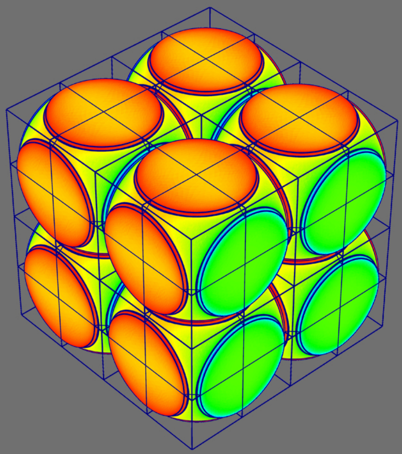
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

УДК 550.344 DOI 10.18698/2309-3684-2018-0-000

Математическое моделирование одномерного нелинейного движения в насыщенной жидкостью пористой среде

© А.Э. Холмуродов, Н. Дильмурадов

Каршинский государственный университет, Карши, 180001, Узбекистан

Рассмотрена математическая модель распространения одномерных нелинейных волн в насыщенных жидкостью пористых средах, где имеет место диссипация энергии, обусловленная межкомпонентным трением. Доказана теорема существования и единственности классического решения динамической задачи поро-упругости. Представлена разностная схема для решения этой задачи. Приведены результаты численного моделирования распространения сейсмических волн для пробной модели среды.

Ключевые слова: *нелинейное одномерное движение, упругопористая среда, диссипация энергии, двухскоростной континуум, численный алгоритм, вычислительный эксперимент*

Введение. В средах с твердыми и жидкими компонентами последние перемещаются по-разному, т. е. присутствует относительное движение. В связи с этим возникает необходимость в рассмотрении механики и термодинамики неоднородной (гетерогенной) среды [1–7]. В ряде работ рассматриваются математические модели распространения сейсмических волн в насыщенных жидкостью пористых средах на основе линейных моделей типа Френкеля — Био [1, 2]. В статье [3] представлен вывод гидродинамических уравнений для классических сред. В работе [4] дан вывод уравнений гидродинамической модели с двумя жидкостями двухфазных носителей, представлен подробный анализ проблем, связанных с математическими свойствами получающихся систем уравнений.

В отличие от рассмотренных ранее линейных моделей в настоящей работе исследуемая модель движения многофазной среды основана на законах сохранения, последовательном определении сил и потоков, разработанных Л.Д. Ландау при описании гидродинамики с двумя скоростями сверхтекучего гелия [8]. При использовании этого подхода достаточно выполнять только общие физические принципы — законы сохранения и принцип относительности Галилея. В данной статье сформулирована математическая модель одномерного нелинейного движения рассматриваемой среды. Доказана теорема существования и единственности поставленной задачи. Приведено численное решение одной модельной задачи.

Математическая модель. Пусть сквозь поры упругодеформируемого тела (с парциальной плотностью $\rho_s = \mathrm{const}$) движется жидкость (с парциальной плотностью $\rho_l = \text{const}$). Изменением температуры пренебрегаем. Рассмотрим одномерное движение вдоль оси x. Через σ обозначим напряжение упругодеформируемого тела. Предположим, что модуль сдвига упругодеформируемого $\mu = \mu(u_x)$ и коэффициент трения между фазами $\chi = \chi(u - v)$. Тогда систему одномерных уравнений пороупругости [9] можно записать в виде

$$\begin{cases} \rho_s u_t = \sigma_x - \rho_l^2 \left(u - v\right)\chi(u - v); \\ \sigma_t = \mu(u_x) u_x; \\ \rho_l v_t = \rho_l^2 \left(u - v\right)\chi(u - v), \end{cases}$$

где u, v — скорости эластичного пористого тела и жидкости с плотностью $\rho_s = \rho_s^f(1 - d_0)$ и $\rho_l = \rho_l^f d_0$ соответственно; ρ_s^f, ρ_l^f — физическая плотность эластичного пористого тела и жидкости соответственно; d_0 — пористость; $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Постановка одномерной нелинейной прямой задачи пороупругости. Тензор напряжений из упомянутой системы удобно исключить. Рассмотрим следующую одномерную начально-краевую задачу для нелинейной системы уравнений и пороупругости относительно скоростей u и v:

$$\rho_s u_{tt} = \left(\mu(u_x) u_x\right)_x - \rho_l^2 \left(\left(u - v\right)\chi(u - v)\right)_t, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T); \quad (1)$$

$$\rho_l v_t = \rho_l^2 \left(u - v\right)\chi(u - v), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T); \quad (2)$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \;\; u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \;\; v\big|_{t=0} = 0, \;\; x \in (0, L) \quad (3)$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \;\; \mu(u_x)\, u_x\big|_{x=L} = f(t), \quad t \in (0, T); \quad (4)$$

Здесь $f : [0, T] \to R$, $u : \left[0, L\right] \to R$, $u_1 : [0, L] \to R$. Предположим, что $\mu(v)$ — три раза непрерывно дифференцируемая положительная функция, а $\chi(v)$ — два раза дифференцируемая непрерывная положительная функция.

