном расчете вектора приращения деформаций и оптимального выбора коэффициента линеаризации. Результаты моделирования процессов простого, пропорционального и непропорционального изотермического и неизотермического деформирования, приведенные в работе, демонстрируют удовлетворительное совпадение с данными экспериментов. Расхождения могут быть обусловлены рядом причин: недостаточным объемом экспериментальных данных, выбранных для определения параметров пластичности и ползучести, относительной простотой соотношений модели, не всегда высоким качеством данных эксперимента, приведенных в графическом виде в работах других исследователей. При этом надо отметить, что рассмотренные в работе на примере одного из вариантов неизотермических моделей инвариантной теории пластичности алгоритмы численной реализации соотношений весьма универсальны ввиду универсальности соотношений инвариантной теории пластичности и могут быть применены и при реализации других вариантов моделей типа течения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Демьянушко И.В., Темис Ю.М. К построению теорий пластического течения с анизотропным упрочнением для материалов, находящихся под воздействием физических полей. *Изв. АН СССР. МТТ.* 1975. №5. С. 111-119.

[2] Темис Ю.М. *Теория неизотермического пластического течения с изотропным и анизотропным упрочнением*. В кн.: Машиностроение. Энциклопедия. Ред. совет: К.В. Фролов (пред.) и др. - Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1-3. В 2-х кн. Кн.1. Под общ. ред. К.С. Колесникова. М.: Машиностроение. 1994,С. 227-231.

[3] Димитриенко Ю.И. *Основы механики твердого тела*. Механика сплошной среды. Т.4. Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. 624с.

[4] Бондарь В.С., Горлов В.Б., Фролов А.Н. *Моделирование процессов неупругого поведения и разрушения конструкций при сложном нагружении*. В кн.:

Мяченков В.И., Мальцев В.П., Майборода В.П. и др. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник. Под общ. ред. В.И. Мяченкова. М.: Машиностроение, 1989. 520 с.

[5] Бондарь В.С., Даньшин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термопластичности. *Вестник ПНИПУ*. Механика. 2015. №2. С. 21-35.

[6] Волков И.А., Коротких Ю.Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 424 с.

[7] Волков И.А., Игумнов Л.А. *Введение в континуальную механику поврежденной среды*. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2017. 304 с.

[8] Махутов Н.А. и др. *Уравнения состояния при малоцикловом нагружении*. М.: Наука. 1981. 244 с.

[9] Темис Ю.М., Худякова А.Д. Модель неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, №3, С. 22-41.

[10] Темис Ю.М., Худякова А.Д. Моделирование процессов изотермического упругопластического деформирования образцов при повышенной температуре. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2017, № 6, с. 49-67.

[11] Темис Ю.М., Алхимов Д.А., Мартынова А.Д. Применение инвариантной теории пластического течения для моделирования процессов испытаний образцов при сложном упругопластическом деформировании. *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета,* 2015. Том 14, № 3, Ч.1. С. 24-36.

[12] Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *International Journal of Plasticity*, 2008, P. 1642-1693.

[13] Bertram A., Olschewski J., Sievert R. Experimental and numerical investigations of thermal-mechanical behaviour of poly- and single-crystalline nickel-base superalloys. *Arch. Mech*., Warszawa, 1994. Vol. 46, №4, pp. 413-429.

[14] Frenz H., Meersmann J., Ziebs J. et al. High-temperature behaviour of IN738LC under isothermal and thermo-mechanical cyclic loading. *Materials Science and Engeneering*, 230. 1997. pp. 49-57.

[15] Ziebs J., Meersmann J., Kuhn H.J., Hulsmann N., Olschewski J. Multiaxial Thermomechanical Behaviour of IN738LC Alloy. Multiaxial Fatigue and Design, ESIS 21. 1996. *Mechanical Engeneering Publication*s, London. pp. 83-96.

[16] Meersmann J., Frenz H., Ziebs J., Kuhn H.J., Forest S. Th*ermo-mechanical behaviour of IN738LC and SC16.* CP-569. Canada. 1995. 11 p.

[17] Bertram A., Olschewski J., Sievert R. Experimental and numerical investigations of thermal-mechanical behaviour of poly- and single-crystalline nickel-base superalloys. *Arch. Mech*. 1994. Vol.46, №4, Warszawa. pp. 413-429.

[18] Meersmann J., Ziebs J., Kuhn H.J., Sievert R., Olschewski J., Frenz H. The stress-strain behaviour of IN738LC under thermomechanical uni and multiaxial fatigue loading. *Proc. Of the Symposium held at Petten*. Nethelands. 22-24 May. 1995. pp. 425-434.

[19] Abdel-Karim M., Ohno N. Kinematic hardening model suitable for ratcheting with steady-state. *International Journal of Plasticity*. 2000. Vol.16. pp. 225-240.

[20] Taleb L. About the cyclic accumulation of the inelastic strain observed in metals subjected to cyclic stress control. *International Journal of Plasticity*. 2013. Vol.43. pp. 1-19.

