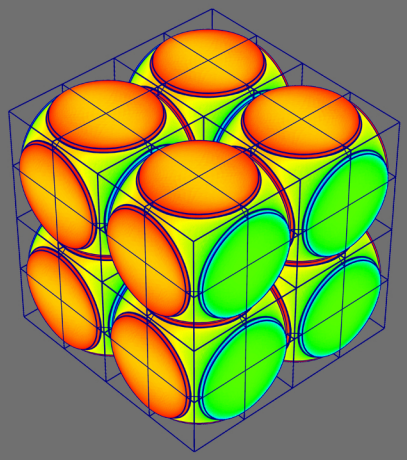
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Родников А.В. Математическая модель двухтросовой системы космическая станция – динамически симметричный астероид. Математическое моделирование и численные методы , 2017, No 4, с. 92–101.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/152/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.112
22.01.2026 21:35:25

УДК 531.36:521.1 DOI 10.18698/2309-3684-2017-4-92101

Математическая модель двухтросовой системы космическая станция — динамически симметричный астероид

© А.В. Родников

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Построена математическая модель естественно-искусственной космической тросовой системы, состоящей из космической станции и астероида, близкого по своим динамическим характеристикам к динамически симметричному твердому телу, соединенных двумя тросами. В рамках модели выявлены критерии существования и устойчивости равновесных конфигураций такой системы, приведены возможные типы движений станции относительно поверхности астероида и условия, гарантирующие движение с натянутыми тросами.

Ключевые слова: *космическая тросовая система, астероид, космическая станция, устойчивость*

Введение. Освоение малых планет Солнечной системы в качестве источников минерального сырья следует рассматривать как одну из естественных задач человечества в XXI в., решение которой возможно только при организации постоянной транспортной линии между Землей и астероидом. Очевидно, что наиболее сложными элементами такой линии являются ее крайние точки: старт и посадка на Земле и малой планете. Если со стороны Земли стартовой и посадочной площадками может служить тяжелая станция на околоземной орбите, то посадка на астероид по результатам уже реализованных миссий крайне тяжела и опасна из-за сложности форм малых планет и, как следствие, ввиду отличий их движений относительно центра масс от перманентных вращений. Решением проблемы может быть базовая космическая станция, находящаяся в непосредственной близости от астероида, связанная тросом с его поверхностью и являющаяся портом для следующих на Землю лайнеров. Трос при этом может служить для транспортировки грузов с поверхности малой планеты и обратно. Однако реализация такой идеи на основе известной концепции «космического лифта» едва ли возможна, что связано со сложностью ротационных движений астероидов. Тем не менее отметим, что временное связывание космического аппарата с поверхностью малой планеты может оказаться полезным при реализации некоторых космических миссий [1]. Кроме того, существуют модификации классической концепции [2, 3].

Очевидно, что естественно-искусственная тросовая конструкция, состоящая из астероида и «привязанной» к нему базовой станции, должна удовлетворять следующим требованиям:

- конструкция должна существовать длительное (в идеале бесконечное) время;
- движение базовой космической станции должно быть устойчивым (лучшей может считаться ситуация, когда станция во все время движения остается в положении устойчивого равновесия в некоторой подвижной системе отсчета);
- станция не должна покидать некоторую окрестность астероида (т. е. трос не должен обрываться);
- необходимо исключить возможность падения станции на поверхность астероида (для этого, в частности, предотвратить ослабевание троса).

При построении математической модели космической тросовой системы, удовлетворяющей сформулированным требованиям, ограничимся рассмотрением астероидов, чьи динамические характеристики близки к характеристикам динамически-симметричного твердого тела. Будем следовать следующим принципам:

- должны быть учтены все существенные силовые воздействия (в частности, в полной мере должна быть учтена сложность гравитационного поля астероида);
- для описания в рамках математической модели как можно большего количества ситуаций должны быть использованы только безразмерные переменные и параметры;
- уравнения движения должны учитывать все основные динамические особенности реальной космической системы, но в то же время они должны быть интегрируемыми;
- результатом анализа уравнений движения должны быть конкретные рекомендации по конфигурированию станции относительно астероида.

Отметим, что отдельной проблемой, как и при развертывании любой достаточно крупногабаритной космической системы (что подтверждено в работе [4] и многих других работах), является процесс «сбрасывания якоря» на поверхность астероида, но в данной статье такой процесс не рассматривается.

