



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин. Математическое моделирование и численные методы, 2018, № 1, с. 16-40

Источник: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/154/>

Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин

© Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, 105005, Россия

Предложен новый вариант асимптотической теории тонких многослойных пластин с конечной сдвиговой жесткостью, основанный на асимптотическом анализе общих трехмерных уравнений теории упругости многослойных тел. Этот вариант позволяет получить осредненные уравнения теории пластин типа Тимошенко. Асимптотический анализ проводится по малому геометрическому параметру. Сформулированы локальные задачи теории упругости, которые допускают аналитическое решение. Показано, что при учете только главных членов в асимптотических разложениях асимптотическая теория приводит к осредненным уравнениям пластин типа Кирхгофа — Лява. При учете идущих за главными членами в асимптотических рядах самоподобным образом с предыдущим приближением асимптотическая теория приводит к осредненным уравнениям типа Тимошенко. Теоретическая точность получившегося урезанного асимптотического решения при этом не ниже, чем решения согласно теории типа Кирхгофа — Лява. Разработанный вариант асимптотической теории с помощью явных аналитических формул позволяет с высокой точностью вычислять все шесть компонент тензора напряжений в многослойной пластине. С помощью разработанного метода проведено численное моделирование напряжений и перемещений в многослойной пластине при изгибе равномерным давлением. Численные расчеты показали, что разработанная асимптотическая теория типа Тимошенко дает примерно одинаковую высокую точность расчета изгибных, сдвиговых и поперечных напряжений в сравнении с трехмерным конечно-элементным решением, полученным для очень мелких сеток, и асимптотической теорией типа Кирхгофа — Лява. Для прогиба теория типа Тимошенко дает лучший результат, чем теория типа Кирхгофа — Лява, особенно для относительно коротких пластин. Для продольного перемещения теория типа Тимошенко дает хороший результат только для длинных пластин.

Ключевые слова: многослойные тонкие пластины, асимптотическая теория, асимптотические разложения, теория типа Тимошенко, теория типа Кирхгофа — Лява

Введение. Тонкостенные конструкции широко применяются в инженерном деле. Для расчета прочности таких конструкций обычно применяют специальные теории тонких пластин и оболочек, основанные на системе определенных допущений относительно распределения перемещений и напряжений по толщине конструкции [1–9]. Двумерные теории в отличие от прямых трехмерных теорий обладают важным свойством сокращения вычислительных затрат. Однако платой за эту эффективность является снижение точности: часто классические теории пластин и оболочек Тимошенко и Кирхгофа — Лява довольно грубо воспроизводят распределение напряжений межслойного сдвига и поперечных напряжений.

Для повышения точности используют различные методы, среди которых разложение в ряды по поперечной координате, интегриро-

вание трехмерных уравнений после решения задачи теории пластин и оболочек и др. Однако при этом возникает вопрос об обоснованности этих методов, поскольку верифицировать их можно лишь на частных примерах. В этом смысле одним из наиболее обоснованных методов является метод асимптотических разложений по малому геометрическому параметру [10–17]. Данный метод является математически строгим, в ряде случаев удается математически получить оценки точности асимптотических решений по сравнению с точным трехмерным решением. Кроме того, этот метод является достаточно универсальным и может быть применен для решения широкого класса задач, в том числе и для нелинейных задач.

В работах [16–24] с помощью метода асимптотических разложений обоснована теория тонких многослойных пластин типа Кирхгофа — Лява без использования каких-либо допущений относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине. В этой теории осредненные уравнения практически полностью совпадают с классическими уравнениями Кирхгофа — Лява, благодаря этому удается получить аналитические выражения для вычисления всех шести компонент тензора напряжений. Однако теория Кирхгофа — Лява не учитывает конечных сдвиговых свойств пластин и дает заметные погрешности при вычислении перемещений для относительно коротких пластин [25]. В этой связи теории типа Тимошенко обычно обеспечивают повышенную точность при расчете перемещений.

Цель настоящей статьи — разработка варианта асимптотической теории тонких пластин типа Тимошенко, который так же, как и асимптотическая теория Кирхгофа — Лява, основан только на асимптотическом анализе общих трехмерных уравнений теории упругости по малому геометрическому параметру.

Основные допущения асимптотической теории тонких упругих пластин. Для многослойной пластины постоянной толщины h введем малый параметр $\kappa = h/L \ll 1$, где L — характерный линейный размер (диаметр).

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат Ox_m (ось Ox_3 направлена по нормали пластины) трехмерную квазистатическую задачу линейной теории упругости [26, 27]:

$$\begin{aligned} \nabla_j \sigma_{ij} &= 0, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j), \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \\ \Sigma_{3\pm}: \sigma_{\beta} &= -\tilde{p}_{\pm} \delta_{\beta}, \quad \Sigma_T: u_i = u_{ei}, \quad \Sigma_S: [\sigma_{\beta}] = 0, \quad [u_3] = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Система (1) состоит из уравнений равновесия, соотношений Коши, соотношений линейной упругости, граничных условий на внешней, внутренней поверхности $\Sigma_{3\pm}$ (их уравнение имеет вид $\tilde{x}_3 = \pm h/2$) и торцевой поверхности Σ_T , а также граничных условий на поверхности контакта Σ_S слоев пластины. В системе (1) обозначены: $\nabla_j = \partial / \partial \tilde{x}_j$ — оператор дифференцирования по декартовым координатам [28]; u_j — компоненты вектора перемещений; $[u_3]$ — скачок функций. Здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами I, J, K, L, \dots принимают значения 1, 2, а индексы i, j, k, l — значения 1–3).

Принимаем основное допущение, состоящее в том, что давления \tilde{p}_\pm на внешней и внутренней поверхностях пластины имеют порядок малости $O(\kappa^3)$ по сравнению с характерным значением модуля упругости материала пластины E_0 (размерная величина):

$$\tilde{p}_\pm = \kappa^3 p_\pm, \quad p_\pm = O(1)E_0, \quad (2)$$

где $O(1)$ — безразмерная величина порядка 1. Допущение (2), как правило, соответствует реальным условиям нагружения тонких пластин.

Асимптотическое решение задачи теории упругости для тонких пластин. Решение задачи (2) ищем в виде асимптотических разложений по параметру κ в виде функций, зависящих от двух глобальных x_I координат в плоскости пластины и локальной поперечной координаты ξ :

$$\begin{aligned} u_k &= u_k^{(0)}(x_I) + \kappa u_k^{(1)}(x_I, \xi) + \kappa^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + \dots \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{(0)} + \kappa \varepsilon_{ij}^{(1)} + \kappa^2 \varepsilon_{ij}^{(2)} + \dots \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \kappa \sigma_{ij}^{(1)} + \kappa^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \kappa^3 \sigma_{ij}^{(3)} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Для производных по локальной координате будем использовать обозначения $u_{i/3}^{(1)} = \partial u_i^{(1)} / \partial \xi$, а по глобальным координатам — $u_{i,j}^{(1)} = \partial u_i^{(1)} / \partial x_j$. Также введем операцию осреднения по толщине пластины

$$\langle u_i^{(1)} \rangle = \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(1)} d\xi. \quad (4)$$

Подставим разложения (3) в соотношения Коши в системе (1), при этом используем правила дифференцирования функций локальных координат [16] ($\partial / \partial \tilde{x}_j \rightarrow \partial / \partial x_j + (1/\kappa)\delta_{j3}\partial / \partial \xi$). Тогда получим следующие соотношения между деформациями и перемещениями для разных приближений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{IJ}^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(u_{I,J}^{(n)} + u_{J,I}^{(n)} \right), \quad \varepsilon_{I3}^{(n)} = \frac{1}{2} \left(u_{3,I}^{(n)} + u_{I/3}^{(n+1)} \right), \\ \varepsilon_{33}^{(n)} &= u_{3/3}^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь обозначены производные по локальной координате $u_{i/3}^{(1)} = \partial u_i^{(1)} / \partial \xi$ и глобальным координатам $u_{i,j}^{(1)} = \partial u_i^{(1)} / \partial x_j$.

