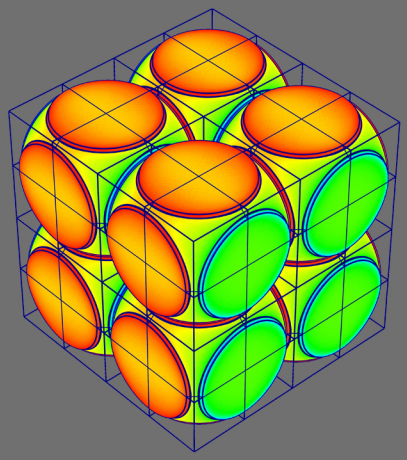
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Еголева Е.С. Численное решение обратных трехмерных задач восстановления нагрузок, действующих на композитные элемен- ты конструкций. Математическое моделирование и численные методы, 2017, No 4, с. 48–59.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/149/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
25.11.2026 12:24:13

УДК 539.3 DOI 10.18698/2309-3684-2017-4-4859

Численное решение обратных трехмерных задач восстановления нагрузок, действующих на композитные элементы конструкций

© Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин, Е.С. Еголева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен метод численного решения обратных трехмерных задач восстановления полей нагрузок, действующих на композитные элементы конструкций, на основе известной информации об их перемещениях на некоторой поверхности. Задачи данного типа возникают при создании систем встроенной диагностики перемещений конструкций и интеллектуальных композитных конструкций. Восстановленное поле нагрузок, действующих на части внешней поверхности композитной конструкции, используется для расчета напряженно-деформированного состояния и прогнозирования ресурса конструкции. Предложенный метод базируется на альтернирующем алгоритме решения обратных задач восстановления нагрузок в задаче теории упругости и методе конечного элемента для решения прямых задач теории упругости. Рассмотрен пример решения обратной задачи восстановления нагрузок, воздействующих на элементы конструкций из слоисто-волокнистых композиционных материалов.

Ключевые слова: *численное моделирование, обратные задачи восстановления нагрузок, композитные конструкции, метод конечных элементов*

Введение. В последнее время становится более актуальным решение обратных задач механики деформируемого твердого тела вследствие растущего интереса к проблемам создания методов и средств диагностики повреждаемости конструкций, идентификации характеристик материалов в конструкциях [1–6]. Сравнительно недавно стали уделять больше внимания еще одному классу обратных задач механики — задачам восстановления нагрузок, действующих на те элементы конструкции, в которых предполагается известной информация о перемещениях, измеряемых на некоторой части поверхности конструкции [7–13]. Определение нагрузок (главным образом, давления), действующих на конструкцию, позволяет прогнозировать долговечность и ресурс конструкций непосредственно в процессе эксплуатации, что имеет особое значение для композитных элементов конструкций [14, 15]. Методы решения обратных задач восстановления нагрузок предложены в работах [9–11, 13].

Цели настоящей работы — развитие альтернирующего метода решения обратных задач для дифференциальных уравнений [11, 16] с использованием метода конечных элементов для решения прямых задач механики композитных конструкций, а также его применение для восстановления нагрузок, действующих на элементы лопасти несущего винта вертолета [17, 18].

Постановка обратной задачи восстановления нагрузок. Сформулируем постановку обратной задачи механики деформируемого твердого тела применительно к расчету силовых факторов, действующих на композитные элементы конструкции в процессе эксплуатации, которую запишем в безразмерном виде [19]:

$$
\begin{aligned}
&\nabla_j \sigma_{ij} = 0, \\
&\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j\right), \\
&\sigma_{ij} = C_{ijkl}(x_m)\varepsilon_{kl}, \\
&\Sigma_{\sigma\alpha} : \sigma_{ij} n_j = S_{i\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \\
&\Sigma_u : u_i = U_{ei}, \\
&\Sigma_S : \sigma_{LJ} n_J = 0, \quad u_L = 0, \quad J = 1, 2, 3, \quad L \in \{1, 2, 3\}, \quad L \neq J.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Система (1) состоит из уравнений равновесия, соотношений Коши, обобщенного закона Гука, граничных условий на поверхностях $\Sigma_{\sigma\alpha}$ и Σ_S конструкции и условий на внутренней поверхности Σ_u конструкции. Здесь введены следующие обозначения: $\nabla_j = \partial / \partial x_j$ — оператор дифференцирования по декартовым координатам; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; u_j — компоненты вектора перемещений; $C_{ijkl}(x_m)$ — компоненты тензора модулей упругости, который полагается различным для разных элементов конструкций, т. е. зависящим от координат x_i; $\Sigma = \Sigma_{\sigma\alpha} + \Sigma_S + \Sigma_u$ — вся поверхность конструкции; n_i — компоненты вектора нормали к поверхности; V — вся область конструкции. Тензоры модулей упругости имеют по 21 независимой компоненте [15, 16]. Методика расчета компонент тензора модулей упругости для композитов описана в работах [20–24].

