УДК 519.248 DOI: 10.18698/2309-3684-2018-0-000

Методы решения задачи непараметрической проверки гипотез Лемана при испытаниях параллельных систем

© В.И. Тимонин, Н.Д. Тянникова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена задача проверки степенной гипотезы Лемана для двух цензурированных выборок. Для проверки степенной гипотезы разработан критерий типа Колмогорова – Смирнова, основанный на сравнении оценок типа Каплана – Мейера функций распределения по каждой цензурированной выборке. На основе модели случайного блуждания частицы по целочисленной решетке описан метод вычисления точных распределений статистики. Вычислены значения вероятностей для широкого набора возможных объемов выборок. Доказана сходимость распределения данной статистики к стандартному распределению Колмогорова – Смирнова при условии справедливости проверяемой гипотезы. Методами статистического моделирования исследованы свойства оценки степенного параметра, получаемой минимизацией статистики.

Ключевые слова: *непараметрическая статистика, гипотеза Лемана, критерий Колмогорова – Смирнова, оценка Каплана – Мейера*

Введение. При испытаниях технических систем часто возникает задача проверки степенной гипотезы

$$H_0\colon F_1(t) = \left(F_2(t)\right)^k, \quad k \ge 1, \tag{1}$$

где $F_1(t), F_2(t)$ — функции распределения для первой и второй независимых выборок соответственно [1–3]. Однако не всегда при испытаниях наблюдаются все отказы элементов, составляющих сложные технические системы. В настоящей работе решена задача проверки степенной гипотезы (1) в случае, когда данные являются цензурированными [4, 5].

Постановка задачи. На испытания ставятся n_1 систем, состоящих из m_1 параллельно соединенных элементов, которые работают в режиме ε_1, и n_2 систем, состоящих из m_2 параллельно соединенных элементов, работающих в режиме ε_2. Испытания проходят таким образом, что наблюдается только отказ последнего входящего в систему элемента, а наработки до отказа остальных элементов неизвестны. В результате имеются две цензурированные справа выборки $\Theta_1 = \left(\theta_1^1, ..., \theta_1^{n_1}\right)$, $\Theta_2 = \left(\theta_2^1, ..., \theta_2^{n_2}\right)$, где $\theta_1^i = \max\left\{\xi_1^i, \xi_2^i, ..., \xi_{m_1}^i\right\}$, $i = \overline{1, n_1}$, и $\theta_2^j = \max\left\{\xi_1^j, \xi_2^j, ..., \xi_{m_2}^j\right\}$, $j = \overline{1, n_2}$, — максимумы наработок до отказа элементов систем, работающих в режимах ε_1 и ε_2 соответственно.

Рассмотрим задачу проверки степенной зависимости двух функций распределения наработок до отказа элементов на основе данных об отказах систем, составленных из этих элементов.

Пусть $F_1(t)$ — функция распределения наработок до отказа элементов в режиме ε_1, а $F_2(t)$ — в режиме ε_2. Тогда проверяемая гипотеза имеет вид (1).

В настоящей работе предлагается критерий типа Колмогорова – Смирнова, основанный на сравнении оценок типа Каплана – Мейера [6] $\hat{F}_{\theta_1}(t)$, $\hat{F}_{\theta_2}(t)$ функций распределения $F_1(t)$, $F_2(t)$ [7] по цензурированным выборкам Θ_1 и Θ_2:

$$\hat{F}_{\theta_j}(t)=\begin{cases} 0, & d_j(t)=0; \\ \prod\limits_{i=1}^{n_j-d_j(t)}\left(1-\dfrac{1}{m_j\left(n_j-i+1\right)}\right), & 1\le d_j(t)\le n_j-1; \quad j=1,\ 2, \\ 1, & d_j(t)=n_j, \end{cases}$$

где $d_j(t)$ — количество отказов систем выборки Θ_j к моменту времени t. Построение и свойства таких оценок по аналогии с классическими оценками Каплана — Мейера функций надежности были рассмотрены в работе [7].

При допущении, что Θ_1, Θ_2 — независимые полные выборки из отказов систем, их функции распределения можно оценить эмпирическими функциями распределения $\hat{F}^1(t)=\dfrac{d_1(t)}{n_1}$, $\hat{F}^2(t)=\dfrac{d_2(t)}{n_2}$.

Для проверки гипотезы (1) предлагается статистика вида

$$T=\frac{m_1 m_2\sqrt{\rho n_2}}{\sqrt{k^2\rho m_1^2+m_2^2}}\max_t\frac{\left(k_1\left(\hat{F}^1\right)^{1/m_1}+k_2\left(\hat{F}^2\right)^{k/m_2}\right)^{\frac{m_2}{k}-1}}{k_2\left(k_1\left(\hat{F}^1\right)^{1/m_1}+k_2\left(\hat{F}^2\right)^{k/m_2}\right)^{\frac{m_2}{k}-m_1}+k_1}\times$$

$$\times\left|\hat{F}_{\theta_1}(t)-\left(\hat{F}_{\theta_2}(t)\right)^k\right|, \tag{2}$$

где $\rho=\dfrac{n_1}{n_2}$; $k_2=\dfrac{m_2^2}{\rho m_1^2k^2+m_2^2}$; $k_1=\dfrac{\rho m_1^2k^2}{\rho m_1^2k^2+m_2^2}$.

