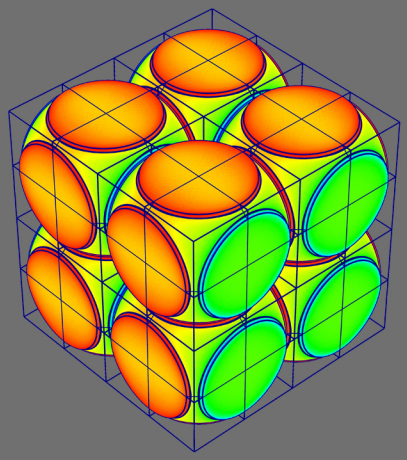
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Котенев В.П., Пучков А.С., Сапожников Д.А., Тонких Е.Г. Применение мето- дов машинного обучения для моделирования распределения давления в возмущен- ной области около сферы, обтекаемой невязким потоком. Математическое моде- лирование и численные методы , 2017, No 4, с. 60–72.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/150/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 14:51:25

DOI 10.18698/2309-3684-2017-4-6072
УДК 533.6.011.5:004.622:004.855.5

Применение методов машинного обучения для моделирования распределения давления в возмущенной области около сферы, обтекаемой невязким потоком

© В.П. Котенев[1, 2], А.С. Пучков[1, 2], Д.А. Сапожников[1, 2], Е.Г. Тонких[1, 2]

[1]АО «ВПК «НПО машиностроения», г. Реутов, Московская обл., 143966, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена зависимость для распределения давления в возмущенной области около сферы, обтекаемой потоком сверхзвукового невязкого газа, полученная при модификации метода обратного средневзвешенного расстояния. При получении зависимости использовались известные соотношения для давления на теле и ударной волне, а также данные численных экспериментов. Проведено сравнение результатов с данными, не использованными в процессе обучения коэффициентов зависимостей, что подтверждает высокую достоверность полученной модели.

Ключевые слова: *метод Шепарда, сверхзвуковое течение, многопараметрическая регрессия*

Введение. За годы развития экспериментальной и вычислительной аэродинамики скопилось большое количество данных, описывающих течения около различных аэродинамических компоновок [1–3]. В настоящее время эти данные используются для верификации и валидации предлагаемых моделей [1]. Однако их можно использовать не только для проверки адекватности моделей, но и при создании новых методов определения параметров обтекания. В данной работе предложен метод, моделирующий распределение давления в возмущенной области около сферы, построенный на основе имеющихся зависимостей для давления на теле и волне, частичного анализа табличных данных и гипотезах о влиянии давления с поверхности тела и ударной волны на давление в ударно-волновом слое. Для аппроксимации использован модифицированный метод Шепарда (метод обратного средневзвешенного расстояния) [4–6]. Простую зависимость, полученную на основе реальных данных, можно использовать для самостоятельных оценок параметров обтекания в широком диапазоне чисел Маха и встраивать ее в программные комплексы для задания начальных значений искомых параметров в расчетной области.

Цель работы — определение зависимости, аппроксимирующей распределение давления в возмущенной области около сферы.

Модификация метода Шепарда. Рассмотрим простейшую форму метода обратного средневзвешенного расстояния [6]:

$$f(x) = U\sum_i y_i w_i,$$

$$U = \frac{1}{\sum_i w_i}, \quad w_i = \frac{1}{\rho(x_i, x)^k}. \tag{1}$$

Здесь y_i — узловое значение приближаемой функции; w_i имеет смысл веса, убывающего при удалении от узла; $\rho(x_i, x)$ — евклидово расстояние от узловой точки до текущей; k — показатель степени, определяющий характер поведения полинома.

В таком виде у метода есть ряд недостатков. Так, в узлах интерполяции производная его основного соотношения равна нулю [7, 8], а метод не позволяет точно улавливать характер поведения функции. Рассмотрим, к примеру, распределение давления по мере удаления от тела (по нормализованной координате ξ) при различных значениях центрального угла σ при числе Маха, равном 1,5 [3] (рис. 1).

