УДК 519.8 DOI 10.18698/2309-3684-2018-0-000

Вероятностная модель отражения атаки разнотипных средств

© В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй, Т.Л. Анисова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе теории непрерывных марковских процессов разработана вероятностная модель двухстороннего боя одной единицы X против двух разнотипных единиц противника. Получены расчетные формулы для вычисления текущих и окончательных состояний при различных тактиках ведения огня единицы X. Установлены области целесообразности применения различных тактик боя единицы X. Показано, что правильный выбор тактики ведения огня может существенно увеличить вероятность ее победы. Разработанная модель двухстороннего боя может быть использована для оценки боевой эффективности многоцелевых комплектов вооружения.

Ключевые слова: *непрерывный марковский процесс, боевая единица, эффективная скорострельность, тактика ведения огня*

Введение. При разработке новых образцов технических систем, как правило, возникает необходимость построения математической модели их функционирования [1, 2]. Математическое моделирование двухсторонних боевых действий находит широкое применение при решении военно-тактических и военно-технических задач [3–9].

Рассмотрим следующую задачу. Пусть боевая единица X ведет бой с двумя разнотипными единицами стороны Y, причем первая единица менее уязвима и более опасна (в дальнейшем будем называть ее первой единицей стороны Y). Возникает вопрос, какую из единиц стороны Y единица X должна поражать в первую очередь.

Одним из возможных способов построения модели двухсторонних боевых действий является применение теории непрерывных марковских процессов [10, 11]. Процесс, протекающий в системе, называется марковским, если для каждого момента времени вероятность состояния системы в будущем зависит только от ее состояния в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние [12, 13].

Последовательность выстрелов, осуществляемых каждой участвующей в бою единицей, представляется в виде пуассоновского потока событий [14]. Также используется прием, заключающийся в переходе от потока выстрелов к потоку успешных выстрелов, который также считается пуассоновским. Выстрел можно назвать успешным, если он поразил боевую единицу противника [15, 16].

Основные математические зависимости и формулы. Введем следующие обозначения: p_{x1}, p_{x2} — вероятности поражения одним выстрелом единицы X первой и второй единиц стороны Y соответственно; p_{y1}, p_{y2} — вероятности поражения единицы X одним выстрелом первой и второй единиц стороны Y; $\lambda_{x1}, \lambda_{x2}$ — практические скорострельности единицы X при стрельбе по первой и второй единицам стороны Y; $\lambda_{y1}, \lambda_{y2}$ — практические скорострельности первой и второй единиц стороны Y; величины $v_1 = p_{x1}\lambda_{x1}$, $v_2 = p_{x2}\lambda_{x2}$, $u_1 = p_{y1}\lambda_{y1}$, $u_2 = p_{y2}\lambda_{y2}$ назовем эффективными скорострельностями боевых единиц, полагая их в течение всего боя постоянными. При этом $v_1 < v_2$, $u_1 > u_2$.

При использовании теории непрерывных марковских процессов протекание боя будет характеризоваться системой (i, j, k), где i характеризует состояние единицы X; j, k характеризуют состояния первой и второй единиц стороны Y соответственно. Значения i, j, k, равные 1, соответствуют тому, что данная единица продолжает бой, а значения i, j, k, равные 0, — тому, что данная боевая единица уничтожена (поражена). Состояние $(0,0,0)$ не является состоянием данной системы, так как вероятность одновременного поражения двух и более единиц — бесконечно малая величина.

Положим, что все три боевые единицы открывают огонь по противнику одновременно. Если единица X в первую очередь ведет огонь по первой единице стороны Y и при условии ее поражения переносит огонь на вторую, то система уравнений, описывающая процесс протекания боя, принимает следующий вид:

$$\begin{cases} F'_{111}(t) = -(v_1 + u_1 + u_2) F_{111}(t); \\ F'_{101}(t) = -(v_2 + u_2) F_{101}(t) + v_1 F_{111}(t); \\ F'_{011}(t) = -(u_1 + u_2) F_{111}(t); \\ F'_{100}(t) = v_2 F_{101}(t); \\ F'_{001}(t) = u_2 F_{101}(t) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$F_{111}(0) = 1,\ F_{101}(0) = F_{011}(0) = F_{100}(0) = F_{001}(0) = 0.$$

Здесь $F_{ijk}(t)$ — вероятности того, что в момент времени t система находится в состоянии (i, j, k); $F'_{ijk}(t)$ — их производные по времени. Вероятности окончательных состояний системы (т. е. к концу боя) $F_{ijk}(\infty)$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{cases} F_{100}(\infty) = \dfrac{v_1 v_2}{(v_1 + u_1 + u_2)(v_2 + u_2)}; \\ F_{001}(\infty) = \dfrac{v_1 u_2}{(v_1 + u_1 + u_2)(v_2 + u_2)}; \\ F_{011}(\infty) = \dfrac{u_1 + u_2}{v_1 + u_1 + u_2}; \\ F_{101}(\infty) = F_{111}(\infty) = 0. \end{cases}$$

Отметим, что в данном случае состояния (1, 1, 0) и (0, 1, 0) не являются состояниями рассматриваемой системы, так как единица X начинает вести огонь по второй единице стороны Y только после уничтожения первой.