Напряжения и деформации n -го приближения связаны определяющими соотношениями упругости:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(n)}. \quad (6)$$

Полагаем, что все слои пластины являются моноклинными материалами (содержат не более 13 ненулевых констант [26–28]), поэтому эти соотношения можно записать в виде трех групп уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(n)} &= C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{IJ33} \varepsilon_{33}^{(n)}, \quad \sigma_{I3}^{(n)} = 2C_{I3K3} \varepsilon_{K3}^{(n)}, \\ \sigma_{33}^{(n)} &= C_{33KL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{3333} \varepsilon_{33}^{(n)}, \end{aligned} \quad (7)$$

в которых явным образом выделены сдвиговые $\varepsilon_{K3}^{(n)}$ и поперечные $\varepsilon_{33}^{(n)}$ деформации.

Локальные задачи. Подставляя разложения (3) в уравнения равновесия и граничные условия системы (1) и приравнявая в уравнениях равновесия члены при κ^{-1} к нулю, а при остальных степенях от κ к некоторым величинам $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$, не зависящим от ξ_j , получим рекуррентную последовательность локальных задач теории упругости.

Задача для нулевого приближения имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{I3/3}^{(0)} &= 0, \\ \sigma_{IJ}^{(0)} &= C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{IJ33} \varepsilon_{33}^{(0)}, \quad \sigma_{I3}^{(0)} = 2C_{I3K3} \varepsilon_{K3}^{(0)}, \quad \sigma_{33}^{(0)} = C_{33KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{3333} \varepsilon_{33}^{(0)}, \\ \varepsilon_{IJ}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)} \right), \quad \varepsilon_{I3}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(u_{3,I}^{(0)} + u_{I/3}^{(1)} \right), \quad \varepsilon_{33}^{(0)} = u_{3/3}^{(1)}, \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{I3}^{(0)} &= 0, \quad \Sigma_S : [\sigma_{I3}^{(0)}] = 0, \quad [u_i^{(1)}] = 0, \quad \langle u_i^{(1)} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для более высоких приближений локальные задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3/3}^{(n)} + \sigma_{iJ,J}^{(n-1)} &= h_i^{(n-1)}, \\ \sigma_{IJ}^{(n)} &= C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{IJ33}\varepsilon_{33}^{(n)}, \quad \sigma_{I3}^{(n)} = 2C_{I3K3}\varepsilon_{K3}^{(n)}, \quad \sigma_{33}^{(n)} = C_{33KL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{3333}\varepsilon_{33}^{(n)}, \\ \varepsilon_{IJ}^{(n)} &= \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(n)} + u_{J,I}^{(n)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(n)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(n)} + u_{I/3}^{(n+1)}), \quad \varepsilon_{33}^{(n)} = u_{3/3}^{(n+1)}, \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(n)} &= -p_{\pm}\delta_{n3}\delta_{i3}, \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(n)}] = 0, \quad [u_i^{(n+1)}] = 0, \quad \langle u_i^{(n+1)} \rangle = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

где $u_j^{(n)}$, $\sigma_{ij}^{(n-1)}$ — входные данные.

После введения функций $h_i^{(n)}$ уравнения равновесия в системе (1) принимают вид:

$$h_i^{(0)} + \kappa h_i^{(1)} + \kappa^2 h_i^{(2)} + \dots = 0. \quad (10)$$

Решением локальной задачи нулевого приближения (8) являются функции $u_j^{(1)}$, $\varepsilon_{kl}^{(0)}$, $\sigma_{ij}^{(0)}$, зависящие от локальной координаты ξ и входных данных этой задачи — перемещений $u_j^{(0)}(x_j)$. Решением локальных задач (9) являются функции $u_j^{(n+1)}$, $\varepsilon_{kl}^{(n)}$, $\sigma_{ij}^{(n)}$.

Решение локальной задачи нулевого приближения. Уравнения равновесия с граничными условиями в локальной задаче (8) имеют вид

$$\sigma_{i3}^{(0)} = 0, \quad \forall \xi : -0,5 < \xi < 0,5. \quad (11)$$

Подставив в уравнения (11) вторую и третью группу определяющих соотношений (8) для $\sigma_{i3}^{(0)}$, получим

$$C_{I3K3}\varepsilon_{K3}^{(0)} = 0, \quad C_{33KL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{3333}\varepsilon_{33}^{(0)} = 0. \quad (12)$$

Отсюда следует, что в нулевом приближении деформации межслойного сдвига во всех слоях являются нулевыми, а поперечная деформация — ненулевой:

$$\varepsilon_{K3}^{(0)} = 0, \quad \varepsilon_{33}^{(0)} = -Z_{3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)}, \quad Z_{3KL} = C_{3333}^{-1}C_{33KL}. \quad (13)$$

Подставив выражения (8) в соотношения (13) для деформаций $\varepsilon_{K3}^{(0)}$ и $\varepsilon_{33}^{(0)}$, выраженные через перемещения, после интегрирования получившихся уравнений, с учетом условий $\langle u_i^{(1)} \rangle = 0$, находим перемещения

$$u_I^{(1)} = -\xi u_{3,I}^{(0)}, \quad u_3^{(1)} = U_{3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)}, \quad (14)$$

где обозначены функции

$$U_{3KL}(\xi) = - \langle Z_{3KL} \rangle_{\xi} \quad (15)$$

и введены операторы

$$\begin{aligned} \langle f(\xi) \rangle_{\xi} &= \int_{-1/2}^{\xi} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} - \left\langle \int_{-1/2}^{\xi} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} \right\rangle, \\ \{ f(\xi) \}_{\xi} &= \int_{-1/2}^{\xi} (f(\tilde{\xi}) - \langle f(\tilde{\xi}) \rangle) d\tilde{\xi}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив первые два уравнения (13) в первую группу определяющих соотношений (8), находим напряжения

$$\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)}; \quad (17)$$

$$C_{IJKL}^{(0)} = C_{IJKL} - C_{IJ33} C_{3333}^{-1} C_{33KL}, \quad (18)$$

где $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ выражается по формулам (8).

Решение локальных задач для высоких приближений. Осуществляя решение локальных задач (19) для более высоких приближений по аналогичному алгоритму, находим напряжения

$$\sigma_{iB}^{(n+1)} = -p_- \delta_{iB} \delta_{n2} - \int_{-0,5}^{\xi} \sigma_{iJ,J}^{(n)} d\xi + h_i^{(n)}(\xi + 0,5), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Условия существования решения (19) задач (9), удовлетворяющих граничным условиям $\sigma_{iB}^{(n)} = -p_+ \delta_{iB} \delta_{n3}$ на внешней поверхности $\xi = 0,5$, приводят к следующей системе уравнений для вычисления функций:

$$h_i^{(n)} = \langle \sigma_{iJ,J}^{(n)} \rangle - \Delta p \delta_{iB} \delta_{n2}, \quad \Delta p = p_+ - p_-. \quad (20)$$

С учетом формул (20) напряжения $\sigma_{iB}^{(n)}$ (19) принимают вид

$$\sigma_{iB}^{(n+1)} = - \left\{ \sigma_{iJ,J}^{(n)} \right\}_{\xi} - (p_- + \Delta p(\xi + 0,5)) \delta_{iB} \delta_{n3}. \quad (21)$$

Запишем формулы (21) в явном виде для напряжений $\sigma_{iB}^{(n)}$ до третьего приближения и напряжений $\sigma_{33}^{(n)}$ до четвертого приближения:

$$\begin{aligned}\sigma_{I3}^{(1)} &= -\left\{\sigma_{IJ}^{(0)}\right\}_{\xi}, \quad \sigma_{I3}^{(2)} = -\left\{\sigma_{IJ}^{(1)}\right\}_{\xi}, \quad \sigma_{I3}^{(3)} = -\left\{\sigma_{IJ}^{(2)}\right\}_{\xi}, \\ \sigma_{33}^{(1)} &= -\left\{\sigma_{3J,J}^{(0)}\right\}_{\xi} = 0, \quad \sigma_{33}^{(2)} = -\left\{\sigma_{3J,J}^{(1)}\right\}_{\xi} = \left\{\left\{\sigma_{IJ,II}^{(0)}\right\}_{\xi}\right\}_{\xi}, \quad (22) \\ \sigma_{33}^{(3)} &= -p_- - \Delta p(\xi + 0,5) - \left\{\sigma_{3J,J}^{(2)}\right\}_{\xi} = -p_- - \Delta p(\xi + 0,5) + \left\{\left\{\sigma_{IJ,II}^{(1)}\right\}_{\xi}\right\}_{\xi}, \\ \sigma_{33}^{(4)} &= -\left\{\sigma_{3J,J}^{(3)}\right\}_{\xi} = \left\{\left\{\sigma_{IJ,II}^{(2)}\right\}_{\xi}\right\}_{\xi}.\end{aligned}$$