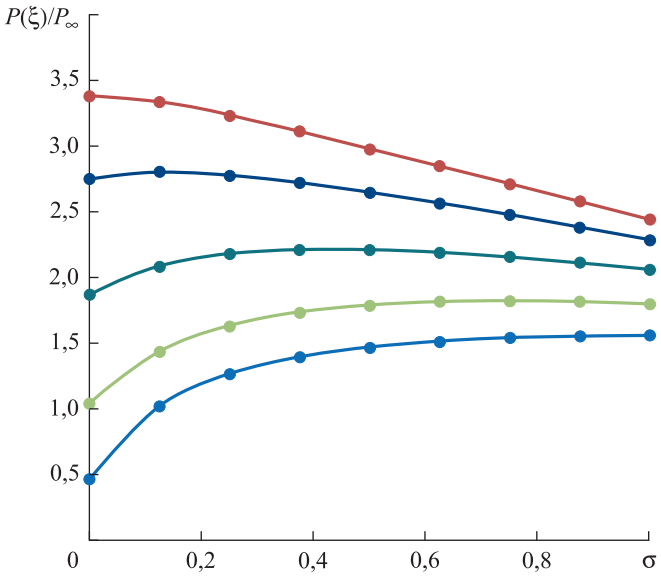


Рис. 1. Распределение давления при $M = 1,5$ и значениях центрального угла σ:

— 5; — 30; — 50; — 70; — 90

По приведенным на графике (см. рис. 1) данным видно, что наклон функции при $\xi = 0$ (вблизи тела) и $\xi = 1$ (около волны) отличен от нуля, — эти значения будем использовать при построении аппроксимирующего полинома Шепарда.

Также из графика мы можем сделать предположение о квадратичном изменении функции вблизи тела и линейном изменении

вблизи волны [9]. Тогда мы можем модифицировать аппроксимирующую функцию (1) и записать ее в следующем виде:

$$f(\xi) = U\sum_i F_i w_i,$$

$$U = \frac{1}{\sum_i w_i}, \quad w_i = \frac{1}{\rho(\xi_i, \xi)^2}, \tag{2}$$

$$F_1 = A\xi^2 + B\xi + C, \;\; F_2 = D\xi + E.$$

Обратим внимание на то, что в узлах интерполяции знаменатель весовой функции обращается в нуль, и поправим функцию с учетом этого факта:

$$f(\xi) = \begin{cases} U\sum_i F_i w_i, & \xi \neq \xi_i; \\ F_i, & \xi = \xi_i. \end{cases} \tag{3}$$

Определим значения некоторых коэффициентов F_1, F_2 функций. Значение ξ на теле равно нулю, поэтому можем записать

$$F_1\big|_{\xi=0} = C = \left.\frac{P}{P_\infty}\right|_b,$$

где индекс b показывает принадлежность точки к телу.

Определим коэффициент C по зависимости, описывающей распределение давления по сфере. Согласно работе [1], давление P/P_0' на поверхности сферы от точки торможения и до отрыва потока рассчитывается по формуле

$$\frac{P}{P_0'} = \left(\frac{1-k\chi}{1+k\chi}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

где $k = \sqrt{\dfrac{\gamma-1}{\gamma+3}}\dfrac{1}{\sigma_{**} - \pi/2}$; σ — угол между осью абсцисс и вектором скорости в произвольной точке на поверхности сферы; σ_{**} — положение звуковой точки на поверхности сферы [10]; $\chi = \sigma - \pi/2$; $\gamma = 1,4$ — показатель адиабаты Пуассона.

Связь этого соотношения с давлением P/P_∞, которое используется в наших рассуждениях, можно установить по формуле Релея:

$$\frac{P_0'}{P_\infty} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \mathrm{M}_\infty^2 \left(\gamma - \frac{\gamma-1}{2\mathrm{M}_\infty^2}\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Соответственно, коэффициент C можно определить как

$$C = \left.\frac{P}{P_\infty}\right|_b = \frac{P_0'}{P_\infty}\frac{P}{P_0'}.$$

Коэффициент B определим из разностного аналога производной около тела:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} &= 2A\xi + B \approx \left(\left.\frac{P}{P_\infty}\right|_{\xi+\Delta\xi} - \left.\frac{P}{P_\infty}\right|_{\xi} \right) \Big/ \Delta\xi, \\ \left.\frac{\partial F_1}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} &= B \approx \left(\left.\frac{P}{P_\infty}\right|_{\Delta\xi} - C \right) \Big/ \Delta\xi. \end{aligned} \tag{4}$$