Нелинейное волновое уравнение (1) (в идеальном случае) возникает во многих задачах, например в случае колебания струны, когда коэффициент упругости зависит от деформации. Многие механические модели пористой среды, учитывающие рассеивание энергии, предполагают коэффициент трения (проницаемость) зависящим от разности скоростей [10, 11].

В данном случае рассмотрим классическое решение начально-краевой задачи (1)–(4):

$$u \in C^{3,2}\left([0,\ L]\times[0,\ T]\right),\ \ u \in C^{0,1}\left(\left[0,\ L\right]\times\left[0,\ T\right]\right),$$

где $C^{k,m}\left([0,\ L]\times[0,\ T]\right)$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых по x и m раз непрерывно дифференцируемых по t функций.

Задача определения u и v из задачи (1)–(4) с известными $\mu,\ \chi,$ $\rho_s,\ \rho_l$ называется одномерной прямой динамической задачей для пористой среды.

Допустим, что выполнены следующие условия:

$$u_0 \in C^3(0,\ L),\ \ u_1 \in C^2(0,L),\ \ \ f \in C^2(0,T) \tag{5}$$

и условия совместности

$$\left(\tilde{\mu}^{-1}\circ f\right)(0) = u_0'(L),\ \left(\tilde{\mu}^{-1}\circ f\right)'(0) = u_1'(L)$$

на правой границе

$$\rho_s\left(\tilde{\mu}^{-1}\circ f\right)''(0) = \left(\tilde{\mu}(u_0')\right)''(L) - \rho_l^2\left[\left(u_1 - \rho_l\tilde{\chi}(u_0)\right)\tilde{\chi}'(u_0)\right]'(L) \tag{6}$$

и на левой границе

$$u_0(0) = u_1(0) = u_0''(0) = u_1''(0) = 0. \tag{7}$$

Пусть $\tilde{\mu}(z) = z\mu(z),\ \tilde{\chi}(z) = z\chi(z).$ Введем класс функций

$$D(F) = \left\{\begin{array}{l}\tilde{\mu},\tilde{\chi} \in X\,|\,\tilde{\mu}'(s) \ge \mu_0,\ \tilde{\mu}''(s) \le C,\ \tilde{\chi}''(s) \le C,\ \forall\, s \in [0,S];\\ \text{выполнены условия (6)}\end{array}\right\} \tag{8}$$

для некоторых положительных констант $\mu_0,\ C.$ Далее через C обозначим положительную константу, большую, чем предыдущая C:

$$X = \left\{\tilde{\mu} \in C^3(0,S),\ \tilde{\chi} \in C^2(0,S)\,|\,\tilde{\mu}(0) = 0,\ \tilde{\chi}(0) = 0\right\}, \tag{9}$$

где $S > 0.$

Обратим внимание на то, что в приложениях часто расчет параметров ведется строго монотонно возрастающими и гладкими функциями. Эти условия удовлетворены в области определения $D(F)$ и пространстве $X,$ определенных формулами (8), (9). Для эффективного решения исходной начально-краевой задачи сделаем предположение о гладкости параметров рассматриваемой модели.

*Теорема***.** Предположим, что T достаточно мало, а S достаточно большое. Кроме того, имеют место условия (5)–(7), а множество $D(F)$ определено формулой (8).

Тогда для любого $\tilde{\mu}, \tilde{\chi} \in D(F)$ начально-краевая задача (1)–(4) имеет единственное решение $u \in C^{3,2}([0,L]\times[0,T]),\ \ v \in C^{0,1}([0,L]\times[0,T])$.

Замечание. Подобный результат сохраняется для однородных неймановых условий, когда вместо граничных условий Дирихле на левой границе $x=0$ (4) задается условие отсутствия натяжения.