При этом для случая $\frac{m_2}{k}-1<0$ и $k_2\left(\hat{F}^1\right)^{1/m_1}+k_1\left(\hat{F}^2\right)^{k/m_2}=0$ положим
$$\frac{\left(k_1\left(\hat{F}^1\right)^{1/m_1}+k_2\left(\hat{F}^2\right)^{k/m_2}\right)^{\frac{m_2}{k}-1}}{k_2\left(k_1\left(\hat{F}^1\right)^{1/m_1}+k_2\left(\hat{F}^2\right)^{k/m_2}\right)^{\frac{m_2}{k}-m_1}+k_1}=0.$$

Статистика (2) является обобщением предложенной в работе [7] статистики типа Колмогорова – Смирнова, которая применяется для проверки гипотезы однородности, что эквивалентно случаю $k=1$. Отметим также, что при $m_1=m_2=1$, $k=1$ вид данной статистики совпадает с видом классической статистики Смирнова.

Асимптотическое распределение *T*. Покажем, что вид статистики T связан с тем, что ее асимптотическое распределение может быть приближено классическим распределением Колмогорова – Смирнова [8].

Без ограничения общности будем считать, что $F_1(t)=t$, $F_2(t)=$ $=t^{1/k}$, $0\le t\le 1$. Рассмотрим процесс $X_1(t)=\sqrt{n_1}\left(\hat{F}_{\theta_1}(t)-t\right)$. В работе [7] для асимптотической ковариации процесса $X_1(t)$ была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $0<\Delta\le s\le t\le 1$, *тогда асимптотическая ковариация процесса* $X_1(t)$
$$K_1(s,t)=EX_1(s)\,X_1(t)-EX_1(s)\,EX_1(t)\xrightarrow[n_1\to\infty]{} ts\frac{1-t^{m_1}}{m_1^2t^{m_1}}.$$

Рассмотрим вспомогательный процесс $\tilde{X}_2(t)=\sqrt{n_2}\left(\hat{F}_{\theta_2}(t)-t^{1/k}\right)$, $0\le t\le 1$.

Вывод асимптотической ковариации процесса $\tilde{X}_2(t)$ полностью аналогичен выводу асимптотической ковариации $K_1(s,t)$ процесса $X_1(t)$ [7], поэтому приведем без доказательства вид асимптотической ковариации этого процесса:
$$\tilde{K}_2(s,t)=E\tilde{X}_2(s)\,\tilde{X}_2(t)-E\tilde{X}_2(s)\,E\tilde{X}_2(t).$$

Теорема 2. *Пусть* $0<\Delta\le s\le t\le 1$, *тогда асимптотическая ковариация процесса* $\tilde{X}_2(t)$

$$\tilde{K}_2(s,t) = E\tilde{X}_2(s)\tilde{X}_2(t) - E\tilde{X}_2(s)E\tilde{X}_2(t) \xrightarrow[n_2\to\infty]{} t^{1/k}s^{1/k}\frac{1-t^{m_2/k}}{m_2^2 t^{m_2/k}}.$$

Для вывода асимптотической ковариации процесса $X_2(t) = \sqrt{n_2}\left(\left(\hat{F}_{\theta_2}(t)\right)^k - t\right),\ 0 \le t \le 1,$ воспользуемся теоремой, доказанной в работе [9].

Теорема 3. *Пусть* $h_n(x) = \sqrt{n}\left(\left(t^{1/k} + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k - t\right),\quad h(x) = kt^{1-\frac{1}{k}}x,$ $x \in D[0,1],\ D[0,1]$ *— пространство функций без разрывов второго рода на* $[0,1]$. *Тогда последовательность* $h_n(x)$ *сходится в метрике Скорохода к* $h(x)$ *равномерно на ограниченных множествах из* $D[0,1]$.

Поскольку асимптотически $X_2(t) = h(\tilde{X}_2(t)),$ нетрудно получить вид функции асимптотической ковариации процесса $X_2(t)$:

$$K_2(s,t) = EX_2(s)X_2(t) - EX_2(s)EX_2(t) \xrightarrow[n_2\to\infty]{} ts\frac{k^2\left(1-t^{m_2/k}\right)}{m_2^2 t^{m_2/k}}.$$

Рассмотрим случайный процесс $Z_n(t) = \sqrt{n_1}\left(\hat{F}_{\theta_1}(t) - \left(\hat{F}_{\theta_2}(t)\right)^k\right),$ $0 < \Delta \le t \le 1,$ который определяет статистику (2). Очевидно, что $Z_n(t) = \sqrt{n_1}\left(\left(\hat{F}_{\theta_1}(t) - t\right) - \left(\left(\hat{F}_{\theta_2}(t)\right)^k - t\right)\right) = X_1(t) - \sqrt{\rho}\,X_2(t),\ 0 < \Delta \le t \le 1.$