Описание математической модели двухтросовой системы космическая станция — динамически симметричный астероид. Будем считать, что астероид можно рассматривать как динамически симметричное твердое тело. В этом случае естественно предположить, что его движение относительно центра масс C есть регулярная прецессия вокруг некоторой оси Cz_1 с углом нутации ϑ и угловой скоростью ω (рис. 1).

Пренебрегая размерами космической станции, будем рассматривать ее как материальную точку S, двигающуюся в поле тяжести астероида, но не оказывающую влияние на его движение. Проанализируем ситуацию, когда станция связана *двумя* тросами с полюсами

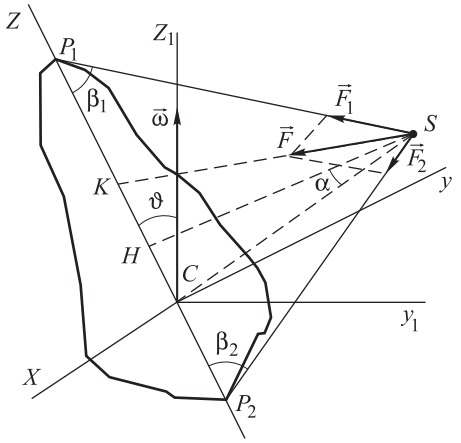


Рис. 1. Принципиальная схема двухтросовой системы:
Cz — ось динамической симметрии

P_1 и P_2 астероида (полюса — это точки пересечения оси динамической симметрии с поверхностью астероида [5, 6]). Априори ясно, что соединение двумя тросами более устойчиво, чем одним. Будем называть точку P_1, имеющую положительную координату вдоль оси Cz, северным полюсом астероида, а P_2, имеющую отрицательную координату по той же оси, — южным полюсом. Примем тросы невесомыми нерастяжимыми абсолютно гибкими нитями, т. е. будем считать, что они реализуют две неудерживающие связи, наложенные на движение точки S и не позволяющие станции покинуть пределы двух шаров с центрами в полюсах астероида и радиусами, которые равны длинам тросов. Сферы, ограничивающие эти шары, называют границами связей. В силу сформулированных выше требований тросы должны быть натянуты, поэтому точка S может двигаться только вдоль окружности, являющейся пересечением границ связей с центром H на оси динамической симметрии и радиусом HS. Такие движения будем называть связными.

Для учета активных сил, действующих на станцию, прежде всего заметим, что в непосредственной окрестности астероида силы притяжения со стороны самого астероида на несколько порядков превосходят, если учитывать инерционные эффекты, сумму других силовых воздействий. В рассматриваемой ситуации естественно предположить, что гравитационное поле астероида обладает вращательной симметрией относительно оси динамической симметрии. В этом случае можно считать, что гравитационная сила $\vec{F}$, действующая на станцию, во все время связного движения остается постоянной по величине и направленной в одну и ту же точку K на оси динамической симметрии (см. рис. 1), расположенную между полюсами. Тогда эту силу можно представить как сумму двух постоянных по величине векторов $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, каждый из которых направлен вдоль соответствующего троса в сторону полюса. Такое представление позволяет не изучать особенности гравитационных потенциалов астероидов, имеющего, как правило, весьма причудливые формы.

Безразмерные координаты и параметры. Определим правые прямоугольные системы координат $Cxyz$ и Cxy_1z_1 так, что Cx орто-

гональна Cz и Cz_1. Пусть $x = |SH|\cos\varphi$, $y = |SH|\sin\varphi$, где x, y — координаты точки S по осям Cx и Cy. Кроме того, пусть $\beta_1 = \angle SP_1C$, $\beta_2 = \angle SP_2C$, $\alpha = \angle HSC$ и $f_i = \left|\vec{F}_i\right| / \left(m|SH|\omega^2\right)$, где $i = 1, 2$; m — масса космической станции. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $0 \le \alpha < \pi/2$ и β_2 — острый угол. Заметим, что при связном движении безразмерные величины α, β_1, β_2, f_1, f_2 остаются постоянными. Таким образом, движения рассматриваемой тросовой системы, отвечающие сформулированным выше требованиям, полностью определяются безразмерными параметрами ϑ, α, β_1, β_2, f_1, f_2 и безразмерной координатой φ. Для описания этих движений будем использовать безразмерное время $\tau(\tau = \omega t)$, производную по которому будем обозначать штрихом.