В доказательстве правильности (см. ниже) граничных условий для $w = u_x,\ \ \tilde{w} = v_x$ имеем

$$\tilde{\mu}(w)\big|_{x=L} = f(t), \quad t \in (0,T),$$

$$w\big|_{x=0} = 0, \ \ t \in (0,T).$$

Функции $u,\ v$ в зависимости от $w,\ \ \tilde{w}$ определяются следующими формулами:

$$u(x,t) = \int\limits_0^x w(\xi,t)\,d\xi + \frac{1}{\rho_s}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau (\tilde{\mu}(w))_x(0,\eta)\,d\eta\,d\tau +$$

$$+\rho_l^2\frac{\rho_l}{\rho_s}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \left[\tilde{\chi}(u-v)\tilde{\chi}'(u-v)\right](0,\eta)\,d\eta\,d\tau,$$

$$v(x,t) = \int\limits_0^x \tilde{w}(\xi,t)\,d\xi + \rho_l\int\limits_0^t (\tilde{\chi}(u-v))(0,\eta)\,d\eta.$$

Данная система является замкнутой нелинейной системой интегро-дифференциальных уравнений Вольтерры второго порядка по t при фиксированном x.

Доказательство теоремы. Обозначим функции $\breve{u} = u_x,\ \ \breve{v} = v_x$. Дифференцируя обе стороны системы (1)–(2) относительно x, получим для $\breve{u},\ \ \breve{v}$ систему уравнений

$$\rho_s\breve{u}_{tt} = (\tilde{\mu}'(\breve{u})\breve{u}_x)_x - \rho_l^2\tilde{\chi}'(u-v)\breve{u}_t -$$

$$-\rho_l^2\left\{\left[\tilde{\chi}'(u-v)\right]_t - \rho_l\left[\tilde{\chi}'(u-v)\right]^2\right\},\ \ (\breve{u}-\breve{v}), x \in (0,L), \quad t \in (0,T); \quad (10)$$

$$\breve{v}_t = \rho_l\,\tilde{\chi}'(u-v)(\breve{u}-\breve{v}), \quad x \in (0,L), \quad t \in (0,T). \qquad (11)$$

Предположим, что на левой границе дано однородное нейманово условие (см. замечание). Тогда, используя условие (4), получим граничные условия

$$\tilde{\mu}'(\breve{u})\breve{u}_x\big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,T),$$

$$\tilde{\mu}(\breve{u})\big|_{x=L} = f(t), \quad t \in (0,T)$$

или

$$\breve{u}_x\big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,T); \tag{12}$$

$$\breve{u}\big|_{x=L} = \tilde{\mu}^{-1}(f(t)), \quad t \in (0,T). \tag{13}$$

Начальные условия имеют вид

$$\breve{u}\big|_{t=0} = u_{0x}(x),\ \breve{u}'_t\big|_{t=0} = u_{1x}(x),\ x \in (0,L); \tag{14}$$

$$\breve{v}\big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0,L). \tag{15}$$

Для того чтобы показать, что решение нелинейной начально-краевой задачи существует, приведем уравнение (10) к стандартному виду с помощью гладкого преобразования переменных [12], используя уравнения характеристических кривых

$$\frac{dx(t)}{dt} = \pm\sqrt{\tilde{\mu}'(\hat{u})\,(x(t),t)/\rho_s}.$$

Введем в рассмотрение новую функцию U [12]:

$$\breve{u}(x,t) = U\big(\varphi(x,t)+\psi(x,t),\ \varphi(x,t)-\psi(x,t)\big). \tag{16}$$

Здесь $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)$ удовлетворяют системе

$$\varphi_t + \sqrt{\tilde{\mu}'(u_x)/\rho_s}\,\varphi_x = 0; \tag{17}$$

$$\psi_t - \sqrt{\tilde{\mu}'(u_x)/\rho_s}\,\psi_x = 0. \tag{18}$$

После простых преобразований система уравнений (10)–(11) относительно $\breve{v}$, U примет вид

$$\breve{v}_t = \rho_l\tilde{\chi}'(u-v)(U-\hat{v}); \tag{19}$$

$$U_{\zeta\zeta} - U_{\eta\eta} = \frac{1}{8}\left(\frac{\tilde{b}_x}{\tilde{b}} + \frac{\tilde{b}_t}{\tilde{b}\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\rho_l^2}{\rho_s}\frac{\chi_1}{\sqrt{\tilde{b}}}\right)\frac{1}{\psi_x}\left(U_\eta + U_\zeta\right) +$$

$$+\frac{1}{8}\left(\frac{\tilde{b}_x}{\tilde{b}} - \frac{\tilde{b}_t}{\tilde{b}\sqrt{\tilde{b}}} - \frac{\rho_l^2}{\rho_s}\frac{\chi_1}{\sqrt{\tilde{b}}}\right)\frac{1}{\varphi_x}\left(U_\eta - U_\zeta\right) + \frac{\rho_l^2}{\rho_s}\frac{\chi_2}{4\tilde{b}\varphi_x\psi_x}(U-\breve{v}), \tag{20}$$