Для вычисления напряжений $\sigma_{I3}^{(1)}$, $\sigma_{I3}^{(2)}$, $\sigma_{I3}^{(3)}$ и $\sigma_{33}^{(1)} \dots \sigma_{33}^{(4)}$ необходимо иметь только напряжения $\sigma_{IJ}^{(0)}$, $\sigma_{IJ}^{(1)}$, $\sigma_{IJ}^{(2)}$. Напряжения $\sigma_{IJ}^{(0)}$ находим по формулам (17). Для вычисления $\sigma_{IJ}^{(1)}$ используем определяющие соотношения в задаче (9) при $n=1$:

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{I333}\varepsilon_{33}^{(1)}. \quad (23)$$

Для того чтобы найти деформацию $\varepsilon_{33}^{(1)}$, используем определяющие соотношения системы (9):

$$\sigma_{33}^{(1)} = C_{33KL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{3333}\varepsilon_{33}^{(1)}. \quad (24)$$

С учетом соотношений (22) имеем $\sigma_{33}^{(1)} = 0$. Тогда, подставив это выражение в (24), получаем

$$\varepsilon_{33}^{(1)} = -C_{3333}^{-1} C_{33KL}\varepsilon_{KL}^{(1)}. \quad (25)$$

Подставив выражение (25) в соотношение (23), запишем

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{(1)}. \quad (26)$$

В формулу (26) входят выражения для деформаций $\varepsilon_{IJ}^{(1)}$, соотношения для которых находим из системы (9):

$$\varepsilon_{IJ}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(1)} + u_{J,I}^{(1)}). \quad (27)$$

Подставив формулу (14) в соотношения (27) и (25), а первую формулу (22) во второе определяющее соотношение задачи (9), получаем выражения для деформаций $\varepsilon_{IJ}^{(1)}$, $\varepsilon_{33}^{(1)}$ и $\varepsilon_{K3}^{(1)}$ через перемещения $u_3^{(0)}$ и $u_I^{(0)}$:

$$\varepsilon_{IJ}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(1)} + u_{J,I}^{(1)}) = -\xi u_{3,IJ}^{(0)}; \quad (28)$$

$$\varepsilon_{33}^{(1)} = -Z_{3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)} = \xi Z_{3KL}u_{3,KL}^{(0)}; \quad (29)$$

$$\varepsilon_{K3}^{(1)} = \frac{1}{2}C_{I3K3}^{-1}\sigma_{I3}^{(1)} = -\frac{1}{2}C_{I3K3}^{-1}\left\{\sigma_{IJ,J}^{(0)}\right\}_{\xi} = -\frac{1}{2}C_{I3K3}^{-1}\left\{C_{IJML}^{(0)}\right\}_{\xi}u_{M,LJ}^{(0)}.$$

Соотношения (26) и (28) определяют напряжения $\sigma_{IJ}^{(1)}$ через перемещения нулевого приближения $u_3^{(0)}$ и $u_I^{(0)}$. Формулы (17) и кинематические соотношения нулевого приближения

$$\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}\right) \quad (30)$$

определяют напряжения $\sigma_{IJ}^{(0)}$ через $u_I^{(0)}$. Тем самым с помощью формул (22) можно вычислить все поперечные напряжения $\sigma_{33}^{(2)}$ и $\sigma_{33}^{(3)}$ до третьего приближения, сдвиговые напряжения $\sigma_{I3}^{(2)}$ до второго приближения. Используя формулы (17) и (26)–(28), если известны перемещения нулевого приближения $u_3^{(0)}$ и $u_I^{(0)}$, можно получить напряжения $\sigma_{IJ}^{(0)}$ и $\sigma_{IJ}^{(1)}$ до первого приближения:

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = -C_{IJKL}^{(0)}\xi u_{3,KL}^{(0)}. \quad (31)$$

Осредненные уравнения равновесия для многослойной пластины. Подставив уравнения (20) в асимптотическое разложение (10) уравнений равновесия пластины, получим

$$\langle \sigma_{IJ,J}^{(0)} \rangle + \kappa \langle \sigma_{IJ,J}^{(1)} \rangle + \kappa^2 \left(\langle \sigma_{IJ,J}^{(2)} \rangle - \Delta p \delta_{I3} \right) + \dots = 0. \quad (32)$$

Домножим асимптотическое разложение уравнений равновесия пластины (1) на $\xi\kappa$ и проинтегрируем их по толщине, в результате запишем вспомогательное уравнение

$$\kappa \left(\langle \xi \sigma_{IJ,J}^{(0)} \rangle - \langle \sigma_{I3}^{(1)} \rangle \right) + \kappa^2 \left(\langle \xi \sigma_{IJ,J}^{(1)} \rangle - \langle \sigma_{I3}^{(2)} \rangle \right) + \dots = 0. \quad (33)$$

Здесь учтено, что $\langle \xi \sigma_{I3/3}^{(1)} \rangle = -\langle \sigma_{I3}^{(1)} \rangle$, $\langle \xi \sigma_{I3/3}^{(2)} \rangle = -\langle \sigma_{I3}^{(2)} \rangle$ в силу граничных условий на $\Sigma_{3\pm}$: $\sigma_{I3}^{(0)} = 0$, $\sigma_{I3}^{(1)} = 0$.

Введем обозначения для усилий T_{IJ} , моментов M_{IJ} и перерезывающих сил Q_I в пластине:

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \langle \sigma_{IJ}^{(0)} \rangle + \kappa \langle \sigma_{IJ}^{(1)} \rangle + \kappa^2 \langle \sigma_{IJ}^{(2)} \rangle + \dots, \\ Q_I &= \kappa \langle \sigma_{I3}^{(1)} \rangle + \kappa^2 \langle \sigma_{I3}^{(2)} \rangle + \dots, \\ M_{IJ} &= \kappa \langle \xi \sigma_{IJ}^{(0)} \rangle + \kappa^2 \langle \xi \sigma_{IJ}^{(1)} \rangle + \kappa^3 \langle \xi \sigma_{IJ}^{(2)} \rangle + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Тогда уравнения (29) и (33) можно записать в виде уравнений равновесия и уравнений моментов, традиционном для теории пластин:

$$T_{IJ,J} = 0, \quad Q_{J,J} = \Delta \bar{p}, \quad M_{IJ,J} - Q_I = 0, \quad (35)$$

где $\Delta \bar{p} = \kappa^2 \Delta p$.

Это и есть искомые осредненные уравнения установившихся колебаний многослойной пластины.

Перемещения второго и третьего приближений. До этого этапа алгоритм вычислений в точности совпадал с алгоритмом для асимптотической теории пластин типа Кирхгофа — Лява [16, 19]. Для нахождения перемещений $u_3^{(0)}$ и $u_I^{(0)}$ в этой теории используются осредненные уравнения равновесия (35).

Используя кинематическое соотношение системы (9) при $n = 1$

$$\varepsilon_{33}^{(1)} = u_{3/3}^{(2)}, \quad (36)$$

находим перемещение

$$u_3^{(2)} = \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle_{\xi} = \langle \xi Z_{3KL} \rangle_{\xi} u_{3,KL}^{(0)}. \quad (37)$$

Для повышения точности теории дополнительно рассмотрим перемещения не только нулевого и первого, но и второго приближения $u_I^{(2)}$, и третьего приближения $u_3^{(3)}$. Если повторить алгоритм их вычисления по аналогии с первым приближением с помощью решения локальных задач (9), то получим снова вариант теории пластин Кирхгофа — Лява, так как $u_k^{(2)}$ будут вновь выражены через $u_3^{(0)}$ и $u_I^{(0)}$. По этой причине поступим иначе: положим, что перемещения $u_I^{(2)}$ имеют линейную зависимость от координаты ξ , аналогичную $u_I^{(1)}$ (14), а перемещение $u_3^{(3)}$ — аналогичную $u_3^{(2)}$ (37):

$$u_I^{(2)} = \xi \gamma_I^{(2)}, \quad u_3^{(3)} = \langle \xi Z_{3KL} \rangle_{\xi} \gamma_{K,L}^{(2)}. \quad (38)$$

Здесь $\gamma_I^{(2)}(x_J)$ — некоторые новые неизвестные функции глобальных координат.