Теорема 4. *Пусть* $0 < \Delta \le s \le t \le 1,$ *тогда асимптотическая ковариация процесса* $Z_n(t)$

$$K_n(s,t) \xrightarrow[\substack{n_1\to\infty\\ n_2\to\infty}]{} K(s,t) = K_1(s,t) + \rho K_2(s,t) =$$

$$= ts\left(\frac{1-t^{m_1}}{m_1^2 t^{m_1}} + \frac{\rho k^2\left(1-t^{m_2/k}\right)}{m_2^2 t^{m_2/k}}\right) = s\left(\frac{1-t^{m_1}}{m_1^2 t^{m_1-1}} + \frac{\rho k^2\left(1-t^{m_2/k}\right)}{m_2^2 t^{\frac{m_2}{k}-1}}\right).$$

Введем $Y_n(t) = \dfrac{m_1 m_2}{\sqrt{k^2\rho m_1^2 + m_2^2}} Z_n(t).$ При стандартных ограничениях $0 < \Delta \le s \le t \le 1$ процесс $Y_n(t)$ сходится к гауссовскому процессу $Y(t)$ с нулевым математическим ожиданием и ковариацией

$$E\left[Y(s)Y(t)\right]=\frac{m_1^2 m_2^2}{k^2\rho m_1^2+m_2^2}s\left(\frac{1-t^{m_1}}{m_1^2 t^{m_1-1}}+\frac{\rho k^2\left(1-t^{m_2/k}\right)}{m_2^2 t^{\frac{m_2}{k}-1}}\right)=$$

$$=s\frac{k_2 t^{\frac{m_2}{k}-m_1}+k_1-t^{\frac{m_2}{k}}}{t^{\frac{m_2}{k}-1}}.$$

Для перехода к асимптотическому распределению статистики (2) предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Существует монотонно убывающее преобразование* $t=\psi(\tau)$: $[0,1]\to[1,0]$, *при котором процесс* $W(\tau)=Y\left(\psi(\tau)\right)\times$

$\times\dfrac{\psi(\tau)^{\frac{m_2}{k}-1}}{k_2\psi(\tau)^{\frac{m_2}{k}-m_1}+k_1}$ *является броуновским мостом.*

Доказательство. Рассмотрим преобразование

$$\tau(t)=\frac{k_2 t^{\frac{m_2}{k}-m_1}+k_1-t^{\frac{m_2}{k}}}{k_2 t^{\frac{m_2}{k}-m_1}+k_1}:\ (0,1]\to(1,0].$$

При необходимости доопределим функцию $\tau(t)$ в точке 0: $\tau(0)=1$. Нетрудно показать, что $\tau'(t)\le 0,\ \tau(0)=1,\ \tau(1)=0.$ Тогда для $\tau(t)$ существует обратное преобразование $t=\psi(\tau)$.

Введем в рассмотрение процесс

$$W(\tau)=Y\left(\psi(\tau)\right)\frac{\psi(\tau)^{\frac{m_2}{k}-1}}{k_2\psi(\tau)^{\frac{m_2}{k}-m_1}+k_1}=Y\left(\psi(\tau)\right)\lambda\left(\psi(\tau)\right).$$

При некотором Δ_1: $0\le u\le v\le\Delta_1<1,\ \psi(u)=t,\ \psi(v)=s$ имеем

$$E\left[\,W(\tau)\,\right]=0;$$

$$E\left[\,W(u)W(v)\,\right]=\lambda\left(\psi(u)\right)\lambda\left(\psi(v)\right)E\left[\,Y\left(\psi(u)\right)Y\left(\psi(v)\right)\,\right]=$$

$$=\lambda(s)\lambda(t)E\left[\,Y(s)Y(t)\,\right]=$$

$$= \frac{s^{\frac{m_2}{k}-1}}{k_2 s^{\frac{m_2}{k}-m_1}+k_1} \frac{t^{\frac{m_2}{k}-1}}{k_2 t^{\frac{m_2}{k}-m_1}+k_1} s \frac{k_2 t^{\frac{m_2}{k}-m_1}+k_1-t^{\frac{m_2}{k}}}{t^{\frac{m_2}{k}-1}} =$$

$$= \frac{s^{\frac{m_2}{k}}}{k_2 s^{\frac{m_2}{k}-m_1}+k_1} \frac{k_2 t^{\frac{m_2}{k}-m_1}+k_1-t^{\frac{m_2}{k}}}{k_2 t^{\frac{m_2}{k}-m_1}+k_1} = u(1-v). \lhd$$