В задаче (1) известны: компоненты C_{ijkl} тензора модулей упругости; компоненты S_{ej} вектора усилий; компоненты u_{el} вектора перемещений на части Σ_S конструкции; компоненты S_{i2} вектора усилий на части $\Sigma_{\sigma 2}$ поверхности конструкции; перемещения U_{ei} на поверхности Σ_u во внутренней части V конструкции.

В задаче (1) неизвестны: компоненты σ_{ij} тензора напряжений; компоненты ε_{ij} тензора деформаций; компоненты u_j вектора пере-

мещений в области V; компоненты S_{i1} вектора усилий на части $\Sigma_{\sigma 1}$ поверхности конструкции.

Задача (1) относится к классу граничных обратных задач механики. Основные обозначения поверхностей, на которых заданы известные и неизвестные функции, показаны на рис. 1. Будем полагать, что поверхность Σ_u, где заданы перемещения, разделяет область V всей конструкции на подобласти V_1 и V_2 (см. рис. 1), каждая из которых содержит по одной поверхности $\Sigma_{\sigma 1}$ и $\Sigma_{\sigma 2}$ соответственно.

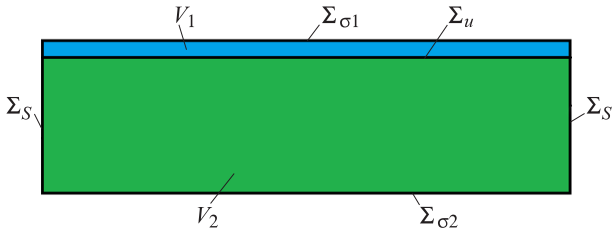


Рис. 1. Схематичное обозначение граничных условий в обратной задаче

Альтернирующий метод решения задачи (1). Введем обозначение для дифференциальных операторов:

$$Lu_i = \nabla_j (C_{ijkl} \nabla_k u_l). \tag{2}$$

Построим итерационный алгоритм решения задачи (1), используя альтернирующий метод решения задач для дифференциальных уравнений в частных производных [16].

На нулевой итерации рассмотрим задачу в области V_2:

$$\begin{aligned} &Lu_i^{(0)} = 0, \ \text{в} \ V_2, \\ &\Sigma_{\sigma 2} : \sigma_{ij}^{(0)} n_j = S_{i2}, \\ &\Sigma_u : u_i^{(0)} = U_{ei}, \\ &\Sigma_S : \sigma_{ji}^{(0)} n_i = S_{ej}, \qquad u_l^{(0)} = u_{el}, \qquad i, j, k, l = 1, \ldots, 3. \end{aligned} \tag{3}$$

В задаче (3) заданы все граничные условия на всех границах области V_2, где $\Sigma_2 = \Sigma_{\sigma 2} + \Sigma_u + \Sigma_S$.

После решения этой задачи находим перемещения $u_i^{(0)}$ и напряжения $\sigma_{ij}^{(0)}$ в области V_2, в том числе и на поверхности Σ_u, которая также является частью границы области V_1. Обозначим вектор напряжений $\sigma_{ij}^{(0)} n_j = S_{ui}^{(0)}$ на части поверхности Σ_u, составленный после решения задачи нулевой итерации.

Теперь сформулируем задачу первого приближения в области V_1:

$$\begin{aligned} &Lu_i^{(1)} = 0 \ \text{ в } \ V_1, \\ &\Sigma_{\sigma 1} : u_i^{(1)} = u_{i1}^{(0)}, \\ &\Sigma_u : \sigma_{ij}^{(1)} n_j = S_{ui}^{(0)}, \\ &\Sigma_S : \sigma_{ji}^{(1)} n_i = S_{ej}, \qquad u_l^{(1)} = u_{el}, \qquad i, j, k, l = 1, \ldots, 3. \end{aligned} \tag{4}$$

где $u_{i1}^{(0)}$ — некоторое начальное приближение неизвестного вектора перемещений u_{i1}.