Тогда, подставляя выражения (38) в соотношения (5), находим деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{IJ}^{(2)} &= \frac{1}{2} (u_{I,J}^{(2)} + u_{J,I}^{(2)}) = \xi \frac{1}{2} (\gamma_{I,J}^{(2)} + \gamma_{J,I}^{(2)}), \\ \varepsilon_{33}^{(2)} &= u_{3/3}^{(3)} = \langle \xi Z_{3KL} \rangle_{\xi} \gamma_{K,L}^{(2)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{I3}^{(1)} &= \frac{1}{2} (u_{3,I}^{(1)} + u_{I/3}^{(2)}) = \frac{1}{2} (U_{3KL} \varepsilon_{KL,I}^{(0)} + \gamma_I^{(2)}). \end{aligned} \quad (39)$$

Сдвиговые деформации $\varepsilon_{I3}^{(1)}$ были вычислены ранее по формуле (30) с помощью перемещений нулевого приближения, поэтому для сдвиговых деформаций, вычисляемых с помощью перемещений второго приближения, будем использовать специальное обозначение — $\tilde{\varepsilon}_{I3}^{(1)}$.

Осредненные уравнения для пластины. Подставив формулы (39) в определяющие соотношения системы (9), находим напряжения второго приближения

$$\sigma_{IJ}^{(2)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(2)} + C_{I333}\varepsilon_{33}^{(2)} = \xi C_{IJKL}^{(0)}\gamma_{K,L}^{(2)}, \quad (40)$$

а также касательные напряжения первого порядка

$$\tilde{\sigma}_{I3}^{(1)} = 2C_{I3M3}\tilde{\varepsilon}_{M3}^{(1)} = C_{I3M3}\left(U_{3KL}\varepsilon_{KL,M}^{(0)} + \gamma_M^{(2)}\right). \quad (41)$$

Касательные напряжения $\tilde{\sigma}_{I3}^{(1)}$ вычислены ранее по формулам (22) с помощью перемещений нулевого приближения, поэтому для касательных напряжений, вычисляемых с помощью перемещений второго приближения, по аналогии со сдвиговыми деформациями, будем использовать специальное обозначение — $\tilde{\sigma}_{I3}^{(1)}$.

Подставив выражения (17), (40) и (26), (28) в соотношения (34) для усилий и моментов, находим

$$T_{IJ} = \kappa \langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle \varepsilon_{KL}^{(0)} + \kappa \langle \xi C_{IJKL}^{(0)} \rangle \left(-u_{3,IJ}^{(0)} + \kappa \gamma_{I,J}^{(2)}\right), \quad (42)$$

$$M_{IJ} = \kappa \langle \xi C_{IJKL}^{(0)} \rangle \varepsilon_{KL}^{(0)} + \kappa^2 \langle \xi^2 C_{IJKL}^{(0)} \rangle \left(-u_{3,IJ}^{(0)} + \kappa \gamma_{I,J}^{(2)}\right).$$

При подстановке выражений (41) в соотношения (34) получим выражение для перерезывающих сил

$$Q_I = \kappa \langle C_{I3M3} \rangle \gamma_M^{(2)} + \kappa \langle C_{I3M3} U_{3KL} \rangle \varepsilon_{KL,M}^{(0)}. \quad (43)$$

Введем следующие обозначения для мембранных, смешанных, изгибных, а также сдвиговых жесткостей пластины:

$$\bar{C}_{IJKL} = \langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle, \quad B_{IJKL} = \kappa \langle \xi C_{IJKL}^{(0)} \rangle, \quad D_{IJKL} = \kappa^2 \langle \xi^2 C_{IJKL}^{(0)} \rangle, \quad (44)$$

$$G_{IM} = \langle C_{I3M3} \rangle, \quad R_{IMKL} = \kappa \langle C_{I3M3} U_{3KL} \rangle.$$

Введем углы поворота нормали к срединной поверхности пластины:

$$\gamma_I = -u_{3,I}^{(0)} + \kappa \gamma_I^{(2)}. \quad (45)$$

Тогда

$$\kappa \gamma_I^{(2)} = \gamma_I + u_{3,I}^{(0)}. \quad (46)$$

Введем искривления срединной поверхности пластины

$$2\eta_{IJ} = \gamma_{I,J} + \gamma_{J,I}, \quad 2\eta_{3I} = \gamma_I + u_{3,I}^{(0)}, \quad (47)$$

и определяющие соотношения (42) примут вид:

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \bar{C}_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL}\eta_{KL}, \\ M_{IJ} &= B_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL}\eta_{KL}, \\ Q_I &= 2G_{IM}\eta_{3M} + R_{IMKL}\varepsilon_{KL,M}^{(0)}. \end{aligned} \quad (48)$$

Уравнения (35), (48), а также (47) и (30) образуют систему из пяти уравнений относительно пяти неизвестных: $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$, γ_I . Эта система в точности совпадает с классической системой уравнений пластин Тимошенко за исключением члена $R_{IMKL}\varepsilon_{KL,M}^{(0)}$ в выражении для перерезывающей силы.

После решения этой системы напряжения в слоях пластины вычисляются по формулам (22). С практической точки зрения для достижения приемлемой инженерной точности вычислений для напряжений σ_{IJ} достаточно ограничиться только нулевым, первым и вторым приближениями $\sigma_{IJ}^{(0)}$, $\sigma_{IJ}^{(1)}$, $\sigma_{IJ}^{(2)}$. Для сдвиговых напряжений σ_{I3} минимально необходимым является третье приближение (т. е. необходимо учесть члены $\sigma_{I3}^{(1)}$, $\sigma_{I3}^{(2)}$ и $\sigma_{I3}^{(3)}$), а для поперечных напряжений σ_{33} — четвертое приближение (т. е. требуется удержать члены $\sigma_{33}^{(1)}$, $\sigma_{33}^{(2)}$, $\sigma_{33}^{(3)}$ и $\sigma_{33}^{(4)}$). Тогда с учетом выражений (17), (22), (31) и (40) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ} &= \sigma_{IJ}^{(0)} + \kappa\sigma_{IJ}^{(1)} + \kappa^2\sigma_{IJ}^{(2)} = C_{IJKL}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{(0)} - \kappa C_{IJKL}^{(0)}\xi u_{3,KL}^{(0)} + \kappa^2\xi C_{IJKL}^{(0)}\gamma_{K,L}^{(2)}, \\ \sigma_{I3} &= \sigma_{I3}^{(0)} + \kappa\sigma_{I3}^{(1)} + \kappa^2\sigma_{I3}^{(2)} + \kappa^3\sigma_{I3}^{(3)} = \\ &= -\kappa\left\{\sigma_{IJ,J}^{(0)}\right\}_{\xi} - \kappa^2\left\{\sigma_{IJ,J}^{(1)}\right\}_{\xi} - \kappa^3\left\{\sigma_{IJ,J}^{(2)}\right\}_{\xi} = \\ &= -\kappa\left\{C_{IJKL}^{(0)}\right\}_{\xi}\varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \kappa^2\left\{\xi C_{IJKL}^{(0)}\right\}_{\xi}u_{3,KLJ}^{(0)} - \kappa^3\left\{\xi C_{IJKL}^{(0)}\right\}_{\xi}\gamma_{K,LJ}^{(2)}, \\ \sigma_{33} &= \sigma_{33}^{(0)} + \kappa\sigma_{33}^{(1)} + \kappa^2\sigma_{33}^{(2)} + \kappa^3\sigma_{33}^{(3)} + \kappa^4\sigma_{33}^{(4)} = \\ &= \kappa^2\left\{\left\{C_{IJKL}^{(0)}\right\}_{\xi}\right\}_{\xi}\varepsilon_{KL,IJ}^{(0)} - \kappa^3(p_- + \Delta p(\xi + 0,5)) - \\ &\quad - \kappa^3\left\{\left\{\xi C_{IJKL}^{(0)}\right\}_{\xi}\right\}_{\xi}u_{3,KLIJ}^{(0)} + \kappa^4\left\{\left\{\xi C_{IJKL}^{(0)}\right\}_{\xi}\right\}_{\xi}\gamma_{K,LIJ}^{(2)}. \end{aligned} \quad (49)$$