где $\tilde{b} = \tilde{\mu}'(\breve{u})/\rho_s$; $\chi_1 = \tilde{\chi}'(U-v)$; $\chi_2 = \left[\tilde{\chi}'(u-v)\right]_t - \rho_l\left[\tilde{\chi}'(u-v)\right]^2$.

Для того чтобы показать, что это преобразование переменных является регулярным из класса C^2 на достаточно малом интервале $(0,\ \bar{t})$, при условии $\hat{u} \in C^2$, $\hat{v} \in C^1$, рассмотрим детерминант матрицы Якоби

$$\det\begin{pmatrix} \varphi_x + \psi_x & \varphi_t + \psi_t \\ \varphi_x - \psi_x & \varphi_t - \psi_t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \varphi_x + \psi_x & -\sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u}) / \rho_S}(\varphi_x - \psi_x) \\ \varphi_x - \psi_x & -\sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u}) / \rho_S}(\varphi_x + \psi_x) \end{pmatrix} =$$

$$= -4\sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u}) / \rho_S}\varphi_x \psi_x. \tag{21}$$

Покажем, что этот якобиан отличен от нуля:

$$\psi_x \neq 0,\ \ \varphi_x \neq 0.$$

Из соотношения (18) для ψ имеем

$$t_\tau(\tau,\xi) = 1, \quad t(0,\xi) = \xi,$$

$$x_\tau(\tau,\xi) = -\sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u})(x(\tau,\xi), t(\tau,\xi) / \rho_S}, \quad x(0,\xi) = 0, \tag{22}$$

$$\psi_\tau(\tau,\xi) = 0, \quad \psi(0,\xi) = \xi.$$

Отсюда

$$t(\tau,\xi) = \tau + \xi, \quad \psi(\tau,\xi) = \xi \tag{23}$$

для $\tau \geq 0, \xi = t(0,\xi) \geq 0$. Дифференцируя второе соотношение системы (23), получаем

$$1 = \psi_\xi = \psi_x x_\xi + \psi_t t_\xi = \psi_x (x_\xi + \sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u}) / \rho_S}). \tag{24}$$

Отсюда имеем $\psi_x \neq 0$. Аналогично можно доказать, что $\varphi_x \neq 0$. Следовательно, якобиан преобразования отличен от нуля. Ограниченность $|\psi_x|$ выполняется до тех пор, пока $x_\xi(\tau,\xi) \neq$ $\neq -\sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u})(x(\tau,\xi), t(\tau,\tau+\xi) / \rho_S}$. Это справедливо для всех t, таких, что $\tau = t - \xi$ меньше, чем некоторое $\tilde{t} > 0$, которое может зависеть только от $\|\breve{u}\|_{C^1}$.

Продифференцируем второе соотношение системы (22) по переменной ξ. Получим относительно x_ξ обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с нулевым данным Коши. Сведем эту задачу к решению интегрального уравнения. Проводя очевидные оценки и используя неравенство Гронуолла, имеем соотношение

$$\left|x_\xi(\tau,\xi)\right| \le e^{\frac{C\|u\|_{C^2}}{2\sqrt{c\rho_s}}} - 1 < \sqrt{c/\rho_s} \le \sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u}(x(\tau,\xi),\tau+\xi))/\rho_s}, \qquad (25)$$

справедливое для $\tau \le \tilde{t} = \dfrac{2\sqrt{c\rho_s}\ln(\sqrt{c/\rho_s}+1)}{C\|\breve{u}\|_{C^1}}$.

Аналогично можно доказать ограниченность всех производных функций φ и ψ до второго порядка включительно [13].