Значения B определим ниже из двупараметрической регрессии на основе имеющихся данных. Аналогично найдем значения коэффициентов F_2:

$$\left.\frac{\partial F_2}{\partial \xi}\right|_s = D \approx \left(\left.\frac{P}{P_\infty}\right|_1 - \left.\frac{P}{P_\infty}\right|_{1-\Delta\xi} \right) \Big/ \Delta\xi, \quad E = \left.\frac{P}{P_\infty}\right|_1 - D, \tag{5}$$

где индекс s соответствует ударной волне и значению $\xi = 1$; $\left.\frac{P}{P_\infty}\right|_1$ определяется из соотношений Ренкина — Гюгонио [2] при известном наклоне ударной волны (об отходе ударной волны будет сказано ниже).

Коэффициент D, так же как и B, определим из двупараметрической регрессии как функцию числа Маха и центрального угла. Неопределенным остается коэффициент A. Найдем его значение с помощью минимизации функционала метода наименьших квадратов

$$\sum_i \left(\left.\frac{P}{P_\infty}\right|_{\xi_i} - f(\xi_i) \right)^2 \to \min_{A(\sigma, \mathrm{M})}.$$

Минимум функционала может быть найден с высокой точностью с помощью любого метода нулевого порядка.

Определение коэффициентов взвешиваемых функций. По имеющимся данным построим регрессии, описывающие поведение

B и D как функций от числа Маха и центрального угла σ. Исключим из выборки, полученной по табличным данным [3], все значения давления, соответствующие каждому второму числу Маха и нечетным значениям центрального угла σ. Эти данные будем использовать для верификации регрессии. Искать зависимости будем в виде

$$\begin{aligned} B(\mathrm{M},\sigma) &= \alpha_B(\mathrm{M})\sigma^3 + \beta_B(\mathrm{M})\sigma^2 + \gamma_B(\mathrm{M})\sigma + \delta_B(\mathrm{M}), \\ D(\mathrm{M},\sigma) &= \alpha_D(\mathrm{M})\sigma^3 + \beta_D(\mathrm{M})\sigma^2 + \gamma_D(\mathrm{M})\sigma + \delta_D(\mathrm{M}). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь и далее углы σ измеряются в градусах, чтобы не исказить малые коэффициенты при высоких степенях регрессии.

Рассмотрим подробнее процесс построения регрессии [11, 12] на примере коэффициента B. При построении будем использовать данные для чисел Маха, равных 1,5, 4, 8, 20, исключив из выборки, соответственно, числа Маха 2, 6, 10. Исключим также данные, соответствующие значениям 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75 угла σ. Выберем, к примеру, данные для числа Маха, равного 20, и аппроксимируем их полиномиально (рис. 2). Исключенные данные отложим для верификации модели.

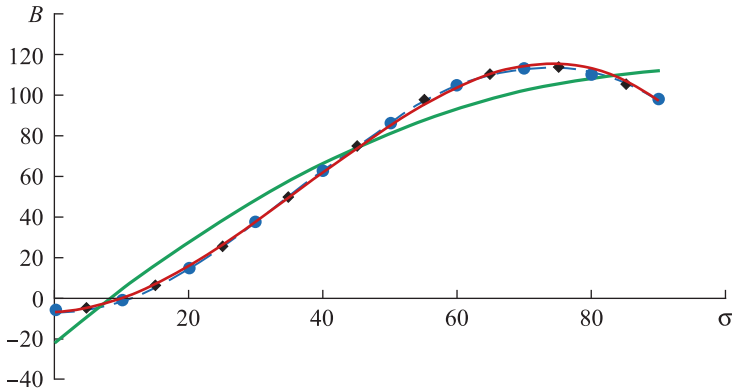


Рис. 2. Сравнение аппроксимирующих полиномов второй (——), третьей (——) и четвертой (– – –) степеней соответственно, построенных по значениям коэффициента B (●) при M = 20; ◆ — исключенные данные

Полином третьей степени достаточно хорошо аппроксимирует искомую функцию при заданном числе Маха (см. рис. 2). Полином четвертой степени лучше описывает поведение искомой функции, но процесс его отыскания сложнее, потому ограничимся предположением о кубическом изменении коэффициента B по центральному углу. Построим кубические зависимости для каждого из неисключенных чисел Маха (рис. 3). Получим четыре соотношения вида (6) с че-

тырьмя разными наборами коэффициентов α_B, β_B, γ_B, δ_B. Рассмотрим подробнее коэффициент α_B.