С учетом обозначений (45) для углов поворота нормали записываем эти формулы в окончательном виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{IJ} &= C_{IJKL}^{(0)} \left(\varepsilon_{KL}^{(0)} + \kappa \xi \gamma_{K,L} \right), \\ \sigma_{I3} &= -\kappa \left\{ C_{IJKL}^{(0)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \kappa^2 \left\{ \xi C_{IJKL}^{(0)} \right\}_{\xi} \gamma_{K,LJ}, \\ \sigma_{33} &= \kappa^2 \left\{ \left\{ C_{IJKL}^{(0)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL,IJ}^{(0)} - \kappa^3 (p_- + \Delta p(\xi + 0, 5)) + \kappa^3 \left\{ \left\{ \xi C_{IJKL}^{(0)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \gamma_{K,LJI}.\end{aligned}\quad (50)$$

Деформации срединной поверхности и углы поворота нормали, входящие в эти формулы, вычисляются с помощью решения осредненных уравнений (30), (35), (47), (48).

Изгиб многослойной пластины. Рассмотрим классическую задачу об изгибе многослойной пластины прямоугольной формы под действием равномерно распределенного постоянного давления $\Delta \bar{p}$. Слои пластины из ортотропных материалов. В качестве граничных условий выберем условия жесткого закрепления краев пластины

$$\begin{aligned}u_1^{(0)}|_{x_1=0} = u_1^{(0)}|_{x_1=1} = 0, \quad u_2^{(0)}|_{\Gamma} = 0, \quad u_3^{(0)}|_{x_1=0} = u_3^{(0)}|_{x_1=1} = 0, \\ \gamma_1|_{x_1=0} = \gamma_1|_{x_1=1} = 0, \quad \gamma_2|_{\Gamma} = 0.\end{aligned}\quad (51)$$

Здесь x_1 — безразмерная продольная координата пластины; Γ — контур, ограничивающий срединную плоскую поверхность пластины. Решение системы уравнений (35), (45)–(48) с граничными условиями (51) будем искать в виде

$$\begin{aligned}u_1^{(0)} = u_1^{(0)}(x), \quad u_3^{(0)} = u_3^{(0)}(x), \quad \gamma_1 = \gamma_1(x), \\ u_2^{(0)} = 0, \quad \gamma_2 = 0.\end{aligned}\quad (52)$$

С учетом ортотропности материалов слоев пластины тождественно ненулевые уравнения указанной системы принимают вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{C}_{1111} u_{1,11}^{(0)} + B_{1111} \gamma_{1,11} &= 0; \\ B_{1111} u_{1,11}^{(0)} + D_{1111} \gamma_{1,11} &= G_{11} (\gamma_1 + u_{3,1}^{(0)}) + R_{1111} u_{1,11}^{(0)}; \\ G_{11} (\gamma_{1,1} + u_{3,11}^{(0)}) + R_{1111} u_{1,111}^{(0)} &= \Delta \bar{p}; \\ u_1^{(0)}|_{x_1=0} = u_1^{(0)}|_{x_1=1} &= 0; \\ u_3^{(0)}|_{x_1=0} = u_3^{(0)}|_{x_1=1} &= 0; \\ \gamma_1|_{x_1=0} = \gamma_1|_{x_1=1} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (53)$$

Решение данной системы может быть получено в аналитической форме

$$\begin{aligned} u_1^{(0)}(x_1) &= A_1 x_1 (x_1^2 - 1) + A_2 x_1 (x_1 - 1), \\ \gamma_1(x_1) &= 4B_1 x_1 (1 - x_1) \left(x_1 - \frac{1}{2} \right), \\ u_3^{(0)}(x_1) &= B_1 x_1^2 (x_1 - 1)^2 + B_2 x_1 (1 - x_1). \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{\Delta \bar{p} \bar{C}_{1111}}{24(D_{1111} \bar{C}_{1111} - B_{1111}^2)}; \quad B_2 = -\frac{\Delta \bar{p}}{2G_{11}} \left(1 + \frac{B_{1111} R_{1111}}{D_{1111} \bar{C}_{1111} - B_{1111}^2} \right); \\ A_1 &= -\frac{\Delta \bar{p} B_{1111}}{6(D_{1111} \bar{C}_{1111} - B_{1111}^2)}; \quad A_2 = \frac{\Delta \bar{p} B_{1111}}{4(D_{1111} \bar{C}_{1111} - B_{1111}^2)}. \end{aligned} \quad (55)$$

Решения (54) для прогиба $u_3^{(0)}$ отличаются от аналогичного решения, полученного с применением асимптотической теории пластин типа Кирхгофа — Лява [19]:

$$u_{3[KL]}^{(0)}(x_1) = B_1 x_1^2 (x_1 - 1)^2. \quad (56)$$

Отличие решений заключается в наличии в выражении (55) члена $B_2 x_1 (1 - x_1)$, имеющего, согласно соотношениям (44), второй порядок малости $B_2 = O(\kappa^2)$. Только этот член в решении (54) зависит от сдвиговых свойств пластины, поэтому лишь прогиб $u_3^{(0)}$ пластины зависит от модуля сдвига $G_{11} = \langle C_{1313} \rangle$ и лишь прогиб различается в асимптотической теории типа Тимошенко и Кирхгофа — Лява.

Выражения (54) для продольной компоненты $u_1^{(0)}$ и выражения для всех компонент напряжений совпадают для обеих теорий в данной задаче.

Результаты численных расчетов. Проведены сравнительные расчеты перемещений и напряжений в пластине с помощью асимптотических теорий типа Тимошенко и Кирхгофа — Лява, а также трехмерным конечно-элементным решением задачи. Для последнего было использовано программное обеспечение собственной разработки Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана [29, 30] и программный комплекс ANSYS.

Численные расчеты были проведены для двух трехслойных композитных пластин: «длинной», для которой малый параметр был выбран равным $\kappa = 0,025$ и «короткой», для которой $\kappa = 0,07$. Толщина h и ширина b были выбраны равными 21 мм. Толщины слоев были выбраны соответствующими сетке $A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{42} & \frac{3}{14} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ по нормальной координате ξ .

Свойства материалов слоев пластин представлены в таблице. Слой № 1 соответствует отрезку $\xi \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{42}\right]$. Давления \tilde{p}_\pm на верхней и нижней поверхностях пластины были выбраны следующими: $\tilde{p}_+ = 10^{-3}$ ГПа, $\tilde{p}_- = 10^{-4}$ ГПа для «короткой» пластины и $\tilde{p}_+ = 10^{-4}$ ГПа, $\tilde{p}_- = 10^{-5}$ ГПа — для «длинной».

Свойства материалов слоев пластин

№ слоя	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	E_3 , ГПа	G_{12} , ГПа	G_{13} , ГПа	G_{23} , ГПа	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
1	14	14	5,3	1,8	0,75	0,75	0,08	0,14	0,15
2	7	7	2,7	0,9	0,38	0,38	0,40	0,07	0,08
3	21	21	8	2,7	1,13	1,13	0,12	0,21	0,23

Решение трехмерной задачи осуществлено в комплексе конечно-элементного моделирования ANSYS с применением 10-узлового тетраэдрального конечного элемента.

На рис. 1–10 отражены полученные результаты расчетов. Относительные отклонения δ вычислены в метрике Чебышева. Отклонение по прогибу u_3 для «коротких» пластин (см. рис. 1) между трехмерным решением и решением по асимптотическим теориям пластин типа Кирхгофа — Лява составляет $\delta = 66,49\%$, типа Тимошенко — $\delta = 16,45\%$. Отклонение по прогибу u_3 для «длинных» пластин (см. рис. 2) между трехмерным решением и решением по асимптотическим теориям пластин типа Кирхгофа — Лява составляет $\delta = 14,22\%$, типа Тимошенко — $\delta = 8,29\%$.