Эта задача, как и задача нулевого приближения, является корректной и может быть решена стандартными методами, например методом конечных элементов. После решения задачи первого приближения находим перемещения $u_i^{(1)}$ и напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$ в области V_1, в том числе и на поверхности Σ_u.

Рассмотрим задачу второго приближения в области V_1:

$$\begin{aligned} &Lu_i^{(2)} = 0 \ \text{ в } \ V_1, \\ &\Sigma_{\sigma 1} : \sigma_{ij}^{(2)} n_j = S_i^{(1)}, \\ &\Sigma_u : u_i^{(2)} = u_i^{(1)}, \\ &\Sigma_S : \sigma_{ji}^{(2)} n_i = S_{ej}, \qquad u_l^{(2)} = u_{el}, \qquad i, j, k, l = 1, \ldots, 3. \end{aligned} \tag{5}$$

После решения этой задачи находим перемещения $u_i^{(2)}$ и напряжения $\sigma_{ij}^{(2)}$ в области V_1, в том числе и на поверхности $\Sigma_{\sigma 1}$, являющейся частью границы области V_1.

Образуем задачу третьего приближения в области V_1:

$$\begin{aligned} &Lu_i^{(3)} = 0 \ \text{ в } \ V_1, \\ &\Sigma_{\sigma 1} : u_i^{(3)} = u_i^{(2)}, \\ &\Sigma_u : \sigma_{ij}^{(3)} n_j = S_{ui}^{(0)}, \\ &\Sigma_S : \sigma_{ji}^{(3)} n_i = S_{ej}, \qquad u_l^{(3)} = u_{el}, \qquad i, j, k, l = 1, \ldots, 3. \end{aligned} \tag{6}$$

Задача (6), как и задача второго приближения (5), является корректной и может быть решена стандартными методами.

Далее алгоритм повторяется до достижения заданной точности.

Для решения прямых задач (3)–(6) был применен метод конечных элементов с использованием программного обеспечения на платфор-

ме SMCM, разработанного в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Результаты численного решения обратной задачи восстановления нагрузок для элементов конструкций лопасти несущего винта вертолета. Разработанный алгоритм решения обратной задачи применялся для восстановления элемента композитной панели, содержащей фрагмент усиливающей жесткости, нагруженный продольной растягивающей нагрузкой. Панель выполнена из слоисто-волокнистого композита (углепластика) со схемой армирования [0/90/+45/–45]. Фрагмент, усиливающий жесткость — трехслойная пластина, обшивки которого состоят из углепластика, также со схемой армирования [0/90/+45/–45]. Заполнитель образован сотовыми структурами.

На рис. 2 показана компьютерная 3D-модель композитной панели, на рис. 3 — конечно-элементная сетка для этой панели.

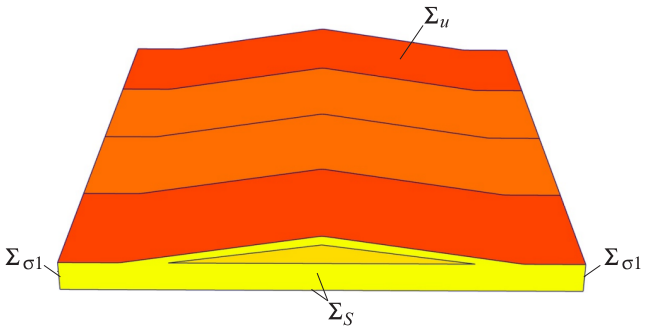


Рис. 2. 3D-модель композитной панели с фрагментом, усиливающим жесткость

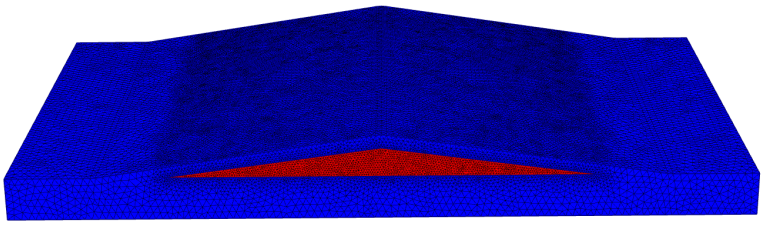


Рис. 3. Конечно-элементная сетка для композитной панели с фрагментом, усиливающим жесткость