Отметим на графике полученные α_B при различных значениях числа Маха. По характеру их размещения можно заключить, что зависимость $\alpha_B(\mathrm{M})$ (а также коэффициенты β_B, γ_B, δ_B) носит квадратичный характер.

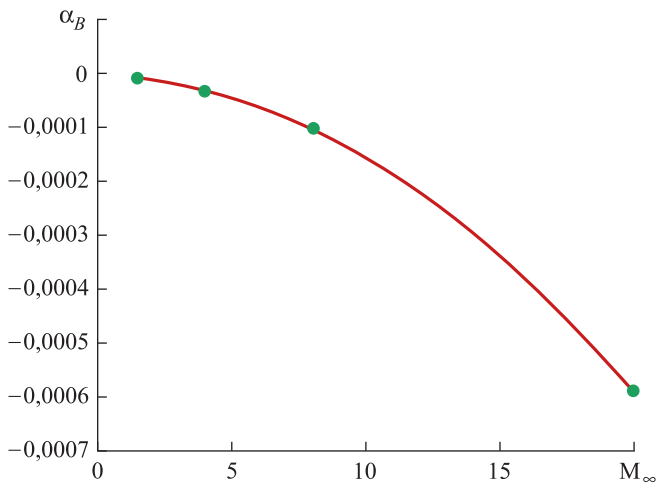


Рис. 3. Зависимость $\alpha_B(\mathrm{M})$:
● — узловые значения; ——— — квадратичная аппроксимация

Построив квадратичные аппроксимации для каждого коэффициента, можно записать следующие соотношения:

$$\alpha_B = -1{,}4042279\cdot 10^{-6}\mathrm{M}^2 - 1{,}2481692\cdot 10^{-6}\mathrm{M} - 2{,}7305601\cdot 10^{-6},$$
$$\beta_B = 1{,}5467478\cdot 10^{-4}\mathrm{M}^2 + 1{,}098984\cdot 10^{-4}\mathrm{M} + 8{,}1942289\cdot 10^{-4},$$
$$\gamma_B = 4{,}0301283\cdot 10^{-4}\mathrm{M}^2 - 0{,}0040106\mathrm{M} - 0{,}0014166,$$
$$\delta_B = -0{,}0203147\mathrm{M}^2 + 0{,}0861394\mathrm{M} - 0{,}4270167.$$

Подставив их в систему (6), получим окончательное соотношение для определения коэффициента B. Следует, однако, проверить, описывает ли построенная регрессия настоящее изменение параметра B, или же просто повторяет узловые значения (так называемое переобучение). Для этого обратимся к данным, не участвовавшим в построении модели. Возьмем значения B для числа Маха, равного 10, и исключенных значений центрального угла, и построим на одном графике полученную зависимость и отложенные данные (рис. 4).

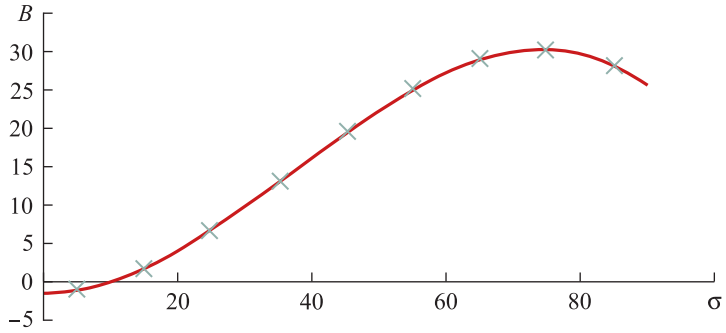


Рис. 4. Сравнение полученной регрессии (——) с исключенными данными (×) при $\mathrm{M} = 10$