Рассмотрим выборки $\left(\theta_1^1, ..., \theta_1^{n_1}\right)$ и $\left(\theta_2^1, ..., \theta_2^{n_2}\right)$. Если считать их независимыми полными выборками из совокупностей с функциями распределения $F^1(t)=t^{m_1}$, $F^2(t)=t^{m_2/k}$ соответственно, то справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Для эмпирических функций распределения* $\hat{F}^1(t)= = \frac{d_1(t)}{n_1}$, $\hat{F}^2(t)=\frac{d_2(t)}{n_2}$

$$P\left(\sup_t \left|(\hat{F}^1(t))^{1/m_1}-t\right| \underset{n_1\to\infty}{\to} 0\right)=1;\ P\left(\sup_t \left|(\hat{F}^2(t))^{k/m_2}-t\right| \underset{n_2\to\infty}{\to} 0\right)=1.$$

Доказательство. Утверждение леммы очевидно в силу теоремы Гливенко и равномерной непрерывности на [0, 1] степенных функций с положительным показателем степени. $\lhd$

Асимптотическое распределение (2) приближенно может быть получено следующим образом. Для функции $\lambda(\psi(\tau))=\lambda(t)$, определенной в лемме 1, множители t должны быть заменены на сходящиеся к ним множители $\hat{F}^1(t)^{1/m_1}$ или $\hat{F}^2(t)^{k/m_2}$. Тогда приближенно можно считать, что распределение статистики (2) совпадает с распределением максимума модуля броуновского моста, которое является классическим распределением Колмогорова – Смирнова [8].

Точные распределения статистики *T*. Для вычисления точных распределений статистики (2) составим объединенную выборку из отказов систем в обоих режимах: $Q=\left\{\theta_1^1, ..., \theta_1^{n_1}, \theta_2^1, ..., \theta_2^{n_2}\right\}$. Расположим элементы выборки Q в порядке убывания и составим из них ряд $\Gamma=\left\{\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \gamma_3 \ge ... \ge \gamma_{n_1+n_2}\right\}$.

Введем вектор $\mathbf{Z}=\left(z_1, z_2, ..., z_{n_1+n_2}\right)$, состоящий из n_1 единиц и n_2 нулей, где

$$z_l = \begin{cases} 1, \text{ если } \gamma_l = \theta_1^i, \ i = \overline{1, n_1}, \\ 0, \text{ если } \gamma_l = \theta_2^i, \ i = \overline{1, n_2}, \end{cases} \quad l = 1, \ldots, n_1 + n_2 .$$

Для вычисления точных распределений статистики T введем модель случайного блуждания частицы по целочисленной решетке. Предварительно запишем статистику (2) в виде $T = \max_t f(t)$, где $f(t)$ определяется видом статистики.

Пусть $(i, j), 0 \le i \le n_1;\ 0 \le j \le n_2,$ — целочисленная решетка на плоскости (рис. 1). Частица на первом шаге выходит из точки $(0, 0)$ и на $(n_1 + n_2)$-м шаге заканчивает блуждание в точке (n_1, n_2), совершая n_1 скачков «вправо» и n_2 скачков «вверх». Траектории ω частицы будут находиться во взаимно однозначном соответствии с векторами $\mathbf{Z}$. Равенство $z_l = 1,\ l = 1, \ldots, (n_1 + n_2)$, в векторе $\mathbf{Z}$ соответствует скачку «вправо» на l-м шаге, а $z_l = 0,\ l = 1, \ldots, (n_1 + n_2)$, — скачку «вверх». При прохождении траектории блуждающей точки через точку (i, j) функция $f(t)$ принимает значение T_{ij}:

$$T_{ij} = \frac{m_1 m_2 \sqrt{\rho n_2}}{\sqrt{k^2 \rho m_1^2 + m_2^2}} \frac{\left(k_1 \left(\frac{n_1 - i}{n_1} \right)^{1/m_1} + k_2 \left(\frac{n_2 - j}{n_2} \right)^{k/m_2} \right)^{\frac{m_2}{k} - 1}}{k_2 \left(k_1 \left(\frac{n_1 - i}{n_1} \right)^{1/m_1} + k_2 \left(\frac{n_2 - j}{n_2} \right)^{k/m_2} \right)^{\frac{m_2}{k} - m_1} + k_1} \Delta_{ij},$$

где $\Delta_{ij} = \left| \prod_{s_1=1}^{i} \left(1 - \frac{1}{m_1 (n_1 - s_1 + 1)} \right) - \left(\prod_{s_2=1}^{j} \left(1 - \frac{1}{m_2 (n_2 - s_2 + 1)} \right) \right)^k \right|.$

При этом для случая $\frac{m_2}{k} - 1 < 0$ и $k_1 \left(\frac{n_1 - i}{n_1} \right)^{1/m_1} + k_2 \left(\frac{n_2 - j}{n_2} \right)^{k/m_2} = 0$