Уравнения движения и возможные положения равновесия космической станции. Уравнение связного движения точки S может быть записано в форме интеграла Якоби:

$$\varphi'^2 + \sin\varphi\,\sin\vartheta(\sin\varphi\,\sin\vartheta + 2\operatorname{tg}\alpha\,\cos\vartheta) = 2h = \text{const}. \qquad (1)$$

Заметим, что в левую часть равенства (1) не входят силовые параметры f_1, f_2 и параметры β_1, β_2, определяющие положение станции по отношению к полюсам астероида.

Критические точки функции, стоящей в левой части (1), отвечают положениям равновесия космической станции во вращающейся системе отсчета, связанной с осями прецессии и динамической симметрии. Эти положения равновесия соответствуют пересечениям окружности, по которой происходит связное движение, с плоскостями Cy_1z_1 и Cxy_1. Причем всегда существуют два пересечения с Cy_1z_1 (так называемые верхнее $\varphi = \pi/2$ и нижнее $\varphi = -\pi/2$), а также не более двух пересечений с Cxy_1.

Верхнее положение относительного равновесия всегда неустойчиво и не удовлетворяет сформулированным требованиям. Нижнее оказывается устойчивым, только если $\alpha \ge \vartheta$, т. е. если окружность связного движения либо не пересекает, либо касается плоскости Cxy_1.

Если же $\alpha < \vartheta$, то нижнее положение относительного равновесия неустойчиво, но в плоскости Cxy_1 возникают два устойчивых положения относительного равновесия $\varphi = -\arcsin(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha)$ и $\varphi = \pi + \arcsin(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha)$. Учитывая, что все используемые ограничения на переменные и параметры задачи были связаны только с общностью рассуждений, можно сделать вывод, что любую точку плоскости

Cxy_1, отличную от C, равно как и любую точку, лежащую внутри острых углов, образуемых осью динамической симметрии Cz и осью Cy_1, можно рассматривать как возможное устойчивое положение базовой космической станции. Однако интеграл (1) описывает только движения по общей границе связей, поэтому такие положения относительного равновесия реализуемы, только если оба троса натянуты.

Анализ математической модели — определение условий натянутости тросов. Заметим, что каждая из сил реакции тросов может быть представлена произведением некоторого множителя (множителя Лагранжа) на вектор, соединяющий соответствующий полюс со станцией. При этом во все время связного движения множители Лагранжа остаются неположительными. Из общих уравнений движения точки S, в которых реакции рассматриваются как активные силы, после некоторых преобразований для связных движений можно получить равенства

$$\begin{gathered}\varphi'^2 + 2(\cos\vartheta - \sin\varphi\,\sin\vartheta\,\mathrm{tg}\,\beta_1)\varphi' + 1 + \sin^2\vartheta(\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\alpha - \sin^2\varphi) - \\ -\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\sin\varphi(\mathrm{tg}\,\beta_1 + \mathrm{tg}\,\alpha) - f_2\sin(\beta_1+\beta_2)/\cos\beta_1 = -\lambda_2;\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\varphi'^2 + 2(\cos\vartheta + \sin\varphi\,\sin\vartheta\,\mathrm{tg}\,\beta_2)\varphi' + 1 - \sin^2\vartheta(\mathrm{tg}\,\beta_2\mathrm{tg}\alpha + \sin^2\varphi) - \\ -\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\sin\varphi(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta_2) - f_1\sin(\beta_1+\beta_2)/\cos\beta_2 = -\lambda_1,\end{gathered} \tag{3}$$

где λ_i — некоторые выражения, включающие множители Лагранжа.

Анализируя равенства (2), (3), можно установить, что если оба угла β_1 и β_2 острые, то множители Лагранжа будут отрицательными при выполнении неравенств $\lambda_i < 0$, $i = 1, 2$. Если β_1 — тупой, то λ_2 должно быть положительным. Если $\beta_1 = \pi/2$, то соответствующий множитель Лагранжа будет отрицательным при условии

$$2\sin\varphi\left(\varphi' + \frac{\cos\vartheta}{2}\right) - \mathrm{tg}\,\alpha\,\sin\vartheta < -\frac{f_2\cos\beta_2}{\sin\vartheta}. \tag{4}$$

Диаграммы для силовых параметров. Выведем теперь условия, при которых реализуемы конфигурации моделируемой тросовой системы, определяемые критическими точками интеграла (1).