Отклонение по продольным перемещениям u_1 для «коротких» пластин (см. рис. 3) между трехмерным решением и решением по теориям пластин составляет $\delta = 98,44\%$. Отклонение по продольным перемещениям u_1 для «длинных» пластин (см. рис. 4) между трехмерным решением и решением по теориям пластин составляет $\delta = 14,25\%$.

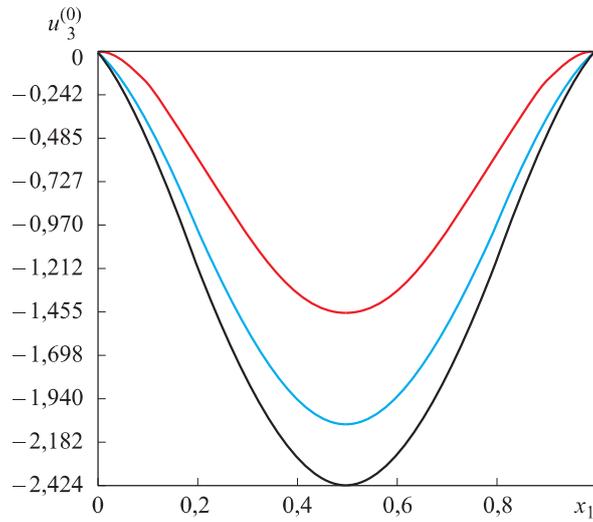


Рис. 1. Распределение прогиба $u_3^{(0)}$ (мм) для «короткой» ($\kappa = 0,07$) пластины, полученное при расчете по асимптотическим теориям типа Тимошенко (—), Кирхгофа — Лява (—) и трехмерной теории (—)

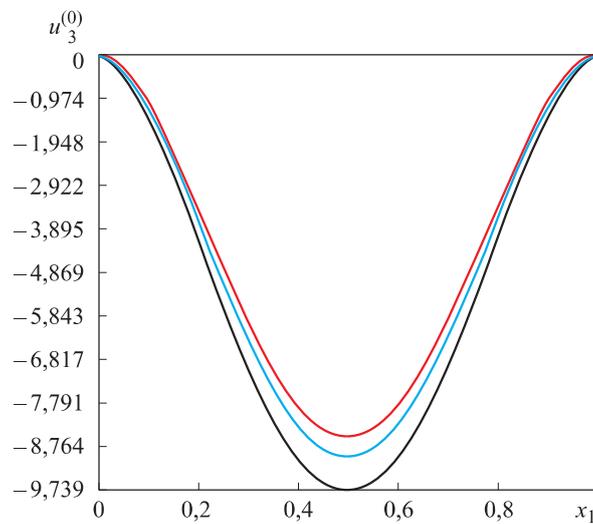


Рис. 2. Распределение прогиба $u_3^{(0)}$ (мм) для «длинной» ($\kappa = 0,025$) пластины, полученное при расчете по асимптотическим теориям типа Тимошенко (—), Кирхгофа — Лява (—) и трехмерной теории (—)

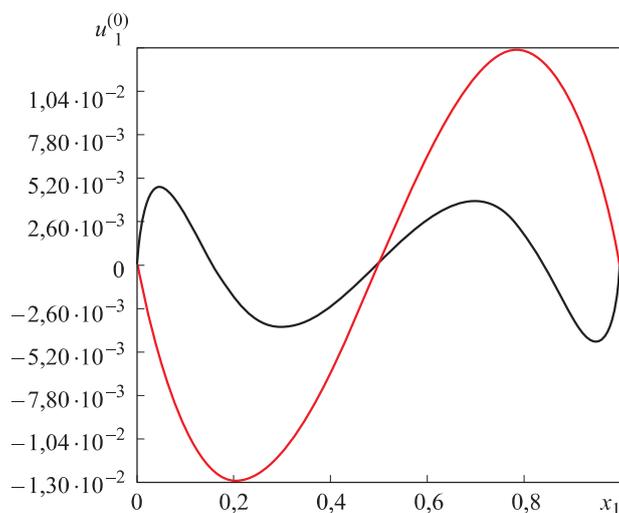


Рис. 3. Распределение продольного перемещения $u_1^{(0)}$ (мм) для «короткой» ($\kappa = 0,07$) пластины на срединной поверхности, полученное при расчете по асимптотическим теориям типа Тимошенко и Кирхгофа — Лява (—) и трехмерной теории (—)

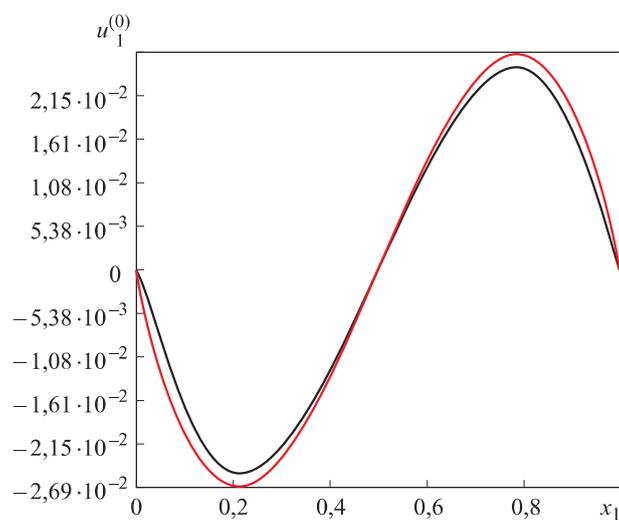


Рис. 4. Распределение продольного перемещения u_1 (мм) для «длинной» ($\kappa = 0,025$) пластины на срединной поверхности, полученное при расчете по асимптотическим теориям типа Тимошенко и Кирхгофа — Лява (—) и трехмерной теории (—)

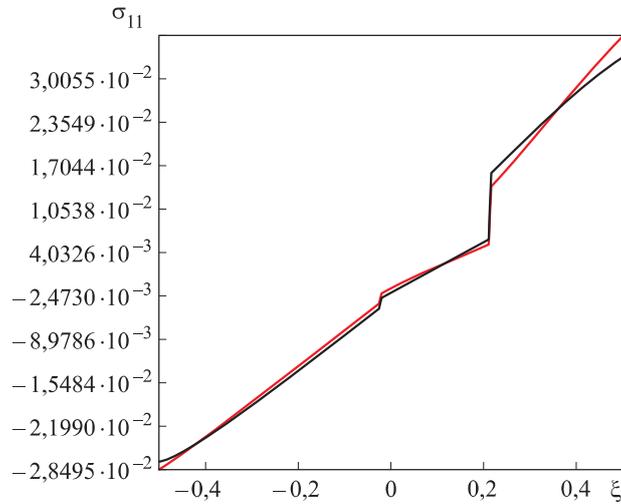


Рис. 5. Распределение напряжений σ_{11} (ГПа) по толщине в сечении $x_1 = 0,25$ для «короткой» ($\kappa = 0,07$) пластины, полученное при расчете по асимптотическим теориям типа Тимошенко, Кирхгофа — Лява (—) и трехмерной теории (—)

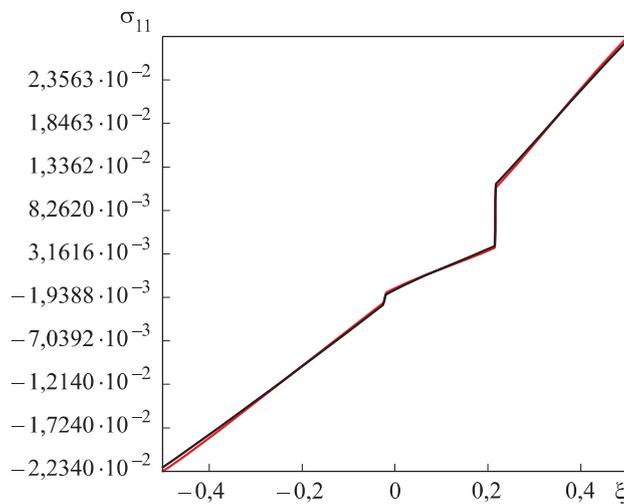


Рис. 6. Распределение напряжений σ_{11} (ГПа) по толщине в сечении $x_1 = 0,25$ для «длинной» ($\kappa = 0,025$) пластины, полученное при расчете по асимптотическим теориям типа Тимошенко, Кирхгофа — Лява (—) и трехмерной теории (—)