Рассмотрим ситуацию, когда единица X начинает боевые действия с ведения огня по второй единице стороны Y и только при условии ее поражения переносит огонь на первую. В этом случае процесс протекания боя опишем системой уравнений

$$\begin{cases} G'_{111}(t) = -(v_2 + u_1 + u_2)\, G_{111}(t); \\ G'_{110}(t) = -(v_1 + u_1)\, G_{110}(t) + v_2 G_{111}(t); \\ G'_{011}(t) = (u_1 + u_2)\, G_{111}(t); \\ G'_{100}(t) = v_1 G_{110}(t); \\ G'_{010}(t) = u_1 G_{110}(t) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$G_{111}(0) = 1,\ G_{110}(0) = G_{011}(0) = G_{100}(0) = G_{010}(0) = 0,$$

где $G_{ijk}(t)$ — вероятности того, что в момент времени t система находится в состоянии (i, j, k); $G'_{ijk}(t)$ — их производные по времени. Вероятности состояний системы к концу боя $G_{ijk}(\infty)$ вычисляются так:

$$\begin{cases} G_{100}(\infty) = \dfrac{v_1 v_2}{(v_1 + u_1)(v_2 + u_1 + u_2)}; \\ G_{010}(\infty) = \dfrac{u_1 v_2}{(v_1 + u_1)(v_2 + u_1 + u_2)}; \\ G_{011}(\infty) = \dfrac{u_1 + u_2}{v_2 + u_1 + u_2}; \\ G_{110}(\infty) = G_{111}(\infty) = 0. \end{cases}$$

В данном случае состояния (1, 0, 1) и (0, 0, 1) не являются состояниями системы.

В качестве критерия оптимальности ведения огня единицей X примем максимум вероятности ее победы, которая равна $P_{0x} = F_{100}(\infty)$ или $P_{0x} = G_{100}(\infty)$. Для этого вычислим разность

$$\Delta = F_{100}(\infty) - G_{100}(\infty) = \frac{v_1 v_2}{(v_1+u_1+u_2)(v_2+u_2)} - \frac{v_1 v_2}{(v_2+u_1+u_2)(v_1+u_1)} =$$

$$= \frac{v_1 v_2 \left(v_1 u_1 - v_2 u_2 + u_1^2 - u_2^2\right)}{(v_1+u_1)(v_2+u_2)(v_1+u_1+u_2)(v_2+u_1+u_2)}.$$

Знаменатель этой дроби, а также v_1 и v_2 всегда являются положительными величинами, поэтому основной интерес представляет знак величины:

$$\Delta_1 = v_1 u_1 - v_2 u_2 + u_1^2 - u_2^2.$$

Введем следующие обозначения:

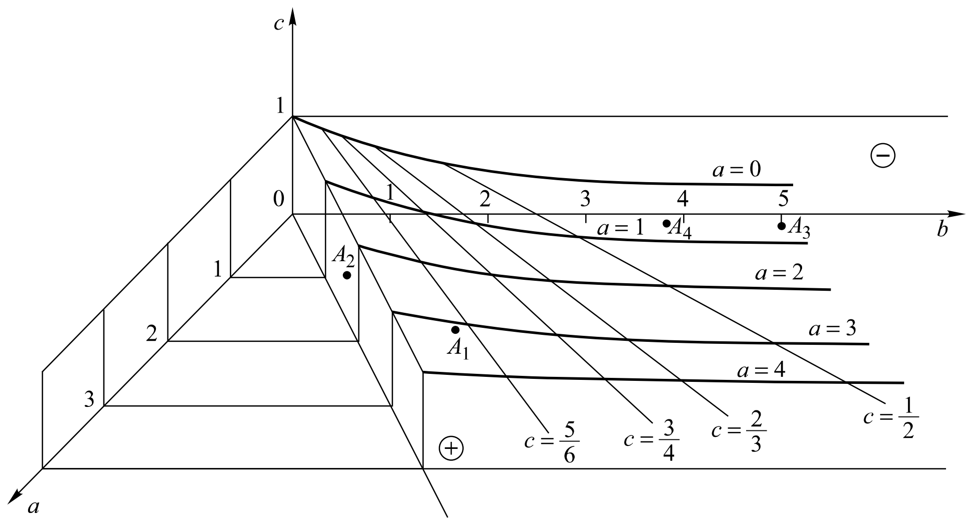
$$a = \frac{v_1}{u_1},\ b = \frac{v_2}{u_1},\ c = \frac{u_2}{u_1}.$$

Тогда $\Delta_1 = u_1^2\left(a - bc + 1 - c^2\right)$. При этом $b > 0,\ a \in (0, b),\ c \in (0,1)$.