Рассмотрим сначала нижнее относительное равновесие $\varphi = -\pi/2$. В этом случае из равенств (2) и (3) (и в частном случае прямого угла β_1, из условия (4)) получим следующие условия отрицательности множителей Лагранжа:

$$f_1\sin(\beta_1+\beta_2) < \frac{\cos(\vartheta+\beta_2)\cos(\alpha-\vartheta)}{\cos\alpha}; \tag{5}$$

$$f_2 \sin(\beta_1 + \beta_2) < \frac{\cos(\vartheta - \beta_1)\cos(\alpha - \vartheta)}{\cos\alpha}. \qquad (6)$$

Заметим, что, так как по смыслу задачи f_2 положительно, неравенство (6) имеет смысл только при $\beta_1 < \pi/2 + \vartheta$. Неравенства (5) и (6) имеют простую геометрическую интерпретацию. Пусть H_1 — проекция точки S на ось прецессии Cz_1. Тогда нижнее относительное равновесие допустимо, если оно устойчиво $(\alpha \geq \varphi)$, и вектор $\vec{\Phi} = \vec{F}/(m\omega^2)$, отложенный от точки S, будет целиком находиться внутри закрашенного параллелограмма (рис. 2) с противоположными вершинами S и H_1 и сторонами, параллельными тросам (т. е. отрезкам SP_1 и SP_2). Заметим, что нижнее равновесие может быть допустимым, даже если угол β_1 — тупой (и превышающий прямой угол на величину, меньшую угла нутации). В этом случае с точки зрения наблюдателя, находящегося на астероиде, орбита станции будет выглядеть как окружность, перпендикулярная оси динамической симметрии, с центром, находящимся «выше» полюса.

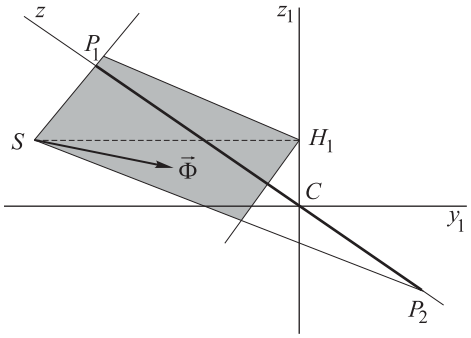


Рис. 2. Диаграмма силовых параметров для равновесия $\varphi = -\pi/2$

Для каждого из равновесий в плоскости Cxy_1 условия отрицательности множителей Лагранжа, получаемые из равенств (2)–(4), записываются как

$$f_1 \sin(\beta_1 + \beta_2) < \frac{\cos(\alpha + \beta_2)}{\cos\alpha}; \qquad (7)$$

$$f_1 \sin(\beta_1 + \beta_2) < \frac{\cos(\alpha - \beta_1)}{\cos\alpha} \qquad (8)$$

и также имеют простую геометрическую интерпретацию. Пусть S_1 — «нижнее» неустойчивое положение равновесия при $\alpha < \varphi$. Тогда соот-

ветствующие ему положения равновесия во вращающейся плоскости Cxy_1, не лежащие на Cy_1, допустимы при условии существования $\alpha < \varphi$ и если вектор $\vec{\Phi} = \vec{F} / (m\omega^2)$, отложенный в точке S_1, целиком находится внутри закрашенного параллелограмма (рис. 3) с противоположными вершинами S_1 и C и сторонами, параллельными отрезкам S_1P_1 и S_1P_2.

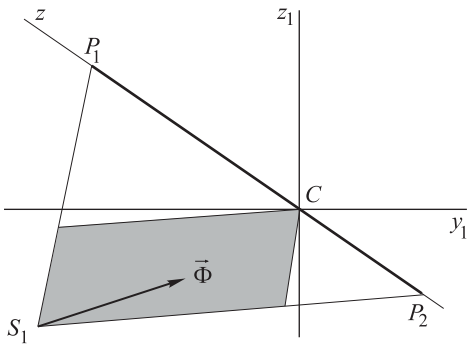


Рис. 3. Диаграмма силовых параметров для устойчивых равновесий при $\alpha < \varphi$

Отметим также, что чем ближе к точке C окажется конец вектора $\vec{\Phi}$, тем меньше сила натяжения тросов. Иными словами, с одной стороны, для гарантии того, что оба троса будут натянуты, необходимо расположить станцию сравнительно далеко от поверхности астероида, а с другой стороны, если расположить станцию чересчур далеко, натяжения тросов могут оказаться неприемлемо большими.