Согласно теореме об обратной функции, существование решения $\breve{u} \in C^{2,2}$, $\breve{v} \in C^{0,1}$ задачи (10)–(15) следует из существования решения $U \in C^{2,2}$, $\breve{v} \in C^{0,1}$ задачи (18)–(19) с преобразованными начальными и граничными условиями. Для доказательства существования решения системы (18)–(19) используем теорему Банаха [14, 15]. Определим неподвижную точку оператора $M = (M_1, M_2)$, отображающего функции $U \in C^{2,2}$, $\breve{v} \in C^{0,1}$ в решение $M_1(U,\breve{v}) = Y$, $M_2(U,\breve{v}) = y$, из соотношений

$$Y_{\zeta\zeta} - Y_{\eta\eta} = \frac{1}{8}\left(\frac{\tilde{b}_x}{\tilde{b}} + \frac{\tilde{b}_t}{\tilde{b}\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\rho_l^2}{\rho_s}\frac{\chi_1}{\sqrt{\tilde{b}}}\right)\frac{1}{\psi_x}\left(U_\eta + U_\zeta\right) +$$

$$+\frac{1}{8}\left(\frac{\tilde{b}_x}{\tilde{b}} - \frac{\tilde{b}_t}{\tilde{b}\sqrt{\tilde{b}}} - \frac{\rho_l^2}{\rho_s}\frac{\chi_1}{\sqrt{\tilde{b}}}\right)\frac{1}{\varphi_x}\left(U_\eta - U_\zeta\right) + \frac{\rho_l^2}{\rho_s}\frac{\chi_2}{4\tilde{b}\varphi_x\psi_x}(U - \breve{v}); \qquad (26)$$

$$y_t = \rho_l\chi,\ (u-v)(U-v) \qquad (27)$$

с преобразованными начальными и граничными условиями. Отметим, что правые части зависят от U, $\hat{v}$ не только линейно относительно $U_\eta + U_\zeta$, $U_\eta - U_\zeta$, но и нелинейно через $\tilde{b} = \tilde{\mu}'(\breve{u})/\rho_s$, $\chi_1 = \tilde{\chi}'(U-v)$ и φ, ψ. Оператор является сжимающим для малых значений $\overline{t}\,(0 < t \le \overline{t})$ в силу ограниченности правых частей соотношений (26), (27) по норме $\|U\|_{C^{2,2}}$, $\|v\|_{C^{0,1}}$. Из этого следует, что существование решения $u \in C^{3,2}$, $v \in C^{0,1}$ нелинейной начально-краевой задачи (1)–(4) и, следовательно, согласно

$$u(x,t) = \int_0^x \breve{u}(\xi,t)\,d\xi,$$

$$v(x,t) = \int_0^x \breve{v}(\xi,t)\,d\xi + \rho_l\int_0^t \left[\tilde{\chi}(u-v)\right](0,\tau)\,d\tau,$$

существует решение $\breve{u} \in C^{2,2}$, $\breve{v} \in C^{0,1}$ начально-краевой задачи (10)–(15). Единственность можно доказать стандартным образом, применив теорему из [14, 15] для системы

$$\rho_s \hat{u}_{tt} = \left(\int_0^1 \tilde{\mu}\left(u_x^2 + (u_x^1 - u_x^2)\theta\right) d\theta\, \hat{u}_x \right)_x -$$

$$-\rho_l^2 \left(\int_0^1 \tilde{\chi}\left(u^2 - v^2 + (u^1 - v^1 - u^2 + v^2)\theta\right) d\theta \right)_t ;$$

$$\hat{v}_t = \rho_l \int_0^1 \tilde{\chi}\left(u^2 - v^2 + (u^1 - v^1 - u^2 + v^2)\theta\right) d\theta$$

с однородными начальными и граничными условиями для разностей решений u^1, v^1 и u^2, v^2.

Теорема доказана.

Численное решение задачи. Предположим, что коэффициенты постоянны, и при $\varphi(x) = 0, \psi(x) = \sin x,\ f(t) = 0,\ L = \pi$ получено решение начально-краевой задачи (1)–(5):

$$u = \frac{\sin x}{D}\left[ke^{kt} - \xi e^{\xi t}\left(\cos\eta t + \frac{k-\xi}{\eta}\sin\eta t \right) + e^{\xi t}\left(\eta \sin\eta k + (\xi - k)\cos\eta t \right) \right] +$$

$$+\chi\rho_l \frac{\sin x}{D}\left[e^{kt} - e^{\xi t}\left(\cos\eta t + \frac{k-\xi}{\eta}\sin\eta t \right) \right],$$

$$v = \chi\rho_l \frac{\sin x}{D}\left[e^{kt} - e^{\xi t}\left(\cos\eta t + \frac{k-\xi}{\eta}\sin\eta t \right) \right].$$

Здесь постоянные D, k, ξ, η выражаются через характеристики пористой среды. При исчезновении пористости исчезает и скорость насыщающей жидкости.