сохраняется условие $\dfrac{\left(k_1 \left(\frac{n_1 - i}{n_1} \right)^{1/m_1} + k_2 \left(\frac{n_2 - j}{n_2} \right)^{k/m_2} \right)^{\frac{m_2}{k} - 1}}{k_2 \left(k_1 \left(\frac{n_1 - i}{n_1} \right)^{1/m_1} + k_2 \left(\frac{n_2 - j}{n_2} \right)^{k/m_2} \right)^{\frac{m_2}{k} - m_1} + k_1} = 0.$

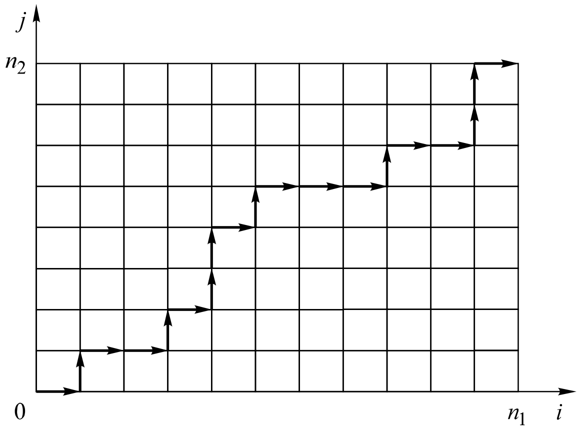

Рис. 1. Случайное блуждание частицы
по целочисленной решетке

Отметим, что значение T_{ij} одинаково для любой траектории, проходящей через точку (i, j).

Теорема 5. *Вероятности векторов* $\mathbf{Z} = \left(z_1, z_2, ..., z_{n_1+n_2}\right)$ *не зависят от распределения отказов и определяются следующим выражением:*

$$p(\mathbf{Z}) = \prod_{l=1}^{n_1+n_2} \left(\frac{\left(\left(n_1 - V_{l-1}\right) m_1 k\right)^{z_l} \left(\left(n_2 - U_{l-1}\right) m_2\right)^{1-z_l}}{\left(n_1 - V_{l-1}\right) m_1 k + \left(n_2 - U_{l-1}\right) m_2} \right),$$

где $V_l = \sum_{i=1}^{l} z_i \ (V_0 = 0)$ *— количество единиц в векторе* $\mathbf{Z}$ *до* l*-го места включительно;* $U_l = l - \sum_{i=1}^{l} z_i \ (U_0 = 0)$ *— количество нулей в векторе* $\mathbf{Z}$ *до* l*-го места включительно.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из вида условных вероятностей перехода «вверх» или «вправо» в схеме случайного блуждания частицы [10, 11]. $\triangleleft$

Теорема 6. *Вероятность* $P(T < h)$ *равна величине* $\pi_{n_1, n_2}\left(h\right)$, *которую можно получить повторным применением соотношения*

$$\pi_{ij}(h)=\begin{cases}1, & i=0;\ j=0;\\ \dfrac{m_2(n_2-j+1)}{m_1k(n_1-i)+m_2(n_2-j+1)}\pi_{i,j-1}(h)\chi_{ij}(h), & i=0;\ 1\le j\le n_2;\\ \dfrac{m_1k(n_1-i+1)}{m_1k(n_1-i+1)+m_2(n_2-j)}\pi_{i-1,j}(h)\chi_{ij}(h), & 1\le i\le n_1;\ j=0;\\ \left(\begin{array}{l}\dfrac{m_1k(n_1-i+1)}{m_1k(n_1-i+1)+m_2(n_2-j)}\pi_{i-1,j}(h)+\\ +\dfrac{m_2(n_2-j+1)}{m_1k(n_1-i)+m_2(n_2-j+1)}\pi_{i,j-1}(h)\end{array}\right)\chi_{ij}(h), & 1\le i\le n_1;\ 1\le j\le n_2.\end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\chi_{ij}(h)=\begin{cases}1, & T_{ij}<h,\\ 0, & T_{ij}\ge h.\end{cases}$

Доказательство. Вероятность каждой траектории ω можно записать в следующем виде:

$$p(\boldsymbol{Z})=p(\omega)=\prod_{l=1}^{n_1+n_2}\left(\frac{\left((n_1-V_{l-1})m_1k\right)^{z_l}\left((n_2-U_{l-1})m_2\right)^{1-z_l}}{(n_1-V_{l-1})m_1k+(n_2-U_{l-1})m_2}\right)=\prod_{l=1}^{n_1+n_2}\lambda_l(\omega).$$

Пусть ω_{ij} — множество «частичных» траекторий, начинающихся в точке $(0,0)$ и оканчивающихся в точке (i,j) (соответствующие векторы $\mathbf{Z}$ имеют i единиц и j нулей на l-м месте, где $l=i+j$). Обозначим $p_{ij}(\omega)=\prod_{s=1}^{l}\lambda_s(\omega)$.