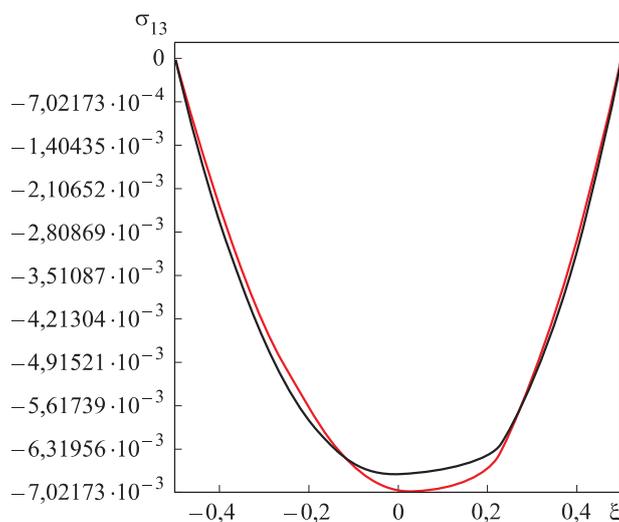


Рис. 7. Распределение напряжений σ_{13} (ГПа) по толщине в сечении $x_1 = 0,25$ для «короткой» ($\kappa = 0,07$) пластины, полученное при расчете по асимптотическим теориям типа Тимошенко, Кирхгофа — Лява (—) и трехмерной теории (—)

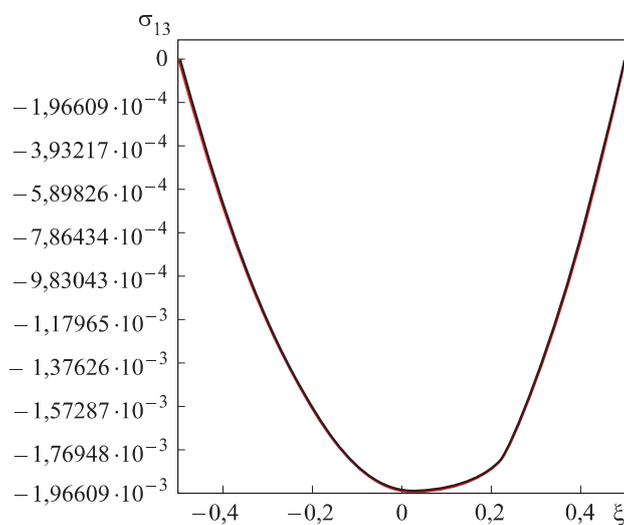


Рис. 8. Распределение напряжений σ_{13} (ГПа) по толщине в сечении $x_1 = 0,25$ для «длинной» ($\kappa = 0,025$) пластины, полученное при расчете по асимптотическим теориям типа Тимошенко, Кирхгофа — Лява (—) и трехмерной теории (—)

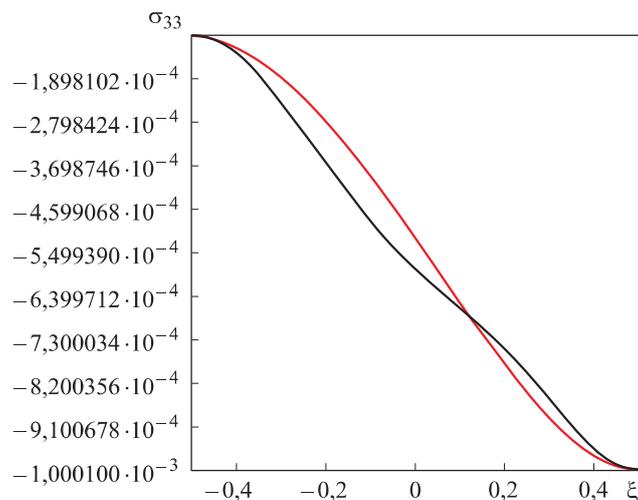


Рис. 9. Распределение напряжений σ_{33} (ГПа) по толщине в сечении $x_1 = 0,25$ для «короткой» ($\kappa = 0,07$) пластины, полученное при расчете по асимптотическим теориям типа Тимошенко, Кирхгофа — Лява (—) и трехмерной теории (—)

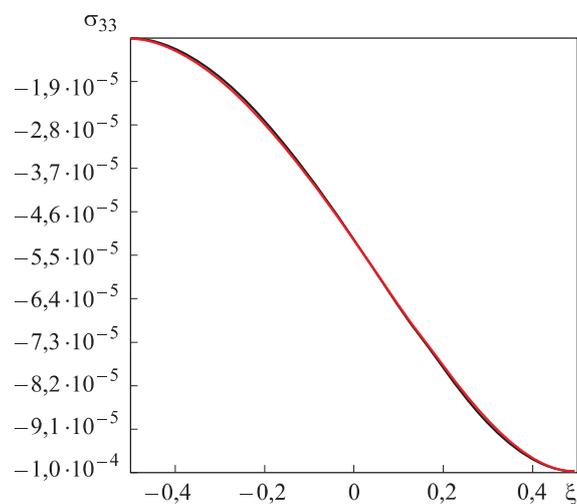


Рис. 10. Распределение напряжений σ_{33} (ГПа) по толщине в сечении $x_1 = 0,25$ для «длинной» ($\kappa = 0,025$) пластины, полученное при расчете по асимптотическим теориям типа Тимошенко, Кирхгофа — Лява (—) и трехмерной теории (—)

Отклонение по напряжениям σ_{11} для «коротких» пластин (см. рис. 5) между трехмерным решением и решением по теориям пластин составляет $\delta = 8,43\%$. Отклонение по напряжениям σ_{11} для «длинных» пластин (см. рис. 6) между трехмерным решением и решением по теориям пластин составляет $\delta = 1,37\%$.

Отклонение по напряжениям σ_{13} для «коротких» пластин (см. рис. 7) между трехмерным решением и решением по теориям пластин составляет $\delta = 4,36\%$. Отклонение по напряжениям σ_{13} для «длинных» пластин (см. рис. 8) между трехмерным решением и решением по теориям пластин составляет $\delta = 0,05\%$.

Отклонение по напряжениям σ_{33} для «коротких» пластин (см. рис. 9) между трехмерным решением и решением по теориям пластин составляет $\delta = 9,14\%$. Отклонение по напряжениям σ_{33} для «длинных» пластин (см. рис. 10) между трехмерным решением и решением по теориям пластин составляет $\delta = 0,32\%$.

Заключение. Разработана асимптотическая теория тонких многослойных пластин типа Тимошенко с учетом конечной сдвиговой жесткости слоев, построенная с помощью асимптотических разложений общих трехмерных уравнений теории упругости по малому геометрическому параметру.

Показано, что уравнения теории пластин типа Тимошенко можно получить при учете дополнительных членов более высокого порядка в асимптотических разложениях в отличие от случая, когда учитываются только главные члены, который приводит к уравнениям теории пластин типа Кирхгофа — Лява.

В отличие от классической теории пластин Тимошенко асимптотическая теория типа Тимошенко позволяет с высокой точностью вычислять все шесть компонент тензора напряжений в многослойной пластине, для которых получены аналитические формулы.

С помощью разработанного метода проведено численное моделирование напряжений и перемещений в многослойной пластине при изгибе равномерным давлением. Численные расчеты показали, что разработанная асимптотическая теория типа Тимошенко позволяет получить примерно одинаковую высокую точность расчета изгибных, сдвиговых и поперечных напряжений в сравнении с трехмерным конечно-элементным решением, полученным для очень мелких сеток, и асимптотической теорией типа Кирхгофа — Лява.

Для прогиба теория типа Тимошенко дает лучший результат, чем теория типа Кирхгофа — Лява, особенно для относительно «коротких» пластин. Для продольного перемещения теория типа Тимошенко дает хороший результат только для «длинных» пластин.