[21] Neto E., Peric D., Owen D. A model for elastoplastic damage at finite strains: algorithmic issues and applications. *Engeneering Computations*, Vol. 11. №3. pp. 257-281.

[22] Neto E., Peric D., Owen D. C*omputational methods for plasticity: theory and applications*. John Wiley & Sons Ltd. 2008. 816 p.
[23] Kreig R.D., Kreig D.B. Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 1977. pp. 510-515.
[24] Ortiz M., Popov E.P. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods of Engineering*, 1985. Vol. 21. pp. 1561-1576.
[25] Papadopoulos P., Taylor R.L. On the application of multi-step integration methods to infinitesimal elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994. Vol. 37, №18. pp. 3169 – 3184.
[26] Ascher U.M., Petzold L.R. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential*-Algebraic Equations. 1997. 315 p.
[27] Темис Ю.М. Самокорректирующийся шаговый метод решения нелинейных задач упругости и пластичности. *Труды ЦИАМ*, 1980. № 918. 24 с.
[28] Shaw S.W. *Nickel-base superalloys*. Patent 4207098 USA. Publ. 10.06.1980.
[29] Качанов Л.М. *Теория ползучести*. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
[30] Radnovich D.C. Methods of extrapolating low cycle fatique data to high stress amplitudes. *University of central Florida*, 2007, P. 49-57.

Статья поступила 25.06.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Темис Ю.М., Худякова А.Д. Численное моделирование процессов неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 2, с. 47–69.

Темис Юрий Моисеевич – доктор технических наук, профессор, начальник отдел ЦИАМ им. П.И. Баранова, автор более 300 опубликованных научных работ в области прочности и динамики турбомашин, численных методов решения задач упругости, пластичности и ползучести, оптимального проектирования и многодисциплинарного математического моделирования ГТД. e-mail: tejoum@ciam.ru

Худякова Анастасия Дмитриевна – инженер ЦИАМ им. П.И. Баранова, аспирант кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, автор 4 опубликованных научных работ в области моделирования неупругого поведения конструкционных материалов.

Numerical simulation of nonisothermal elastoplastic deformation processes of structural materials

© Y.M. Temis[1, 2], A.D. Khudyakova[1, 2]

[1] Central Institute of Aviation Motor Development named after P.I. Baranov, Moscow, 111116, Russia
[2] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The algorithm of the loading surface equation account during integration of constitutive equations system of invariant nonisothermal plasticity theory, based on returning of a representing point to a loading surface equation on each step of calculation was offered. Efficiency of proposed algorithm in combination with different linearization schemas for number of proportional and nonproportional thermomechanical deformation trajectories was explored. Results of simulation of the processes of tubular nickel-based alloy IN738LC specimens testing under proportional (tension-compression, tension-compression with torsion) and nonproportional («circle» and «diamond» with out-of-phase axis strain and temperature changing) cyclic thermomechanical deformation trajectories in operating-temperature range from 450 to 950°C.

Keywords: *plasticity, numerical modeling, error correction, nonelasticity model, complex deformation, nonisothermal conditions, samples testing.*

REFERENCES

[1] Dem'yanushko I.V., Temis Y.M. Izv. *Akademii Nauk SSSR. Mechanika Tverdogo Tela – Bull. Ac. of Sc., Mech. of Rig. B.*, 1975, vol. 5. pp. 111-119.

[2] Temis Y.M. *Teoriya neizotermicheskogo plasticheskogo techeniya s izotropnym I anizotropnym uprochneniem* [Theory of non-isothermal plastic flow with isotropic and non-isotropic hardening]. Mashinostroenie. Ensiclopedia/ Ed.: K.V. Frolov (head), etc. Moscow, Mashinostroenie. Dinamica I prochnost' mashin. Teoria mashin I mekhaniz-mov.[Machinery. Dynamic and machine resistance. Theory of machines and mecha-nisms]. vol. 1-3. In 2 books. Book 1//Kolesnikov K.S, etc.; Ed.: Kolesnikov K.S., 1994, pp. 227-231

[3] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdykh sred*. [Continuum Mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of solids mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[4] Bondar V.S., Gorlov V.B., Frolov A.N. Simulation of nonelastic behavior processes and structural failure under complex loading. Myachenkov V.I., Maltsev V.P., Mayboroda V.P., etc. *Rascheti machinostroitelnih construktsii metodom konechnih elementov* [Calculation of machinery constructions by a finite-element method]. Ed.:. V.I. Myachenkov. Moscow, Mashinostroenie, 1989. 520 p.

[5] Bondar V.S., Danshin V.V., Kondratenko A.A. *Vestnik PNIPU – PNRPU Mechanics Bulletin*. 2015. No. 2. pp. 21-35.

[6] Volkov I.A., Korotkih Y.G. *Uravnenia sostoyania vyazkouprugoplasticheskih sred s povregdeniami* [Constitutive equations of viscoelastoplastic environments with damages]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 424 p.