Результаты анализа модели — определение конфигураций, отличных от положений относительного равновесия. Если отказаться от требования устойчивости рассматриваемой системы по всем координатам и ограничиться, например, орбитальной устойчивостью (т. е. устойчивостью по отношению к вариациям константы интеграла Якоби), сохранив при этом остальные требования, можно указать конфигурации системы, в которых станция не находится в положении равновесия по отношению к осям прецессии и динамической симметрии. (Заметим, что и в рассмотренных выше конфигурациях станция не была неподвижной по отношению к поверхности астероида.) Таким конфигурациям отвечают фазовые траектории, определяемые интегралом Якоби (1), на которых отрицательны множители Лагранжа. Эти фазовые траектории можно увидеть на фазовых портретах связного движения, построенных на фазовом цилиндре $\left(\varphi \middle| \mathrm{mod}\, 2\pi, \varphi' \right)$, из которого исключены закрашенные области (рис. 4–6), в которых хотя бы один из множителей Лагранжа положи-

телен. Границы таких областей определяются из формул (2)–(4) соотношениями $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ и заменой в (4) знака неравенства на равенство.

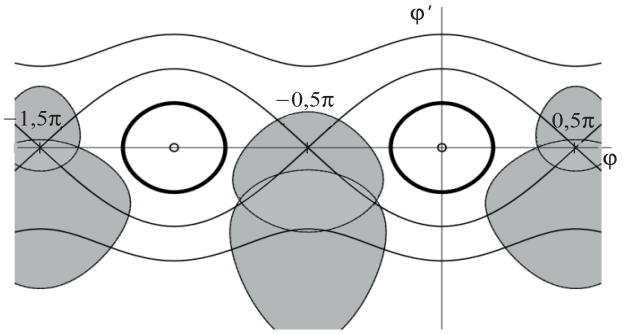


Рис. 4. Колебания вокруг устойчивых равновесий

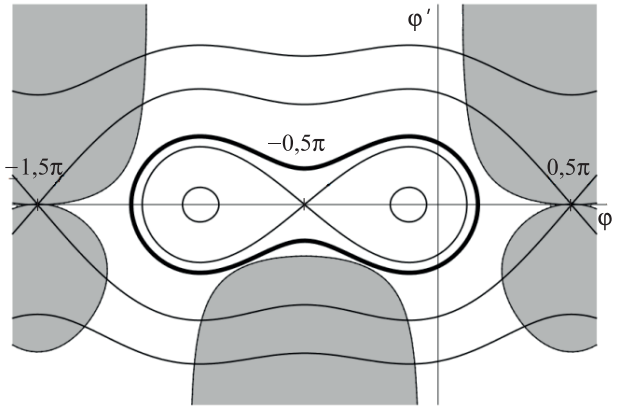


Рис. 5. Колебания вокруг нескольких равновесий

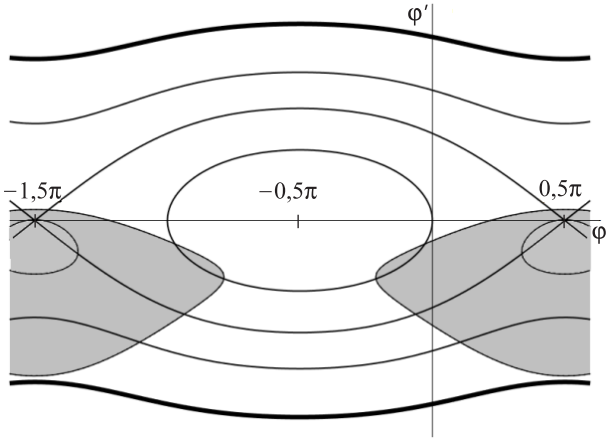


Рис. 6. Вращения вокруг оси динамической симметрии

Примерами таких траекторий являются:

- колебания вокруг одного из устойчивых положений равновесия (см. рис. 4), в этом случае станция движется по дуге окружности, не более одного раза пересекающей Cxy_1;
- колебания, охватывающие как неустойчивое нижнее так и оба устойчивых положения равновесия (см. рис. 5), в этом случае станция движется по дуге окружности, дважды пересекающей Cxy_1;
- вращения вокруг оси динамической симметрии (см. рис. 6), при этом станция описывает всю окружность связного движения, пробегаемую в том или ином направлении. Заметим, что вращения возможны, только если оба угла β_1 и β_2 — острые.