Положим в начально-краевой задаче (1)–(5) $u_0(x) = 0, u_1(x) = \sin x$, а временной сигнал в источниках зададим в виде импульса Пузырёва:

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi\, f_0 (t - t_0)^2}{\gamma^2} \right) \sin\left(2\pi\, f_0 (t - t_0) \right),$$

где $\gamma = 4$; $f_0 = 1$ Гц; $t_0 = 1{,}5$ с.

В качестве модели зададим среду, состоящую из однородного пористого слоя с поглощением. Физические характеристики слоя примем следующими:

Физическая плотность жидкости, ρ_l^f, г/см^3 1,0

Скорость распространения поперечной волны
в упругой среде, c_s, км/с 1,3

Пористость, d 0,1

Коэффициент трения, χ, см^3/(г·с) 1000

Для численного решения полученной задачи используем явную разностную схему второго порядка аппроксимации с соответствующими шагами дискретизации по времени (τ) и по пространству (h) [16, 17]:

$$\frac{1}{\tau^2}\left(u_j^{i+1}-2u_j^i+u_j^{i-1}\right)=\frac{1}{2h^2\rho_s}\Big[\left(\mu_{j+1}^{i-1}+\mu_j^{i-1}\right)\left(u_{j+1}^i-u_j^i\right)-$$

$$-\left(\mu_j^{i-1}+\mu_{j-1}^{i-1}\right)\left(u_j^i-u_{j-1}^i\right)\Big]-\frac{1}{\tau\rho_s}\rho_l^2\left[\left(u_j^i-v_j^i\right)\chi_j^i-\left(u_j^{i-1}-v_j^{i-1}\right)\chi_j^{i-1}\right],$$

$$v_j^{i+1}=\rho_l\tau(u_j^{i+1}-v_j^{i+1})\chi_j^i+v_j^i,\qquad i=0,\ldots,N,\quad j=0,\ldots,M$$

с аппроксимацией начальных и краевых условий

$$u_j^0=0,\qquad \frac{u_j^1-u_j^0}{\tau}=\sin(jh),$$

$$v_j^0=0,\qquad j=0,\ldots,M,$$

$$u_0^i=0,\ u_M^i=0,\ i=0,\ldots,N.$$

Полагаем число Куранта меньшим 0,5, что обеспечивает устойчивость принятой разностной схемы.

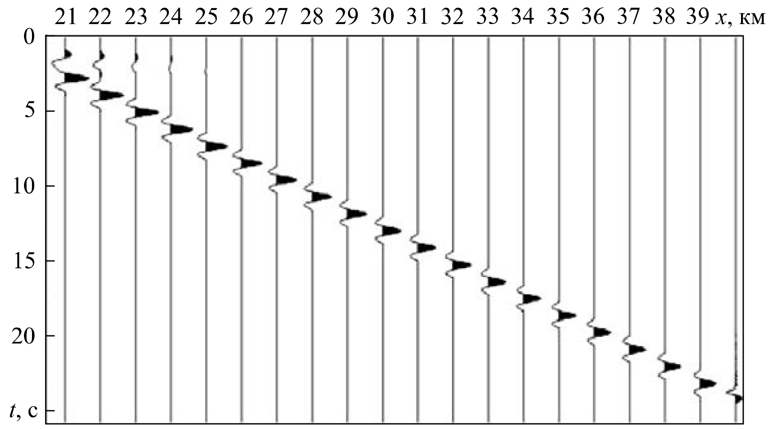


Рис. 1. Расчетные сейсмотрассы для скорости смещений u для однородного пористого слоя

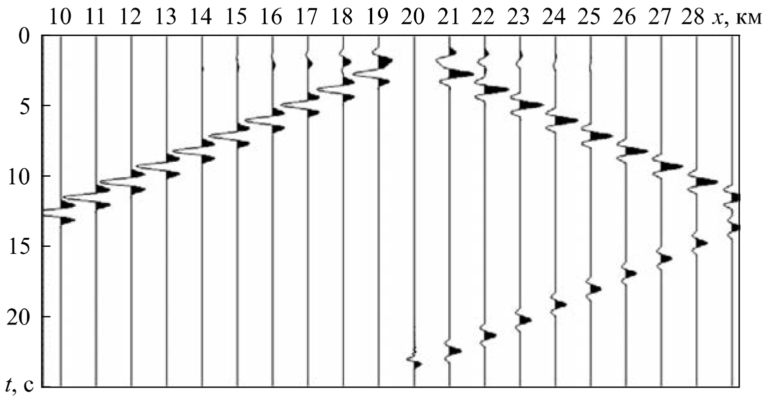


Рис. 2. Расчетные сейсмотрассы для скорости смещений u для однородного пористого слоя с источником возбуждения