Регрессия, в построении которой не участвовали отложенные данные, хорошо описывает их (см. рис. 4). Следовательно, можно сделать вывод о том, что модель достоверно описывает B. Определим коэффициенты второго уравнения системы (6):

$$\alpha_D = -2{,}3409625 \cdot 10^{-6}\mathrm{M}^2 + 1{,}1093017 \cdot 10^{-6}\mathrm{M} + 2{,}5939363 \cdot 10^{-7},$$

$$\beta_D = 2{,}8811573 \cdot 10^{-4}\mathrm{M}^2 - 2{,}0172379 \cdot 10^{-4}\mathrm{M} + 6{,}3008946 \cdot 10^{-5},$$

$$\gamma_D = 9{,}7615728 \cdot 10^{-4}\mathrm{M}^2 + 0{,}0047502\mathrm{M} - 0{,}0083492,$$

$$\delta_D = -0{,}2500483\mathrm{M}^2 - 0{,}1179685\mathrm{M} - 0{,}4118906.$$

Таким образом, удалось определить зависимости для двух из трех коэффициентов в интерполяционной функции. Зависимость для третьего коэффициента сложно сформулировать из практических соображений, поэтому вопрос его получения рассмотрим отдельно.

Определение коэффициента *A*. Для того чтобы построить аппроксимацию искомого давления модифицированным методом Шепарда, необходимо определить еще один коэффициент A. Можно было бы найти его так же, как коэффициенты B и D, исходя из второй производной по ξ вблизи тела, однако данные довольно разрежены, — такой способ может не соответствовать действительности.

Вместо этого определим коэффициент A как функцию от числа Маха и центрального угла σ по тому же набору данных, что и для коэффициентов B и D, из решения задачи минимизации функционала метода наименьших квадратов

$$\sum_i \left(\frac{P}{P_\infty}\bigg|_{\xi_i} - f(\xi_i) \right)^2 \to \min_{A(\sigma,\,\mathrm{M})},$$

где $\left.\frac{P}{P_\infty}\right|_{\xi_i}$ — известные узловые значения; $f(\xi_i)$ определяется соотношением (3).

Необходимо найти такое значение A, которое доставляет минимум функционалу для всех (M, σ) из выборки. Затем, следуя той же методике, что и для коэффициентов B, D (6), построим регрессию для A:

$$\alpha_A = -6{,}2324673 \cdot 10^{-7}\mathrm{M}^2 + 9{,}5658655 \cdot 10^{-7}\mathrm{M} + 2{,}2713325 \cdot 10^{-6},$$
$$\beta_A = 1{,}0672898 \cdot 10^{-4}\mathrm{M}^2 - 2{,}4028788 \cdot 10^{-4}\mathrm{M} - 6{,}0210992 \cdot 10^{-4},$$
$$\gamma_A = 2{,}8202221 \cdot 10^{-4}\mathrm{M}^2 + 0{,}0087692\mathrm{M} - 0{,}0075306,$$
$$\delta_A = -0{,}1939579\mathrm{M}^2 - 0{,}1312538\mathrm{M} - 0{,}3101295.$$

Вид полинома, описывающего A, соответствует (6).

Открытым остается вопрос определения отхода ударной волны от тела. Известно [13], что отход ударной волны на критической линии зависит от числа Маха гиперболически. Предположим, что и отход ударной волны вдоль других радиальных направлений зависит от числа Маха гиперболически:

$$r_w(\mathrm{M}, \sigma) = \frac{F(\sigma)}{\mathrm{M} - 1} + G(\sigma). \qquad (7)$$

Здесь $r_w(\mathrm{M}, \sigma)$ — отход ударной волны от тела по радиальному направлению в зависимости от значения числа Маха и центрального угла σ, вычисляемый в долях радиуса сферы. Зависимости $F(\sigma)$, $G(\sigma)$ можно построить исходя из данных, приведенных в работе [3], как и для коэффициентов выше по аналогии с формулами (6):

$$F(\sigma) = 2{,}238353 \cdot 10^{-8}\sigma^4 - 2{,}340217 \cdot 10^{-6}\sigma^3 + 1{,}4520624 \cdot 10^{-4}\sigma^2 - 0{,}001233\sigma + 0{,}2564114,$$
$$G(\sigma) = 7{,}6110835 \cdot 10^{-9}\sigma^4 - 7{,}0587313 \cdot 10^{-7}\sigma^3 + 5{,}0361929 \cdot 10^{-5}\sigma^2 - 4{,}8618782 \cdot 10^{-4}\sigma + 1{,}1043605.$$