Была рассмотрена задача растяжения композитной панели продольной нагрузкой. Неизвестной в задаче (1) предполагалась величина S растягивающего усилия ($S_i = \pm S\delta_{i1}$) на торцах панели $\Sigma_{\sigma 1}$. На нижней поверхности фиксировалось нормальное перемещение $u_3 = 0$, остальные части поверхности Σ_σ композитной панели были свободны

от нагрузок. Поле перемещений U_{ei} считалось известным на некоторой глубине от верхней поверхности Σ_u (см. рис. 2) элемента панели. Числовые значения U_{ei} задавались путем предварительного решения прямой задачи о продольном растяжении панели осевым усилием $S_i = \pm S\delta_{i1}$ ($S = 0{,}1$ МПа).

Геометрические размеры панели:

Длина, L, м 1,6
Ширина, мм 0,6
Толщина, мм
без усиливающего жесткость фрагмента 7
с усиливающим жесткость фрагментом 15

Обшивки трехслойного усиливающего жесткость фрагмента и основной части композитной панели представляли собой четырехслойный пакет из материалов СМ-12026 (углы армирования 0° и 90°) и СМ-42020 (углы армирования 45° и $-45°$) со связующим Dion 12026. В качестве сотового заполнителя в усиливающем фрагменте был выбран алюминиевый. Упругие свойства углепластика для основной части композитной панели и обшивок усиливающего фрагмента панели приведены в табл. 1, упругие свойства указанного заполнителя — в табл. 2.

Таблица 1

Упругие свойства углепластика для основной части композитной панели и обшивок усиливающего фрагмента панели

E_1, ГПа	E_2, ГПа	E_3, ГПа	G_{12}, ГПа	G_{13}, ГПа	G_{23}, ГПа	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
47,752	9,039	47,752	3,831	10,431	3,831	0,315	0,158	0,059

Таблица 2

Упругие свойства алюминиевого сотового заполнителя

E_1, ГПа	E_2, ГПа	E_3, ГПа	G_{12}, ГПа	G_{13}, ГПа	G_{23}, ГПа	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
7,625	0,631	0,631	0,556	0,556	0,170	0,145	0,145	0,251

В качестве начального приближения неизвестной величины S ($S_i = \pm S\delta_{i1}$) усилия было произвольно задано некоторое значение $S^{(0)}$, равное –0,1 ГПа. Его знак и величина были выбраны такими, чтобы соответствующее напряженно-деформированное состояние пластины значительно отличалось от восстанавливаемого.

Распределение продольных перемещений для задачи начального приближения приведено на рис. 4, *а*, на промежуточной (14-й из 60)

итерации — на рис. 4, *б*. На рис. 5 показано распределение для задачи на последней итерации $(N = 60)$, на рис. 6 — распределение восстановленного поля растягивающих усилий S на торце пластины.