Вероятность любой траектории, совершающей скачок $(i-1,j)\to$ $\to(i,j)$, что соответствует $z_l=1$, имеет множитель $\lambda_l(\omega)$:

$$\lambda_l(\omega)=\frac{m_1k(n_1-i+1)}{m_1k(n_1-i+1)+m_2(n_2-j)}.$$

Если же происходит скачок $(i,j-1)\to(i,j)$, что соответствует $z_l=0$, то

$$\lambda_l(\omega)=\frac{m_2(n_2-j+1)}{m_1k(n_1-i)+m_2(n_2-j+1)}.$$

Пусть $\pi_{ij} = \sum_{\omega_{ij}} p_{ij}$. Тогда соотношение (3) следует из того, что в (i, j) за один скачок можно попасть только из точки $(i-1, j)$ или из точки $(i, j-1)$. Множители $\chi_{ij}(h)$ обеспечивают обращение в нуль вероятностей траекторий, для которых $T_{ij} \geq h$. ◁

Выбор вида статистики (2) обусловлен тем, что ее предельное распределение при $n_1 \to \infty$, $n_2 \to \infty$ не зависит от количества m_1, m_2 элементов систем и является классическим распределением Колмогорова – Смирнова.

В таблице приведены вероятности точного распределения статистики T, рассчитанные для квантилей h = 1,22, h = 1,36 и h = 1,63, которые являются соответственно квантилями уровней 0,8981, 0,9505 и 0,9901 асимптотического распределения Колмогорова – Смирнова.

Точные вероятности $P(T < h)$ для различных квантилей h
в случае равных объемов выборок при $m_1 = m_2 = 2$

$n_1 = n_2$	$h = 1{,}22$		$h = 1{,}36$		$h = 1{,}63$	
	$k = 1{,}5$	$k = 3$	$k = 1{,}5$	$k = 3$	$k = 1{,}5$	$k = 3$
10	0,9040	0,7991	0,9492	0,9070	0,9852	0,9650
50	0,9138	0,8716	0,9563	0,9231	0,9916	0,9811
100	0,9108	0,8916	0,9572	0,9437	0,9913	0,9864
300	0,9060	0,9014	0,9551	0,9518	0,9911	0,9901
500	0,9046	0,9025	0,9542	0,9530	0,9909	0,9906
700	0,9041	0,9028	0,9536	0,9530	0,9908	0,9906
900	0,9033	0,9024	0,9531	0,9529	0,9908	0,9906
1100	0,9029	0,9021	0,9530	0,9528	0,9907	0,9906
1300	0,9023	0,9023	0,9528	0,9526	0,9907	0,9906
1500	0,9020	0,9020	0,9527	0,9525	0,9906	0,9906
∞	0,8981	0,8981	0,9505	0,9505	0,9901	0,9901

Как показывает сравнение точных и асимптотических вероятностей распределения статистики (2), разница между ними существенна, поэтому на практике при небольших объемах выборок следует использовать точные вероятности.

Оценка степенного параметра. Полученный критерий типа Колмогорова – Смирнова позволяет проверять гипотезы о значениях степенного параметра. Однако существует также задача оценки данного параметра. Обычно в параметрическом случае при известном виде функций распределения $F_1(t)$, $F_2(t)$ оценка осуществляется методом максимизации функции частного правдоподобия [12, 13]. Для непараметрического случая в работе предлагается оценка, получаемая путем минимизации статистики Колмогорова – Смирнова: $\hat{k} = \arg\min T(\tilde{k})$.

Исследование точности оценки степенного параметра проводилось методом статистического моделирования по следующему алгоритму.

1. Моделируем $m_1 n_1$ одинаково распределенных случайных величин ($\xi_1^1, ..., \xi_{m_1 n_1}^1$) с функцией распределения $F_0(t)$. В качестве $F_0(t)$ рассмотрим следующие функции распределения: экспоненциальную (с параметром $\beta = 0{,}001$) и Вейбулла (с параметрами $\beta = 0{,}001$, $p = 1{,}5$). Величины ($\xi_1^1, ..., \xi_{m_1 n_1}^1$) в дальнейшем будем называть наработками.

2. Наработки ($\xi_1^1, ..., \xi_{m_1 n_1}^1$) случайным образом разбиваем на n_1 групп по m_1 элементов в каждой. Элементы i-й группы обозначим $\left(\xi_1^{1,i}, ..., \xi_{m_1}^{1,i}\right)$, $i = \overline{1, n_1}$. Определим максимумы в каждой группе:

$$\theta_1^i = \max\left(\xi_1^{1,i}, ..., \xi_{m_1}^{1,i}\right).$$

3. Аналогичным образом моделируем $m_2 n_2$ одинаково распределенных случайных величин ($\xi_1^2, ..., \xi_{m_2 n_2}^2$) с функцией распределения $F_0(t)^{1/k}$, где k — заранее заданное значение степенного параметра. Наработки ($\xi_1^2, ..., \xi_{m_2 n_2}^2$) случайным образом разбиваем на n_2 групп по m_2 элементов в каждой. Элементы i-й группы обозначим $\left(\xi_1^{2,i}, ..., \xi_{m_2}^{2,i}\right)$, $i = \overline{1, n_2}$. Определим максимумы в каждой группе:

$$\theta_2^i = \max\left(\xi_1^{2,i}, ..., \xi_{m_2}^{2,i}\right).$$

4. Для некоторого изменяемого значения $\tilde{k}$, $1 \le \tilde{k} \le K$, по двум полученным выборкам $\Theta_1 = \left(\theta_1^1, ..., \theta_1^{n_1}\right)$ и $\Theta_2 = \left(\theta_2^1, ..., \theta_2^{n_2}\right)$ вычислим значение статистики Колмогорова – Смирнова $T(\tilde{k})$.