Отметим, что при $\frac{v_1}{v_2} > \frac{u_2}{u_1}$, а также при $\frac{v_1+u_1}{v_2+u_2} > \frac{u_2}{u_1}$ единице X целесообразно начинать обстрел с первой единицы противника.

Анализ результатов расчетов. На рисунке показаны области выгодности различных тактик ведения огня единицей X. Знаком $\oplus$ отмечена область, в которой единице X следует в первую очередь вести огонь по первой единице стороны Y (более опасной и менее уязвимой), знаком $\ominus$ — область, в которой единица X должна в первую очередь вести огонь по второй единице стороны Y.

По результатам расчетов установлено, что выбор единицей X правильной тактики ведения огня может существенно увеличить вероятность ее победы. Если, например, $v_1 = 0{,}02,\ v_2 = 0{,}03,\ u_1 = 0{,}01,$ $u_2 = 0{,}002$ (этому соответствуют $a = 2,\ b = 3,\ c = 0{,}2$), то $F_{100}(\infty) = 0{,}586,\ G_{100} = 0{,}476,\ \Delta = 0{,}110$. А если $v_1 = 0{,}024,\ v_2 = 0{,}026,$ $u_1 = 0{,}02,\ u_2 = 0{,}004$ ($a = 1{,}2,\ b = 1{,}3,\ c = 0{,}2$), то $F_{100}(\infty) = 0{,}433,$ $G_{100} = 0{,}284,\ \Delta = 0{,}149$. В этих ситуациях единице X необходимо в первую очередь вести огонь по первой единице стороны Y. Оптимальный выбор единицей X тактики ведения огня в этих случаях значительно увеличивает вероятность ее победы (в первой ситуации более чем на 10 %, во второй ситуации — почти в 1,5 раза). На рисунке этим случаям соответствуют точки A_1 и A_2.



Области выгодности различных тактик ведения огня единицей X

Однако при $v_1 = 0{,}015,\ v_2 = 0{,}06,\ u_1 = 0{,}01,\ u_2 = 0{,}009$ $(a = 1{,}5,$ $b = 6,\ c = 0{,}9)$ получаем $F_{100}(\infty) = 0{,}384,\ G_{100} = 0{,}456,\ \Delta = -0{,}072;$ при $v_1 = 0{,}02,\ v_2 = 0{,}09,\ u_1 = 0{,}02,\ u_2 = 0{,}019$ $(a = 1,\ b = 4{,}5,\ c = 0{,}95)$ имеем $F_{100}(\infty) = 0{,}280,\ G_{100} = 0{,}349,\ \Delta = -0{,}069.$ В этих случаях единице стороны X целесообразно в первую очередь вести огонь по второй единице противника, причем правильный выбор единицей X тактики ведения огня существенно увеличивает вероятность ее победы. На рисунке этим ситуациям соответствуют точки A_3 и A_4.

Выводы. По результатам данной статьи можно сделать следующие выводы:

1. На основе теории непрерывных марковских процессов разработана модель боя одной боевой единицы против двух разнотипных единиц противника.

2. Показаны области выгодности применения различных тактик ведения огня единицей X.

3. Установлено, что выбор единицей X правильной тактики ведения огня может существенно увеличить вероятность ее победы.

4. Разработанная модель двухстороннего боя может быть использована для оценки боевой эффективности многоцелевых комплексов вооружения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров А.А., Димитриенко Ю.И. Математическое и компьютерное моделирование — основа современных инженерных наук. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 3–4.

[2] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

[3] Вентцель Е.С. *Исследование операций: задачи, принципы и методология*. Москва УРСС, 2007, 208 с.

[4] Ткаченко П.Н. *Математические модели боевых действий*. Москва, Советское радио, 1969, 240 с.

[5] Чуев Ю.В. *Исследование операций в военном деле*. Москва, Воениздат, 1970, 270 с.

[6] Bretnor R. *Decisive warfare: a study in military theory*. New York, Stackpole Books, 1969, p. 192.

[7] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to Operations Research*. New York, MeGrew-Hill, 2005, 998 p.