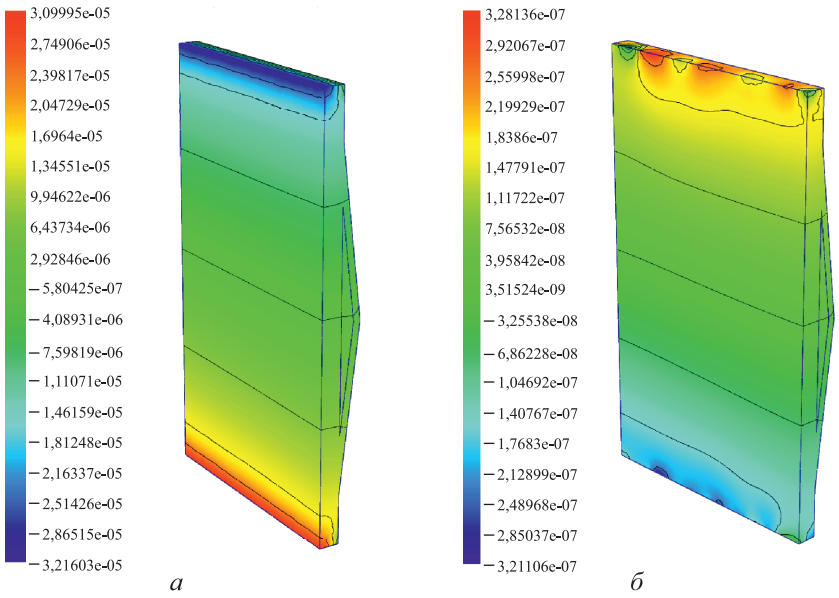


Рис. 4. Распределение продольных перемещений u_1 (м) для задач начального (*а*) и промежуточного (*б*) приближения

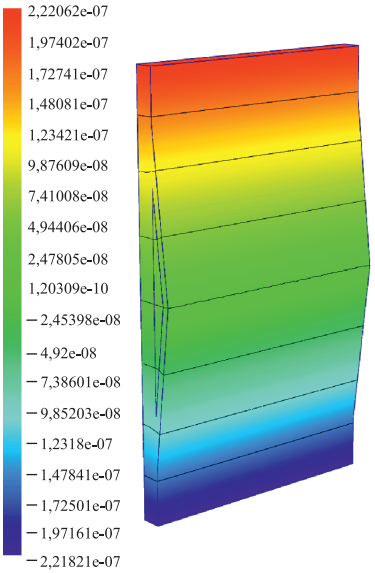


Рис. 5. Распределение продольных перемещений u_1 (м) для задачи на последней итерации

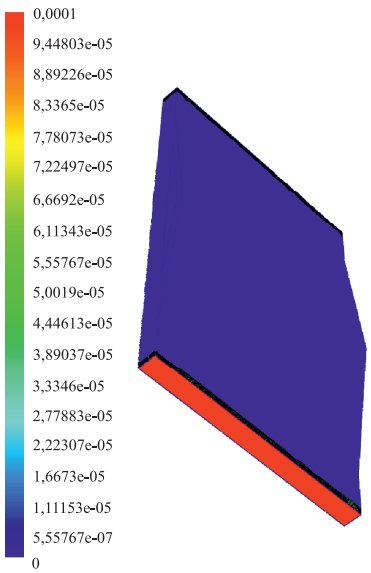


Рис. 6. Распределение восстановленного поля растягивающих усилий S (ГПа)

Сравнение значения усилия $S^{(N)}$, вычисленного на конечном приближении метода, с точным значением S, показало, что предложенный алгоритм метода обеспечивает восстановление поля распределения нагрузок точностью до 2…3 %, вполне достаточной для обратных задач.

Заключение. Разработаны методика и программное обеспечение для решения обратной задачи восстановления нагрузок, действующих на композитные элементы конструкций. На примере численного решения задачи восстановления нагрузок, действующих на композитную панель с усиливающим жесткость фрагментом, показано, что разработанные методика и программное обеспечение позволяют восстанавливать поле распределения нагрузок типа заданного давления и сосредоточенных сил с точностью до 2–3 %.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных наук (грант № 15-08-04893).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Яхно В.Г. *Обратные коэффициентные задачи для дифференциальных уравнений теории упругости*. Новосибирск, Наука, 1990, 304 с.

[2] Голушко С.К., Немировский Ю.В. *Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2008, 432 с.

[3] Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи*. Новосибирск, Сибирское науч. изд-во, 2009, 457 с.

[4] Ватульян А.О. *Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2007, 224 с.

[5] Sellier M. An iterative method for the inverse elasto-static problem. *Journal of Fluids and Structures*, 2011, vol. 27, iss. 8, pp. 1461–1470.

[6] Ellabib A., Nachaoui A. An iterative approach to the solution of an inverse problem in linear elasticity. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, vol. 77, iss. 2–3, pp. 189–201.

[7] Chock J.M.K., Kapania R.K. Load updating for finite element models. *AIAA Journal*, 2003, vol. 41, no. 9, pp. 1667–1673.

[8] Law S.S., Fang Y.L. Moving force identification: optimal state estimation approach. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, vol. 239, no. 2, pp. 233–254.

[9] Li J., Kapania R. Load updating for finite element models using reduced number of unknown load coefficients. *Paper IAA-2004-4559, 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, August 30 – September 1, 2004, Albany, New York*, pp. 1–16.