Результаты численных расчетов волнового поля для заданной модели среды представлены на рис. 1, где приведены сейсмотрассы волнового поля для скорости смещений u; видно, что с расстоянием волна затухает. На рис. 2 источник возбуждения находится внутри пористого слоя (20 км). Волна распространяется в обе стороны от источника с одинаковой скоростью, а отражается от правой границы в силу специфичности граничного условия.

Заключение. Рассмотрена математическая модель одномерного нелинейного движения насыщенной жидкостью пористой среды, учитывающая межфазное трение, когда модуль сдвига пористой твердой фазы зависит от градиента смещения. Поставленная одномерная нелинейная прямая задача пороупругости решена функциональным методом. Приведена найденная в результате численных расчетов сейсмотрасса волнового поля для скорости смещений u для модельной задачи. Из полученных данных следует, что с расстоянием волна затухает. В случае, когда источник возбуждения находится внутри пористого слоя, установлено, что волна распространяется в обе стороны от источника с одинаковой скоростью, при этом отражается от правой границы в силу специфичности граничного условия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (грант ОТ-Atex-2018-340).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве. *Известия Академии наук СССР*, 1944, т. 8, № 4, с. 133–150.

[2] Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-Frequency Range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, vol. 28, no. 2, pp. 168–178.

[3] Доровский В.Н. Континуальная теория фильтрации. *Геология и геофизика*, 1989, № 7, с. 39–45.

[4] Блохин А.М., Доровский В.Н. *Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума*. Новосибирск, Изд-во ОИГГМ СО РАН, 1994, 183 с.

[5] Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных сред*. Часть 1. Москва, Наука, 1987, 464 с.

[6] Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации жидкого связующего в композитных конструкциях, изготавливаемых методом RTM. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 2, с. 3–27.

[7] Димитриенко Ю.И., Иванов М.Ю. Моделирование нелинейных динамических процессов переноса в пористых средах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 1, с. 39–56.

[8] Ландау Л.Д. Теория сверхтекучести гелия-II. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, 1941, т. 11, с. 592–602.

[9] Imomnazarov Kh., Imomnazarov Sh., Korobov P., Kholmuradov A. About one direct initial-boundary value problem for nonlinear one-dimensional poroelasticity equations. *Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Series: Mathematical Modeling in Geophysics*, 2015, no. 18, pp. 1–8.

[10] Carcione J.M. *Wave fields in real media: wave propagation in anisotropic, anelastic porous and electromagnetic media*. New York, Elsevier, 2007, 539.

[11] Молотков Л.А. *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред*. Санкт-Петербург, Наука, 2001, 348 с.

[12] Evans L.C. Partial Differential Equations. *Graduate Studies in Mathematics. Vol. 19. Providesce American Mathematical Society*, 1998, 466 p.

[13] Kaltenbacher B. Identification of nonlinear coefficients in hyperbolic PDEs, with application to piezoelectricity. *Control of Coupled Partial Differential Equations International Series of Numerical Mathematics*, 2007, vol. 155, pp. 193–215.

[14] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва, Физматлит, 2004, 572 с.

[15] Hutson V., Pym J., Cloud M. Applications of functional analysis and operator theory. Vol. 200. *Elsevier Science*, 2005, 432 p.

[16] Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем*. Москва, Наука, 1977. 656 с.

[17] Дильмурадов Н., Холмуродов А. Некоторые прямые и обратные задачи для уравнений движения двухскоростного континиуума. *V Междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий — Аль-Хорезми 2016»*, 9–10 ноября 2016 г., Бухара, Узбекистан, с. 147–149.

Статья поступила в редакцию

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Холмуродов А.Э., Дильмурадов Н. Математическое моделирование одномерного нелинейного движения в насыщенной жидкостью пористой среде. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 1, с.