Зная отход ударной волны от тела, можно легко вычислить ее наклон в конкретной точке и определить давление на поверхности ударной волны, используемое в формуле (5), из соотношений Ренкина — Гюгонио [2, 14].

Анализ результатов. Вычислив все параметры модели, сравним данные, не принимавшие участие в обучении модели [3], с результа-

тами, полученными с помощью модифицированного метода Шепарда с обученными коэффициентами (рис. 5). Возьмем для примера число Маха, равное 10 (см. рис. 5). На рисунке линиями обозначены результаты, полученные с помощью модели, точками — данные, не принимавшие участия в построении модели.

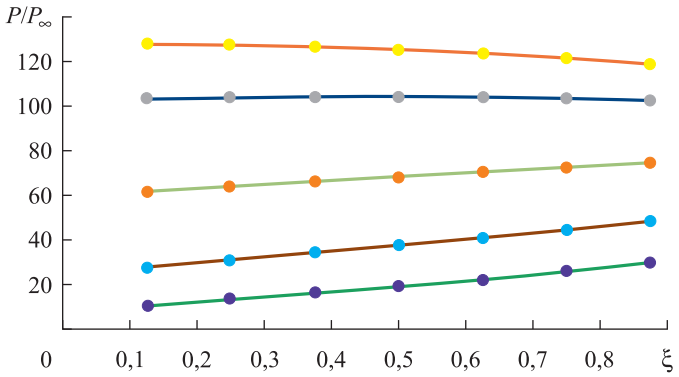


Рис. 5. Сравнение полученной зависимости с не использовавшимися при обучении модели табличными данными при M = 10 и σ, равном 5 (—, ●), 25 (—, ●), 45 (—, ●), 65 (—, ●) и 85 (—, ●)

Из графика (см. рис. 5) видно, что модель достаточно точно повторяет распределение давления при тех параметрах, на которых модель не обучалась. Средняя относительная погрешность не превысила 1 % от измеряемых величин [15].

Заключение. Полученная модель адекватно описывает распределение давления в ударном слое около сферы и согласуется с данными численных экспериментов, которые не были использованы при ее построении. Описанный метод построения зависимости на основе имеющихся данных прост в применении и обладает высокой точностью. Расчет давления по полученному соотношению не требует существенных временных затрат, в отличие от точных вычислительных моделей, что показывает целесообразность дальнейшего обобщения имеющихся в открытом доступе результатов экспериментов и точных расчетов. Описанные преимущества метода позволяют использовать его как самостоятельно для таргетированного определения аэродинамических характеристик летательных аппаратов [16], так и в качестве приближения для высокоточных методов [17]. В дальнейшем авторы планируют адаптировать зависимость для реальных высокотемпературных газов [18, 19], что расширит область применимости модели.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Котенев В.П. Точная зависимость для определения давления на сфере при произвольном числе Маха сверхзвукового набегающего потока. *Математическое моделирование*, 2014, т. 26, № 9, с. 141–148.

[2] Абрамович Г.Н. *Прикладная газовая динамика. В 2 ч. Ч. 1*. Москва, Наука, Гл. ред. физ-мат. лит, 1991, 600 с.

[3] Любимов А.Н., Русанов В.В. *Течения газа около тупых тел. В 2 т. Т. 2*. Москва, Наука, 1970, с. 30–49.

[4] Дрейпер Н., Смит Г. *Прикладной регрессионный анализ.* Москва, Диалектика, 2007, 912 с.

[5] Фёрстер Э., Рёнц Б. *Методы корреляционного и регрессионного анализа*. Москва, Финансы и статистика, 1981, 302 с.

[6] Масюков А.В. Модификации интерполяционного метода Шепарда на основе фундаментальных решений. *Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика*, 2007, № 4, с. 99–112.