Заключение. В настоящей работе на основе ряда принципов и требований построена математическая модель естественно-искусственной космической тросовой системы, состоящей из рукотворной космической станции и малой планеты, соединенных двумя гибкими связями (тросами). В рамках модели указаны допустимые конфигурации системы и построены диаграммы, обеспечивающие ее долговременное существование.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lanoix E.L.-M., Misra A.K. Near-Earth asteroid missions using tether sling shot assist. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2000, vol. 37, no. 4, pp. 475–480.

[2] Misra A.K. Dynamics of a tether attached to an asteroid. *7th International Workshop and Advanced School "Spaceflight Dynamics and Control"*, 2012. URL: www.aerospace.ubi.pt/workshop2012/Abstract_Misra.pdf (дата обращения 17.10.2017).

[3] Burov A.A., Guerman A.D., Kosenko I.I., Ferraz A., Nikonov V.I. Dynamics of space elevator on asteroid. *66th International Astronautical Congress 2015 (IAC 2015) "Space — The Gateway for Mankind's Future"*. Israel, Jerusalem, 2015, pp. 9496–9503.

[4] Бушуев А.Ю., Фарафонов Б.А. Математическое моделирование процесса раскрытия солнечной батареи большой площади. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2 (2), с. 101–114.

[5] Родников А.В. О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле. *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 2, с. 295–311.

[6] Родников А.В. Моделирование динамики космической станции в окрестности астероида. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2 (10), с. 55–68.

Статья поступила в редакцию 04.09.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Родников А.В. Математическая модель двухтросовой системы космическая станция — динамически симметричный астероид. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 4, с. 92–101.

Родников Александр Владимирович окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 90 научных публикаций, член European Mechanics Society (EUROMECH) и International Physics and Control Society (IPACS). Область научных интересов: прикладная небесная механика (космические тросовые системы, задача трех тел).
e-mail: springer@inbox.ru

Mathematical model of a two-tether system consisting of a space station and a dynamically symmetric asteroid

© A.V. Rodnikov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The purpose of the research was to build a mathematical model of an natural-artificial space tether system consisting of a space station and an asteroid, close in its dynamic characteristics to a dynamically symmetric solid body, connected by two tethers. The article describes some criteria of existence and stability for equilibrium configurations of the system deduced within the assumptions of the constructed model. Moreover, it classifies the types of the station motions near the asteroid surface, and gives the conditions ensuring the motions with taut tethers.

Keywords: *space tether system, asteroid, space station, stability*

REFERENCES

[1] Lanoix E.L.-M., Misra A.K. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2000, vol. 37 (4), pp. 475–480.
[2] Misra A.K. *7th International Workshop and Advanced School "Spaceflight Dynamics and Control"*. 2012, Available at: www.aerospace.ubi.pt/ workshop2012/Abstract_ Misra.pdf (accessed October 17, 2017).
[3] Burov A.A., Guerman A.D., Kosenko I.I., Ferraz A., Nikonov V.I. *66th International Astronautical Congress 2015 (IAC 2015) "Space — The Gateway for Mankind's Future"*. Israel, Jerusalem, 2015, pp. 9496–9503.
[4] Bushuev A.Yu., Farafonov B.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2 (2), pp. 101–114.
[5] Rodnikov A.V. *Nelineinaia dinamika — Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2011, vol. 7, no. 2, pp. 295–311.
[6] Rodnikov A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2 (10), pp. 55–68.

Rodnikov A.V. graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of 90 scientific publications, member of European Mechanics Society (EUROMECH) and International Physics and Control Society (IPACS). Research interests: applied celestial mechanics (space tether systems, problem of three bodies).
e-mail: springer@inbox.ru