5. Методом перебора $\tilde{k}$ определим оценку $\hat{k}$, минимизирующую значение статистики $T(\tilde{k})$:

$$\hat{k} = \arg\min T(\tilde{k}).$$

Для определения статистических свойств оценки $\hat{k}$ пункты 1–5 повторялись 500 раз. По полученным значениям оценок была построена гистограмма этой выборки, а также вычислены эмпирические средние $E\hat{k}$ и дисперсии S^2.

На рис. 2 изображены гистограммы полученных оценок $\hat{k}$ при $m_1 = 2, m_2 = 3, n_1 = n_2 = 100$ для экспоненциального распределения с параметром $\beta = 0{,}001$ и для распределения Вейбулла с параметрами $\beta = 0{,}001,\ p = 1{,}5.$

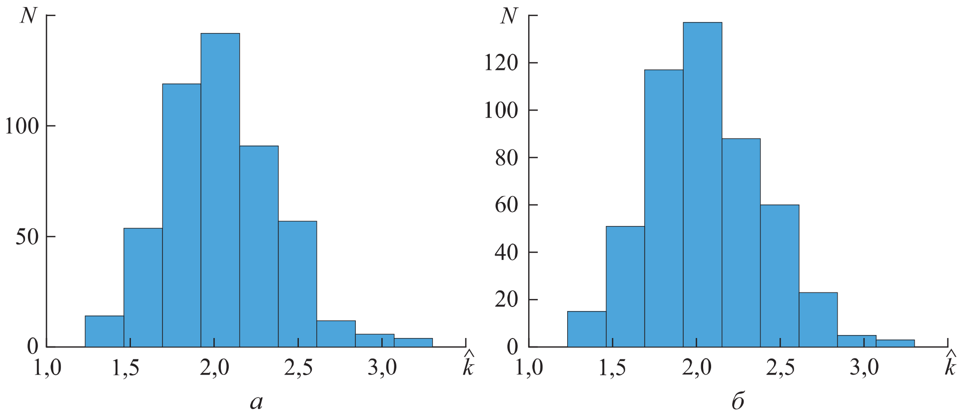

Рис. 2. Гистограммы оценок $\hat{k}$ при $k = 2$ (N — число наблюдений):
а — экспоненциальное распределение; *б* — распределение Вейбулла

По результатам моделирования для экспоненциального распределения математическое ожидание полученной оценки $E\hat{k} = 2{,}035$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma = 0{,}34$, а для распределения Вейбулла $E\hat{k} = 2{,}055,\ \sigma = 0{,}35,$ что свидетельствует о возможности применения на практике данных оценок.

Заключение. В работе предложен метод проверки гипотезы о степенной зависимости функций распределения для двух цензурированных выборок. Для проверки этой гипотезы разработан критерий типа Колмогорова − Смирнова, основанный на сравнении оценок типа Каплана − Мейера функций распределения по цензурированным данным. Показана сходимость точных распределений статистики к ее асимптотическим распределениям. Методом Монте-Карло проведено моделирование оценки степенного параметра, получаемой минимизацией статистики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. *Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ.* Москва, Либроком, 2013, 584 с.

[2] Гнеденко Б.В. *Вопросы математической теории надежности*. Москва, Радио и связь, 1983, 376 с.

[3] Balakrishnan N., Tripathi R.C., Kannan N., Ng H.K.T. Some nonparametric precedence-type tests based on progressively censored samples and evaluation of power. *J. Stat. Plan. Infer.*, 2010, vol. 140, no.10, pp. 559–573.

[4] Bagdonavicius V., Kruopis J. Nikulin M.S. *Nonparametric tests for censored data.* London, Wiley-ISTE, 2013, 233 p.

[5] Balakrishnan N., Cramer E. *The Art of Progressive Censoring. Applications to Reliability and Quality.* New York, Springer, 2014, 645 p.

[6] Kaplan E.L., Meier P. Nonparametric estimation from incomplete observations. *J. of the American Statistical Association*, 1958, vol. 53, no. 282, pp. 457–481.

[7] Тимонин В.И., Тянникова Н.Д. Проверка однородности распределений наработок до отказа элементов в двух различных режимах по результатам испытаний резервированных систем, составленных из этих элементов. *Физические основы приборостроения* [в печати].

[8] Большев Л.Н., Смирнов Н.В. *Таблицы математической статистики.* Москва, Наука, 1983, 416 с.