[7] Shepard D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference*, 1968, pp. 517–524.

[8] Тонких Е.Г., Сапожников Д.А. Определение элемента образующей контура тела вращения минимального сопротивления при ограничении на изменение внутреннего объема тела. *Молодежный научно-технический вестник*, 2017, № 5. URL: http://sntbul.bmstu.ru/doc/859353.html (дата обращения 11.12.2017).

[9] Вапник В.Н. *Восстановление зависимостей по эмпирическим данным*. Москва, Наука, 1979, 448 с.

[10] Котенев В.П., Сысенко В.А. Расчет давления при обтекании затупленных тел с малыми сверхзвуковыми скоростями. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 7, с. 58–67.

[11] Флах П. *Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных*. Москва, ДМК-Пресс, 2015, 400 с.

[12] Witten I.H., Frank E. *Data mining. Practical machine learning tools and techniques*. Morgan Kaufmann Publishers, 2005, 525 p.

[13] Базжин А.П., Благосклонов В.И., Минайлос А.Н., Пирогова С.В. Обтекание сферы сверхзвуковым потоком совершенного газа. *Ученые записки ЦАГИ*, 1971, т. 2, № 3, с. 95–100.

[14] Димитриенко Ю.И., Котенев В.П., Захаров А.А. *Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2011, 280 с.

[15] Базилевский М.П. Аналитические зависимости между коэффициентами детерминации и соотношением дисперсий ошибок исследуемых признаков в модели регрессии Деминга. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 10, с. 104–116.

[16] Котенев В.П., Рацлав Р.А., Сапожников Д.А., Чернышев И.В. Метод классификации элементов поверхности летательного аппарата для численно-аналитического решения задач аэродинамики. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 3, с. 83–104.

[17] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А. Применение метода RKDG для численного решения трехмерных уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 8, с. 75–91.

[18] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А., Строганов А.С. Численное моделирование сопряженных аэрогазодинамических и термодинамиче-

ских процессов в композитных конструкциях высокоскоростных летательных аппаратов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 3–24.

[19] Dimitrienko Y., Koryakov M., Zakharov A. Application of finite difference TVD methods in hypersonic aerodynamics. *Finite Difference Methods, Theory and Applications*, 2014, pp. 161–168.

Статья поступила в редакцию 05.12.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Котенев В.П., Пучков А.С., Сапожников Д.А., Тонких Е.Г. Применение методов машинного обучения для моделирования распределения давления в возмущенной области около сферы, обтекаемой невязким потоком. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 4, с. 60–72.

Котенев Владимир Пантелеевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, начальник отдела аэродинамики в АО «ВПК «НПО машиностроения». Автор около 60 научных работ в области прикладной математики, численных и аналитических методов исследования течения газа при обтекании поверхности летательных аппаратов.

Пучков Андрей Сергеевич — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, техник отдела аэродинамики в АО «ВПК «НПО машиностроения».

Сапожников Денис Алексеевич — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер отдела аэродинамики в АО «ВПК «НПО машиностроения», автор работ в области численных, аналитических и статистических методов исследования течения газа при обтекании поверхности летательных аппаратов.

Тонких Евгений Геннадьевич — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, техник отдела аэродинамики в АО «ВПК «НПО машиностроения».

Simulation of the pressure distribution in the disturbed region near the sphere streamlined by the inviscid flotation by means of the machine learning methods

© V.P. Kotenev[1, 2], A.S. Puchkov[1, 2], D.A. Sapozhnikov[1, 2], E.G. Tonkikh[1, 2]

[1]JSC “MIC “NPO Mashinostroyenia”, Reutov, Moscow region, 143966, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article introduces a dependency for the pressure distribution in the disturbed region near the sphere streamlined by the flow of the supersonic inviscid gas, obtained when modifying the Shepard’s Method. We use known ratios for the pressure on the body and the shockwave as well as data from the numerical experiments. We have compared the results with the data not used in the learning process of the dependency coefficients. This comparison proves high confidence of the model obtained.

Keywords: *Shepard’s method, supersonic gas flow, multivariable regression*

REFERENCES

[1] Kotenev V.P. *Matematicheskoe Modelirovanie — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, vol. 26, no. 9, pp. 141–148.