Разработанная асимптотическая теория может быть использована для уточненного расчета перемещений и напряжений в многослойных пластинах без применения 3D конечно-элементных методов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Scott Burton W., Noor A.K. Assessment of computational models for sandwich panels and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, vol. 124, iss. 1–2, pp. 125–151.
- [2] D’Ottavio M., Dozio L., Vescovini R., Polit O. Bending analysis of composite laminated and sandwich structures using sublaminated variable-kinematic Ritz models. *Composite Structures*, 2016, vol. 155, pp. 45–62.
- [3] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1988, № 4, с. 698–704.
- [4] Ghugal Y.M., Shmipi R.P. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2001, vol. 20, no. 3, pp. 255–272.
- [5] Tornabene F. Free vibrations of laminated composite doubly-curved shells and panels of revolution via the GDQ method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, vol. 200, pp. 931–952.
- [6] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984, 264 с.
- [7] Белкин А.Е., Гаврюшин С.С. *Расчет пластин методом конечного элемента*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 232 с.
- [8] Зверьяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, вып. 2, с. 308–321.
- [9] Dimitrienko Yu.I. A structural thermomechanical model of textile composite materials at high temperatures. *Composite science and technologies*, 1999, vol. 59, pp. 1041–1053.
- [10] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71–79.
- [11] Назаров С.А., Свирс Г.Х., Слущкий А.С. Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней. *Математический сборник*, 2011, т. 202, № 8, с. 41–80.
- [12] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333–350.
- [13] Панасенко Г.П., Резцов М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине. *Доклады Академии наук СССР*, 1987, т. 294, № 5, с. 1061–1065.
- [14] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore, London, World Scientific Publishing, 2000, 738 p.
- [15] Kolpakov A.G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2004, 228 p.
- [16] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–100.
- [17] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой

- рой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.
- [18] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7 (19). DOI 10.18698/2308-6033-2013-7-899
- [19] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Сравнительный анализ напряжений в несимметричных многослойных композитных пластинах на основе асимптотической теории и трехмерного конечно-элементного расчета. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, № 10. DOI 10.18698/2308-6033-2017-10-1693.
- [20] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Modeling of thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogenization method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2017, vol. 15, iss. 3, pp. 219–237.
- [21] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Многомасштабное моделирование многослойных тонких композитных пластин с уединенными дефектами. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4, с. 47–66.
- [22] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Расчет полного тензора напряжений в тонких моноклинных композитных оболочках на основе метода асимптотической гомогенизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 12 (60). DOI 10.18698/2308-6033-2016-12-1557
- [23] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Asymptotic theory for vibrations of composite plates. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no. 60, pp. 2993–3002.
- [24] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2, с. 3–23.
- [25] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 272 с.
- [26] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.
- [27] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear continuum mechanics and large inelastic deformations*. Dordrecht, Heidelberg, London, New York, Springer, 2002, 721 p.
- [28] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ*. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.
- [29] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния горных пород с учетом ползучести. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3, с. 101–118.
- [30] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.Д., Сборщиков С.В. Моделирование вязкоупругих характеристик пенопластов на основе многомасштабного конечно-элементного анализа. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, № 11 (59), DOI 10.18698/2308-6033-2016-11-1555

Статья поступила в редакцию 31.01.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 1, с....

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Юрин Юрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Timoshenko-type asymptotic theory for thin multi-layered plates shells

© Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The paper presents a new modification of asymptotic theory describing thin multi-layered shells with finite shear rigidity. It is based on asymptotic analysis of general three-dimensional equations from the elasticity theory for multi-layered bodies. This modification allows us to derive averaged equations from a Timoshenko-type plate theory. We identified the small geometrical parameter and used it to carry out our asymptotic analysis. We stated local elasticity theory problems which may be solved analytically. We show that when only the dominant terms of asymptotic expansions are taken into account, an asymptotic theory will result in the averaged plate equations of the Kirchhoff — Love type. When taking into account those terms that follow the dominant ones in asymptotic series in a self-similar way as compared to the previous approximation, an asymptotic theory will lead to Timoshenko-type averaged equations. At the same time, theoretical accuracy of the resulting truncated asymptotic solution is as high as that of the solution according to a Kirchhoff — Love type theory. The asymptotic theory modification that we developed makes it possible to use explicit analytical expressions to compute all six stress tensor components for a multi-layered plate with a high degree of accuracy. We used our method to perform a numerical simulation of stresses and displacements in a multi-layered plate subjected to uniform pressure that causes the plate to bend. Numerical computations show that our Timoshenko-type asymptotic theory provides a similarly high accuracy of computing flexural, shear and lateral stresses as compared to a three-dimensional finite element solution over a very fine mesh and a Kirchhoff — Love-type asymptotic theory. A Timoshenko-type theory will provide a better result for computing buckling than a Kirchhoff — Love-type theory, especially for relatively short plates. When the displacement is longitudinal, a Timoshenko-type theory will only provide a good result for elongated plates.

Keywords: *thin multi-layered shells, asymptotic theory, asymptotic expansions, Timoshenko-type theory, Kirchhoff — Love-type theory*

REFERENCES

- [1] Scott Burton W., Noor A.K. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, vol. 124, no. 1–2, pp. 125–151.
- [2] D’Ottavio M., Dozio L., Vescovini R., Polit O. *Composite Structures*, 2016, vol. 155, pp. 45–62.

- [3] Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. *Mekhanika kompozitnykh materialov — Mechanics of Composite Materials*, 1988, no. 4, pp. 698–704.
- [4] Ghugal Y.M., Shmipi R.P. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2001, vol. 20, no. 3, pp. 255–272.
- [5] Tornabene F. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, vol. 200, pp. 931–952.
- [6] Alfutov N.A., Zinovev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogosloynnykh plastin i obo-lochek iz kompozitsionnykh materialov* [Computing parameters of multi-layered composite plates and shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 264 p.
- [7] Belkin A.E., Gavryushin S.S. *Raschet plastin metodom konechnogo elementa* [Using finite element methods to compute plate parameters]. Moscow, BMSTU Publ., 2008, 232 p.
- [8] Zveryaev E.M., Makarov G.I. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 308–321.
- [9] Dimitrienko Yu.I. *Composite science and technologies*, 1999, vol. 59, pp. 1041–1053.
- [10] Sheshenin S.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 2006, no. 6, pp. 71–79.
- [11] Nazarov S.A., Svirs G.Kh., Slutskiy A.S. *Matematicheskii sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2011, vol. 202, no. 8, pp. 41–80.
- [12] Kohn R.V., Vogelius M. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333–350.
- [13] Panasenko G.P., Reztsov M.V. *Doklady Akademii nauk SSSR — Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1987, vol. 294, no. 5, pp. 1061–1065.
- [14] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore, London, World Scientific Publishing, 2000, 738 p.
- [15] Kolpakov A.G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2004, 228 p.
- [16] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2012, no. 3, pp. 86–100.
- [17] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.
- [18] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 7 (19).
DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-899
- [19] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2017, no. 10.
DOI: 10.18698/2308-6033-2017-10-1693.
- [20] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2017, vol. 15, no. 3, pp. 219–237.
- [21] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no.4, pp. 47–66.
- [22] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2016, no. 12 (60).
DOI: 10.18698/2308-6033-2016-12-1557
- [23] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no. 60, pp. 2993–3002.

- [24] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2, pp. 3–23.
- [25] Vasilev V.V. *Mekhanika konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite material structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 272 p.
- [26] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. In 4 vols. Vol. 4. *Osnovy mekhaniki tverdykh sred* [Foundations of mechanics of solid media]. BMSTU Publ., 2013, 624 p.
- [27] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear continuum mechanics and large inelastic deformations*. Dordrecht, Heidelberg, London, New York, Springer, 2002, 721 p.
- [28] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Tenzorny analiz*. [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Tensor calculus]. BMSTU Publ., 2011, 463 p.
- [29] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 3, pp. 101–118.
- [30] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborshchikov S.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2016, no. 11 (59). DOI: 10.18698/2308-6033-2016-11-1555

Dimitrienko Yu.I., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University; Director, Scientific and Educational Centre for Supercomputer-based Engineering Simulation and Software Development, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com

Yurin Yu.V., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University; Senior Research Fellow, Scientific and Educational Centre for Supercomputer-based Engineering Simulation and Software Development, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: yvyurin@yandex.ru