[10] Li Jing. *Inverse problems in structural mechanics*. The Ph.D. in Aerospace Engineering dissertation. Virginia Polytechnic Institute and State University, 2005. URL: https://theses.lib.vt.edu/theses/available/etd-12132005-163943/unrestricted/phddissertation_jing.pdf (дата обращения 20.12.2017).

[11] Ватульян А.О., Козаренко А.И. О граничной обратной задаче для конечного упругого тела. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки*, 2004, № 3, с. 34–38.

[12] Fachinotti V.D., Albanesi A.E., Martínez J.M., José M. Valle inverse finite element modeling of shells using the degenerate solid approach. *Computers & Structures*, September 2015, vol. 157. DOI 10.1016/j.compstruc.2015.05.013

[13] Pacheco C.C., Dulikravich G.S., Vesenjak M., Borovinšĕk M., Duarte I.M.A., Jha R., Reddy S.R., Orlande H.R.B., Colaço M.J. Inverse parameter identification in solid mechanics using Bayesian statistics, response surfaces and minimization. *Technische mechanik*, 2016, vol. 36, no. 1–2, pp. 120–131.

[14] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.П. Расчет сопротивления усталости композитов на основе «химического» критерия длительной прочности. *Вопросы оборонной техники*, 2002, № 1/2, с. 21–25.

[15] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2 (10), с. 3–23.

[16] Козлов В.А., Мазья В.Г., Фомин А.В. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1991, т. 31, № 1, с. 64–74.

[17] Постнов В.И., Плетинь И.И., Вешкин Е.А., Старостина И.В., Стрельников С.В. Технологические особенности производства тонколистовых обшивок лопастей вертолета из конструкционного стеклопластика ВПС-53К. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, 2016, т. 18, № 3–4, с. 619–627.

[18] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А., Ерасов В.С., Яковлев Н.О. Моделирование и разработка трехслойных композиционных материалов с сотовым заполнителем. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2014, № 5, с. 66–82.

[19] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды*. *В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[20] Dimitrienko Yu.I. A structural thermomechanical model of textile composite materials at high temperatures. *Composite science and technologies*, 1999, vol. 59, no. 7, pp. 1041–1053.

[21] Dimitrienko Yu.I. Modelling of the mechanical properties of composite materials under high temperatures. Part 1. Matrix and fibres. *Applied Composite Materials*, 1997, vol. 4, no. 4, pp. 219–237.

[22] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 259–282.

[23] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.Д. Моделирование динамических процессов деформирования гибких тканевых композиционных материалов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 5 (29). DOI 10.18698/2308-6033-2014-5-1236

[24] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.Д., Сборщиков С.В. Численное моделирование вязкоупругих характеристик пенопластов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, № 11 (59), с. 68–77. DOI 10.18698/2308-6033-2016-11-1555

Статья поступила в редакцию 03.09.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Еголева Е.С. Численное решение обратных трехмерных задач восстановления нагрузок, действующих на композитные элементы конструкций. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 4, с. 48–59.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 370 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Юрин Юрий Викторович — канд. физ.-мат.наук, научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 14 работ в области механики композитов. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Еголева Екатерина Сергеевна — инженер АО ВПК «НПО машиностроения». Автор ряда работ по моделированию композиционных материалов.
e-mail: eegoleva@mail.ru

Numerical solution of inverse three-dimensional problems of recovering the loads acting upon composite structural elements

© Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin, E.S. Egoleva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article proposes a numerical method for solving the inverse three-dimensional problems of recovering the fields of loads acting upon composite structural elements based on the results of the experimental diagnostics of structural displacements on a certain surface. The problems of this type arise when creating the systems of the built-in diagnostics of structural movements and intelligent composite structures. The restored field of loads acting upon the parts of the outer surface of the composite structure is used to calculate the stress-strain state and forecast the structural life. The proposed method uses an alternating algorithm for solving the inverse problems of restoring loads in the problem of elasticity theory, in combination with the finite element method for solving the direct problems in the theory of elasticity. We consider an example of solving the inverse problem of restoring loads acting on the structural elements made from layered fibrous composite materials.

Keywords: *numerical modeling, the inverse problems of restoring loads, composite structures, finite elements method*

REFERENCES

[1] Yakhno V.G. *Obratnye koeffitsientnye zadachi dlya differentsialnykh uravneniy teorii uprugosti* [Inverse coefficient problems for differential equations of the elasticity theory]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1990, 304 p.