[8] Shamahan L. *Dynamics of Model Battles*. New York, Physics Department, State University of New York, 2005, pp. 1–43.

[9] Taylor J.G. *Force-on-force attrition modeling*. Military Applications Section of Operations Research Society of America, 1980, 320 p.

[10] Глушков И.Н. Выбор математической схемы при построении модели боевых действий. *Программные продукты и системы*, 2010, № 1, с. 1–9.

[11] Алексеев О.Г., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. *Марковские модели боя*. Москва, Министерство обороны СССР, 1985, 85 с.

[12] Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, Кнорус, 2016, 658 с.

[13] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. *Теория случайных процессов и ее инженерные приложения*. Москва, Кнорус, 2015, 448 с.

[14] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1, с. 89–104.

[15] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Стохастизм и детерминизм при моделировании двухсторонних боевых действий. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки, 2017, № 4 с. 16–28.

[16] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. *Модели динамики средних двухсторонних боевых действий многочисленных группировок*. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 72 с.

Статья поступила в редакцию

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Чуев В.Ю., Дубограй И.В., Анисова Т.Л. Вероятностная модель отражения атаки разнотипных средств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 1, с.

Чуев Василий Юрьевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области прикладной математики. e-mail: vacilious@mail.ru

Дубограй Ирина Валерьевна — доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области прикладной математики. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

Анисова Татьяна Леонидовна — канд. пед. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области прикладной математики.
e-mail: bolashova1@mail.ru

Probability model of meeting an attack of different types of weapon

© V.Yu. Chuev, I.V. Dubogray, T.L. Anisova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

On the basis of the continuous Markov processes theory we have developed a probabilistic model of the two-way battle of one combat unit against two enemy units of different types. The authors have obtained calculation formulas for computing current and final states under various firing tactics of the unit. We have determined the applicability areas for different combat tactics of the unit. The study shows that the right choice of the firing tactics can considerably increase the probability of the victory in the battle. The developed model of the two-way battle may be used for estimating the combat effectiveness of the multipurpose weaponry units.

Keywords: *continuous Markov process, combat unit, effective rate of fire, firing tactics*

REFERENCES

[1] Aleksandrov A.A., Dimitrienko Yu.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1 (1), pp. 3–4.

[2] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1 (1), pp. 5–17.

[3] Venttsel E.S. *Issledovanie operatsiy: zadachi, printsipy i metodologiya* [Research operations: tasks, principles and methodology]. Moscow, URSS Publ., 2007, 208 p.

[4] Tkachenko P.N. *Matematicheskie modeli boevykh deystviy* [Mathematical models of military operations]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1969, 240 p.

[5] Chuev Yu.V. *Issledovanie operatsiy v voennom dele* [Investigation of military operations]. Moscow, Voenizdat Publ., 1970, 270 p.

[6] Bretnor R. *Decisive warfare: a study in military theory*. New York, Stackpole Books, 1969, 192 p.

[7] Hillier F.S., Lieberman G.J. *Introduction to Operations Research*. New York, McGraw-Hill, 2005, 998 p.

[8] Shamahan L. *Dynamics of Model Battles*. New York, Physics Department, State University of New York, 2005, pp. 1–43.

[9] Taylor J.G. *Force-on-force attrition modeling*. Military Applications Section of Operations Research Society of America, 1980, 320 p.

[10] Glushkov I.N. *Programmnye produkty i sistemy — Software & Systems*, 2010, no. 1, pp. 1–9.

[11] Alekseev O.G., Anisimov V.G., Anisimov E.G. *Markovskie modeli boya* [Markov's combat models]. Moscow, the USSR Ministry of Defense, 1985, 85 p.

[12] Venttsel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [The theory of probability]. Moscow, Knorus Publ., 2016, 658 p.

[13] Venttsel E.S., Ovcharov L.A. *Teoriya sluchaynykh protsessov i ee inzhenernye prilozheniya* [The theory of random processes and its engineering applications]. Moscow, Knorus Publ., 2015, 448 p.
[14] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1, pp. 89–104.
[15] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2017, no. 4, pp. 16–28.
[16] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Modeli dinamiki srednikh dvukhstoronnikh boevykh deystviy mnogochislennykh gruppirovok* [Dynamics models of the average bilateral military operations of numerous groupings]. Saarbryukken, LAP LAMBERT Academic Publ., 2014, 72 p.

Chuev V.Yu., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 20 scientific papers in the field of applied mathematics.
e-mail: vacilious@mail.ru

Dubogray I.V., Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of scientific papers in the field of applied mathematics.
e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

Anisova T.L., Cand. Sc. (Pedag.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of scientific papers in the field of applied mathematics.
e-mail: bolashova1@mail.ru