[7] Volkov I.A., Igumnov L.A. *Vvedenie v continualnyu mechaniku povregdennoi sredi* [Introduction in continuum mechanics of damaged environment]. Moscow, Fizmatlit, 2017. 304 p.

[8] Makhutov N.A. *Uravnenia sostoyania pri malotsyklovom nagryzhenii.* [Constitutive equations under low-cycle loading]. Moscow, Nauka. 1981. 244 p.

[9] Temis Y.M., Khudyakova A.D. *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 3, pp. 22-41.

[10] Temis Yu.M., Khudyakova A.D. Simulation of High-Temperature Isothermal Elasto-Plastic Deformation Processes of Testing Samples. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2017, no. 6, pp. 49–67.

[11] Temis Y.M., Alkhimov D.A., Martynova A.D. *Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie – Bulletin of Samara state aerospace University*, 2015, vol. 14, no. 3-1, pp. 24–36.
[12] Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *International Journal of Plasticity*, 2008, P. 1642-1693.
[13] Bertram A., Olschewski J., Sievert R. Experimental and numerical investigations of thermal-mechanical behaviour of poly- and single-crystalline nickel-base superalloys. *Arch. Mech*., Warszawa, 1994. Vol. 46, №4, pp. 413-429.
[14] Frenz H., Meersmann J., Ziebs J. et al. High-temperature behaviour of IN738LC under isothermal and thermo-mechanical cyclic loading. *Materials Science and Engeneering*. 230. 1997. pp. 49-57.
[15] Ziebs J., Meersmann J., Kuhn H.J., Hulsmann N., Olschewski J. Multiaxial Thermomechanical Behaviour of IN738LC Alloy. Multiaxial Fatigue and Design, ESIS 21. 1996. *Mechanical Engeneering Publication*s, London. pp. 83-96.
[16] Meersmann J., Frenz H., Ziebs J., Kuhn H.J., Forest S. Th*ermo-mechanical behaviour of IN738LC and SC16.* CP-569. Canada. 1995. 11 p.
[17] Bertram A., Olschewski J., Sievert R. Experimental and numerical investigations of thermal-mechanical behaviour of poly- and single-crystalline nickel-base superalloys. *Arch. Mech*. 1994. Vol.46, №4, Warszawa. pp. 413-429.
[18] Meersmann J., Ziebs J., Kuhn H.J., Sievert R., Olschewski J., Frenz H. The stress-strain behaviour of IN738LC under thermomechanical uni and multiaxial fatigue loading. *Proc. Of the Symposium held at Petten*. Nethelands. 22-24 May. 1995. pp. 425-434.
[19] Abdel-Karim M., Ohno N. Kinematic hardening model suitable for ratcheting with steady-state. *International Journal of Plasticity*. 2000. Vol.16. pp. 225-240.
[20] Taleb L. About the cyclic accumulation of the inelastic strain observed in metals subjected to cyclic stress control. *International Journal of Plasticity*. 2013. Vol.43. pp. 1-19.
[21] Neto E., Peric D., Owen D. A model for elastoplastic damage at finite strains: algorithmic issues and applications. *Engeneering Computations*, Vol. 11. №3. pp. 257-281.
[22] Neto E., Peric D., Owen D. C*omputational methods for plasticity: theory and applications*. John Wiley & Sons Ltd. 2008. 816 p.
[23] Kreig R.D., Kreig D.B. Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 1977. pp. 510-515.
[24] Ortiz M., Popov E.P. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods of Engineering*. 1985. Vol. 21. pp. 1561-1576.
[25] Papadopoulos P., Taylor R.L. On the application of multi-step integration methods to infinitesimal elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994. Vol. 37, №18. pp. 3169 – 3184.
[26] Ascher U.M., Petzold L.R. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential*-Algebraic Equations. 1997. 315 p.
[27] Temis Y.M. *Trudy TsIAM – Proceedings of CIAM* . 1980, no. 918, pp. 1–24.
[28] Shaw S.W. *Nickel-base superalloys*. Patent 4207098 USA. Publ. 10.06.1980.
[29] Kachanov L.M. *Teoriya polzuchesti* [Creep theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960. 455 p.
[30] Radnovich D.C. Methods of extrapolating low cycle fatique data to high stress amplitudes. *University of central Florida*, 2007, P. 49-57.

Temis Y. M., Dr. Sci. (Eng.), Professor, Head of Department of Central Institute of Aviation Motor Development named after P.I. Baranov. Author of over 300 publications in the fields of durability and dynamic of turbomachines, numerical methods for solving problems of elasticity, plasticity and creep, optimal engineering, multi-disciplinary mathematical modeling of turbine engine. e-mail: tejoum@ciam.ru

Khudyakova A.D., engineer of Central Institute of Aviation Motor Development named after P.I. Baranov. Author of 4 publications in the field of non-elastic behavior of structural materials.