[2] Abramovich G.N. *Prikladnaya gazovaya dinamika. V 2 ch. Ch. 1* [Applied gas dynamics. In 2 parts. Part 1]. Moscow, Nauka, Gl. red. fiz-mat. lit Publ., 1991, 600 p.

[3] Lyubimov A.N., Rusanov V.V. *Techeniya gaza okolo tupykh tel. V 2 t. T. 2.* [Gas flow near the stub bodies. In 2 vols. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1970, pp. 30–49.

[4] Draper N.R., Smith H. *Applied regression analysis (Wiley series in probability and statistics).* Wiley-Interscience Publ., 1998, 736 p. [In Russ.: Draper N., Smith H. *Prikladnoy regressionnyy analiz*. Moscow, Dialektika Publ., 2007, 912 p.].

[5] Ferster E., Renc B. *Methoden der Korrelation — und Regressiolynsanalyse*. [In Russ.: Ferster E., Renc B. *Metody korreliatsionnogo i regressionnogo analiza* [The methods of correlation and regression analysis]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1981, 302 p.].

[6] Masyukov A.V. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Prikladnaya matematika — Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics*, 2007, no. 4, pp. 99–112.

[7] Shepard D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference*, 1968, pp. 517–524.

[8] Tonkikh E.G., Sapozhnikov D.A. *Molodezhnyy nauchno-tekhnicheskiy vestnik (Youth scientific and technical bulletin)*, 2017, no. 5. Available at: http://sntbul.bmstu.ru/doc/859353.html (accessed January 11, 2017).

[9] Vapnik V.N. *Vosstanovlenie zavisimostey po empiricheskim dannym* [Restoring dependencies using the empirical data]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 448 p.

[10] Kotenev V.P., Sysenko V.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 7, pp. 58–67.

[11] Flach P. *Machine Learning: The art and science of algorithms that make sense of data*. Cambridge, 2012, 349 p. [In Russ.: Flach P. *Mashinnoe obuchenie. Nauka i iskusstvo postroeniya algoritmov, kotorye izvlekayut znaniya iz dannykh. Uchebnik.* Moscow, DMK Press Publ., 2015, 400 p.].

[12] Witten I.H., Frank E. *Data mining. Practical machine learning tools and techniques*. Morgan Kaufmann Publishers, 2005, 525 p.

[13] Bazzhin A.P., Blagosklonov V.I., Minaylos A.N., Pirogova S.V. *Uchenye zapiski TsAGI — TsAGI Science Journal*, 1971, vol. 2, no. 3, pp. 95–100.

[14] Dimitrienko Yu.I., Kotenev V.P., Zakharov A.A. *Metod lentochnykh adaptivnykh setok dlya chislennogo modelirovaniya v gazovoy dinamike* [The method of belt adaptive grids for computational modelling in gas dynamics]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2011, 280 p.

[15] Bazilevskiy M.P. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 10, pp. 104–116.

[16] Kotenev V.P., Ratslav R.A., Sapozhnikov D.A., Chernyshev I.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 3, pp. 83–104.

[17] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 8, pp. 75–91.

[18] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A., Stroganov A.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 3, pp. 3–24.

[19] Dimitrienko Y., Koryakov M., Zakharov A. *Finite Difference Methods, Theory and Applications*, 2014, pp. 161–168.

Kotenev V.P., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Head of the Department of Aerodynamics at JSC "MIC "NPO Mashinostroyenia". Author of over 60 scientific works in the field of applied mathematics, numerical and analytical methods for researching the flow of gas when streamlining the aircraft surface.

Puchkov A.S., student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Technician of the Department of Aerodynamics at JSC "MIC "NPO Mashinostroyenia".

Sapozhnikov D.A., post-graduate student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Engineer of the Department of Aerodynamics at JSC "MIC "NPO Mashinostroyenia". Author of a few scientific works in the field of applied mathematics, numerical and analytical methods for researching the flow of gas when streamlining the aircraft surface.

Tonkikh E.G., student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Technician of the Department of Aerodynamics at JSC "MIC "NPO Mashinostroyenia".