[2] Golushko S.K., Nemirovskiy Yu.V. *Pryamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugikh kompozitnykh plastin i obolochek vrashcheniya* [Direct and inverse problems of the mechanics of elastic composite plates and revolution shells]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 432 p.

[3] Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and ill-posed tasks]. Novosibirsk, Siberian Scientific Publ., 2009, 457 p.

[4] Vatulyan A.O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse problems in the mechanics of a deformable solid]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 224 p.
[5] Sellier M. *Journal of Fluids and Structures*, 2011, vol. 27, iss. 8, pp. 1461–1470.
[6] Ellabib A., Nachaoui A. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, vol. 77, iss. 2–3, pp. 189–201.
[7] Chock J.M.K., Kapania R.K. *AIAA Journal*, 2003, vol. 41, no. 9, pp. 1667–1673.
[8] Law S.S., Fang Y.L. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, vol. 239, no. 2, pp. 233–254.
[9] Li J., Kapania R. Load updating for finite element models using reduced number of unknown load coefficients. *Paper IAA-2004-4559, 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference,* August 30 — September 1, 2004, Albany, New York, pp. 1–16.
[10] Li Jing. *Inverse problems in structural mechanics.* The Ph.D. in Aerospace Engineering dissertation. Virginia Polytechnic Institute and State University, 2005. Available at: https://theses.lib.vt.edu/theses/available/etd-12132005-163943/unrestricted/phddissertation_jing.pdf (accessed December 20, 2017).
[11] Vatulyan A.O., Kozarenko A.I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Ser. Estestvennye nauki — University News, North-Caucasian Region, Natural Sciences Series*, 2004, no. 3, pp. 34–38.
[12] Fachinotti V.D., Albanesi A.E., Martínez J.M., José M. *Computers & Structures*, September 2015, vol. 157. DOI 10.1016/j.compstruc.2015.05.013
[13] Pacheco C.C., Dulikravich G.S., Vesenjak M., Borovinšĕk M., Duarte I.M.A., Jha R., Reddy S.R., Orlande H.R.B., Colaço M.J. *Technische mechanik*, 2016, vol. 36, no. 1–2, pp. 120–131.
[14] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.P. *Voprosy oboronnoy tekhniki — Military Enginery*, 2002, no. 1/2. pp. 21–25.
[15] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2 (10), pp. 3–23.
[16] Kozlov V.A., Mazya V.G., Fomin A.V. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1991, vol. 31, no. 1, pp. 64–74.
[17] Postnov V.I., Pletin I.I., Veshkin E.A., Starostina I.V., Strelnikov S.V. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk — Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2016, vol. 18, no. 3–4, pp. 619–627.
[18] Dimitrienko Yu.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Prozorovskiy A.A., Erasov V.S., Yakovlev N.O. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences,* 2014, no. 5, pp. 66–82.
[19] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdykh sred* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[20] Dimitrienko Yu.I. *Composite science and technologies*, 1999, vol. 59, no. 7, pp. 1041–1053.
[21] Dimitrienko Yu.I. *Applied Composite Materials*, 1997, vol. 4, no. 4, pp. 219–237.
[22] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy — Mechanics of composite materials and structures*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 259–282.

[23] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, no. 5 (29). DOI 10.18698/2308-6033-2014-5-1236

[24] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2016, no. 11 (59), pp. 68–77. DOI 10.18698/2308-6033-2016-11-1555

Dimitrienko Yu.I., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Scientific and Educational Center for Supercomputer Engineering Modeling and Software Development (SEC "SIMPLEX"), Bauman Moscow State Technical University, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 370 research papers in the field of continuum mechanics, computational mechanics, composite mechanics and thermomechanics, mathematical modeling in material science, computational gas dynamics.
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Yurin Yu.V., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Research Fellow of the Scientific and Educational Center for Supercomputer Engineering Modeling and Software Development (SEC "SIMPLEX"), Bauman Moscow State Technical University. Author of 14 research papers in the field of composite mechanics. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Egoleva E.S., engineer, JSC MIC "NPO Mashinostroyenia", author of several works on composite materials modeling. e-mail: eegoleva@mail.ru