[9] Тимонин В.И. О предельном распределении статистики одного непараметрического критерия. *Теория вероятностей и ее применение*, 1987, т. 32, № 4, с. 790–792.

[10] Тянникова Н.Д. *Разработка непараметрических методов анализа цензурированных данных при оценке надежности сложных технических систем в различных режимах испытаний.* Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук, Москва, 2014, 16 с.

[11] Тимонин В.И., Тянникова Н.Д. Сравнение прогрессивно цензурированных выборок — численные методы табулирования распределений статистик однородности и исследование оценки параметров связи их распределений методом Монте-Карло. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3, с. 89–100.

[12] Hajek J., Sidak Z., Sen P.K. *Theory of rank tests.* London, Academic Press, 1999, 438 p.

[13] Садыхов Г.С., Крапоткин В.Г., Казакова О.И. Расчет и оценка показателей ресурса изделий с использованием модели аддитивного накопления повреждений. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 82–98.

Статья поступила в редакцию 26.11.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тимонин В.И., Тянникова Н.Д. Методы решения задачи непараметрической проверки гипотез Лемана при испытаниях параллельных систем. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 2, с.

Тянникова Нина Дмитриевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: теория надежности, математическая статистика. e-mail: tiannikova@yandex.ru

Тимонин Владимир Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 работ в теории надежности и математической статистике. e-mail: timoninmgtu52@mail.ru

Methods for solving the problem of non-parametric testing of Lehmann's hypotheses when testing parallel systems

© V.I. Timonin, N.D. Tyannikova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers the problem of testing the Lehmann power hypothesis for two censored samples. The Kolmogorov — Smirnov type criterion based on a comparison of the Kaplan — Meier type estimates of the distribution functions for each censored sample is developed to test the power hypothesis. A method for calculating the exact statistics distributions is described on the basis of the model of particle random walk over an integer lattice. The probability values are calculated for a wide range of possible sample sizes. The convergence of this statistics distribution to the standard Kolmogorov — Smirnov distribution is proved provided that the hypothesis being tested is valid. The properties of a power parameter estimate obtained by minimizing statistics are investigated by statistical modeling methods.

Keywords: *non-parametric statistics, Lehmann's hypothesis, Kolmogorov — Smirnov type criterion, Kaplan — Meier estimate*

REFERENCES

[1] Gnedenko B.V., Belyaev Y.K., Soloviev A.D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti. Osnovnye kharakteristiki nadezhnosti i ikh statisticheskiy analiz* [Mathematical methods in reliability theory. The main characteristics of reliability and statistical analysis]. Moscow, Librokom Publ., 2013, 584 p.

[2] Gnedenko B.V. *Voprosy matematicheskoy teorii nadezhnosti* [Problems of mathematical theory of reliability]. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1983, 376 p.

[3] Balakrishnan N., Tripathi R.C., Kannan N. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2010, no. 140, pp. 559–573.

[4] Bagdanovichus V., Kruopis J. Nikulin M.S. *Nonparametric tests for censored data*. London, ISTE Ltd Publ., 2011, 233 p.

[5] Balakrishnan N., Cramer E. *The Art of Progressive Censoring. Applications to Reliability and Quality*. New York, Springer Publ., 2014, 645 p.

[6] Kaplan E.L., Meier P. *JAM Statistics Association*, 1958, no. 53, pp. 57–481.

[7] Timonin V.I., Tyannikova N.D. *Fizicheskie osnovy priborostroeniya – Physical Bases of Instrumentation*, [in print].

[8] Bolshev L.N., Smirnov N.V. *Tablitsy matematicheskoy statistiki* [Mathematical Statistics Tables]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 416 p.

[9] Timonin V.I. *Teoriya veroyatnostey i ee primenenie – Theory of Probability and its Applications*, 1987, vol. 32, no. 4, pp. 790–792.

[10] Tyannikova N.D. *Razrabotka neparametricheskih metodov analiza tsenzurirovannykh dannykh pri otsenke nadezhnosti slozhnykh tekhnicheskikh sistem v razlichnykh rezhimakh ispytaniy.* Avtoreferat diss. cand. fiz.-mat. nauk [Development of nonparametric methods for analyzing censored data in assessing the reliability of complex technical systems in various test modes. Cand. phys. and math. sc. diss. Abstract]. Moscow, 2014, 16 p.

[11] Timonin V.I., Tyannikova N.D. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 3 (7), pp. 89–100.

[12] Hajek J., Sidak Z. *Theory of rank tests.* London, Academic Press Publ., 2004, 438 p.

[13] Sadykhov G.S, Krapotkin V.G., Kazakov O.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 82-98.

Tyannikova N.D., Cand. Sc. (Phys. & Math.) Assoc. Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. Scientific interests: reliability theory, mathematical statistics. e-mail: tiannikova@yandex.ru

Timonin V. I., Dr. Sc. (Phys. & Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, author of over 40 research publications in the field of reliability theory and mathematical statistics. e-mail: timoninmgtu52@mail.ru