Холмуродов Абдулхамид Эркинович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика» Каршинского государственного университета, специалист в области математического моделирования и численных методов. e-mail: abishx@mail.ru

Дильмурадов Насрутден — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математика» Каршинского государственного университета, специалист в области дифференциальных уравнений и математического моделирования. e-mail: nosir_d@mail.ru

Mathematical modeling of one-dimensional non-linear motion in a fluid-saturated porous medium

© A.E. Kholmurodov, N. Dilmuradov

Karshi State University, Karshi, 180001, Uzbekistan

The paper focuses on a mathematical model for propagation of one-dimensional non-linear waves in fluid-saturated porous media where energy dissipation caused by inter-component friction takes place. The existence and uniqueness theorem of the classical solution to the porous-elastic media dynamic problem is proved. A difference scheme for solving this problem is submitted. The study gives the results of numerical simulations of seismic wave propagation for a test medium model.

Keywords: *non-linear one-dimensional motion, porous-elastic media, energy dissipation, two-speed continuum, numerical algorithm, computing experiment.*

REFERENCES

[1] Frenkel Ya.I. *Izvestiya Academii Nauk SSSR — Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Geophysics Series*, 1944, vol. 8, no 4, pp. 133–150.

[2] Biot M.A. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, vol. 28, no. 2, pp. 168–178.

[3] Dorovskiy V.N. *Geologiya i geofizika — Russian Geology and Geophysics*, 1989, no.7, pp. 39–45.

[4] Blokhin A.M., Dorovskiy V.N. *Problemy matematicheskogo modelirovaniya v teori mnogoskorostnogo kontinuuma* [Problems of mathematical modeling in the theory of multispeed continuum]. Novosibirsk, Siberian Branch of the Russian Academy of Science publishing house, 1994, 183 p.

[5] Nigmatulin R.I. *Dinamika mnogofaznykh sred. Chast 1* [Dynamics of polyphase media. Part 1]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 464 p.

[6] Dimitrienko Yu.I., Bogdanov I.O. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 2. pp. 3–27.

[7] Dimitrienko Yu.I., Ivanov M.Yu. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences*, 2008, no. 1, pp. 39–56.

[8] Landau L.D. *Zhurnal eksperimentalnoy i teoreticheskoy fiziki — Journal of the Experimental and Theoretical Physics*, 1941, vol. 11, pp. 592–602.

[9] Imomnazarov Kh., Imomnazarov Sh., Korobov P., Kholmuradov A. *Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Series: Mathematical Modeling in Geophysics*, 2015, no. 18, pp. 1–8.

[10] Carcione J.M. *Wave fields in real media: wave propagation in anisotropic, anelastic porous and electromagnetic media.* New York, Elsevier, 2007, 539.

[11] Molotkov L.A. *Issledovanie rasprostraneniya voln v poristykh i treschinovatykh sredakh na osnove effektivnykh modeley Bio i sloistykh sred.* [Investigation of wave propagation in porous and fissured media on the basis of the effective Biot models and stratified media]. St. Petersburg, Nauka Publ., 2001, 348 p.

[12] Evans L.C. *Partial Differential Equations.* AMS, 1998, 466 p.

[13] Kaltenbacher B. *Control of Coupled Partial Differential Equations International Series of Numerical Mathematics*, 2007, vol. 155, pp. 193–215.

[14] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of the function theory and functional analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 572 p.

[15] Hutson V., Pym J., Cloud M. *Applications of Functional Analysis and Operator Theory. Vol. 200.* Elsevier Science, 2005, 432 p.

[16] Samarskiy A.A. *Vvedeniye v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 656 p.

[17] Dilmuradov N., Kholmurodov A. Nekotorye pryamye i obratnye zadachi dlya uravneniy dvizheniya dvukhskorostnogo kontiniuuma [Some direct and inverse problems for two-speed continuum media motion equations]. *Mezhdunar. nauchn. konf. "Aktualnye problemy prikladnoн matematiki i informatsionnykh tekhnologiy — Al'-Horezmi 2016"* [The International scientific conference "Modern Problems of Applied Mathematics and Information Technologies — Al-Khorezmiy 2016"]. November 9–10, 2016, Bukhara, Uzbekistan, pp.147–149.

Kholmurodov A.E., Cand. Sc. (Phys.-Math), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, Karshi State University, expert in the field of mathematical modelling and numerical methods. e-mail: abishx@mail.ru

Dilmuradov N., Cand. Sc. (Phys.-Math), Assoc. Professor, Department of Mathematics, Karshi State University, expert in the field of differential equations and mathematical modelling. e-mail: nosir_d@mail.ru